

UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



# Mecánica de fluidos. →

## Breve introducción teórica con problemas resueltos

Josep M. Bergadà Grañó





UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH



iniciativa  
digital politècnica  
Publicacions Acadèmiques UPC

→ **UPCGRAU**

Mecánica de fluidos. →  
Breve introducción teórica con problemas resueltos

Josep M. Bergadà Grañó

Primera edición: noviembre de 2012

Diseño y dibujo de la cubierta: Jordi Soldevila

Diseño maqueta interior: Jordi Soldevila

Imagen de la cubierta extraída del artículo *Global modes in a swirling jet undergoing vortex breakdown*.  
C. Petz, H.-C. Hege, K. Oberleithner, M. Sieber, C. N. Nayeri, C. O. Paschereit, I. Wygnanski, and B. R. Noack.  
PHYSICS OF FLUIDS 23, 091102 (2011). Reproducida con permiso de los autores.

© Josep M. Bergadà Graño, 2012

© Iniciativa Digital Politècnica, 2012  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Jordi Girona Salgado 31,  
Edifici Torre Girona, Planta 1, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

Depósito legal: B. 31034-2012

ISBN: 978-84-7653-943-9

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede realizarse con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista en la ley.





## Prólogo

La mecánica de fluidos tiene sus orígenes en la hidráulica, tanto en Mesopotamia como en Egipto alrededor del año 4000 antes de nuestra era proliferaron las obras hidráulicas que aseguraban el regadío de vastas zonas. Posteriormente, los imperios griego, chino y especialmente, el romano se caracterizan por una gran profusión de las construcciones hidráulicas.

A lo largo de la historia, aparecen inventos e investigadores que aportan mejoras sustanciales en el campo que hoy se denomina *mecánica de fluidos*, algunas de las cuales son las realizadas por:

Arquímedes (287-212 a.c.), crea el tornillo helicoidal y enuncia el principio de flotación. Leonardo da Vinci (1452-1519), muestra la aparición de vórtices en la zona de separación de flujo; describe los principios de funcionamiento de máquinas voladoras.

Pascal (1623-1662), en el estudio de la estática de fluidos define el principio que lleva su nombre. Newton (1642-1727), realiza el análisis espectral de la luz; define la teoría de gravitación universal; establece los principios de cálculo integral y diferencial, y promulga la ley de viscosidad que lleva su nombre. Henry de Pitot (1695-1771), crea, con el fin de medir la velocidad de un fluido, el tubo que lleva su nombre. Bernoulli (1700-1782), populariza la ley que define la energía asociada al fluido a lo largo de una línea de corriente, estudia problemas sobre estática y dinámica de fluidos. Euler (1707-1783), establece la base matemática para el estudio del flujo ideal, sin viscosidad. Venturi (1746-1822), clarifica los principios básicos del flujo a lo largo de un conducto convergente divergente (el tubo de Venturi), define los principios del resalto hidráulico.



Henri Navier (1785-1836), basándose en los estudios de Euler, deriva las ecuaciones de Navier, que posteriormente Stokes modifica hasta obtener las ecuaciones que se conocen actualmente. Ludwig Hagen (1797-1884), estudiando el flujo en conductos cerrados, encuentra la zona de traspaso entre flujo laminar y turbulento, y observa que depende de la velocidad y la temperatura del fluido, así como del diámetro y la rugosidad del conducto. Poiseuille (1799-1869), estudia el movimiento de la sangre en venas y capilares, y determina experimentalmente la relación entre presión y caudal en capilares.

William Froude (1810-1879), se dedicó durante parte de su vida a construir barcos; sus investigaciones fueron continuadas por su hijo R.E. Froude (1846-1924), el cual definió el número adimensional que lleva su nombre y que relaciona las fuerzas de inercia con las fuerzas gravitacionales. G. Stokes (1819-1903), logró derivar la ecuación de Navier-Stokes. Kirchhoff (1824-1887), define el coeficiente de contracción, hallándolo para el caso de orificios bidimensionales. Ernst Mach (1838-1916), que en uno de sus más conocidos estudios sobre los flujos a alta velocidad, deduce el número de Mach. Reynolds (1842-1912), clarifica el fenómeno de cavitación; define los regímenes laminar y turbulento, y el número adimensional que los identifica. Su teoría sobre la lubricación hidrodinámica es asimismo muy relevante. Ludwig Prandtl (1875-1953), que observa la aparición y define la teoría de la capa límite, se considera como uno de los creadores de la mecánica de fluidos moderna. Theodor Von Karman (1881-1963) estudia los vórtices detrás de un cilindro, define las fuerzas de arrastre y sustentación de cuerpos en el seno de un fluido en régimen turbulento.

Durante el siglo XX, los avances en la mecánica de fluidos han sido continuos, siendo la dinámica de gases, la aerodinámica y la aeronáutica los campos que han experimentado y seguirán experimentado en el futuro una especial proliferación. Asimismo, las técnicas no intrusivas para la medición del movimiento del fluido, han despegado, aplicándose en la actualidad en cualquier campo.

En el presente libro, se introducen de una manera muy elemental diversos conceptos básicos de la mecánica de fluidos, el libro está pensado para que el lector adquiera rápidamente la información básica de cada capítulo y pueda seguidamente fijar sus conocimientos mediante los problemas resueltos que se presentan en cada uno de los capítulos.

Quisiera agradecer a los profesores C.N. Nayeri y C.O. Paschereit de TU Berlín, el apoyo y cortesía que en todo momento han tenido conmigo.

Es mi deseo que este libro sea de utilidad, tanto para los futuros estudiantes como para los profesionales que necesiten repasar conceptos básicos sobre la mecánica de fluidos.

Josep M Bergadà







## Índice

### Cap. 1 Introducción a la Mecánica de Fluidos. Propiedades de los fluidos

1.1 Introducción. Fluido desde el punto de vista molecular .....	19
1.2 Fluido desde el punto de vista termodinámico .....	20
1.3 Fluido desde el punto de vista mecánico .....	22
1.4 Aproximación del continuo .....	22
1.5 Equilibrio termodinámico local .....	23
1.6 Propiedades de los fluidos .....	23
1.6.1 Módulo de elasticidad .....	24
1.6.2 Coeficiente de expansión térmica .....	25
1.6.3 Colofón sobre módulo de elasticidad y coeficiente de expansión térmica.....	25
1.6.4 Tensión superficial.....	26
1.6.5 Definición de viscosidad.....	28

#### Problemas

1. Balance de fuerzas en un conducto.....	32
2. Viscosímetro cilíndrico .....	33
3. Viscosímetro esférico .....	35
4. Viscosímetro cónico .....	36

### Cap. 2 Cinemática de fluidos

2.1 Concepto de derivada sustancial, material o total.....	41
2.2 Concepto de flujo convectivo a través de una superficie.....	42
2.3 Concepto de Circulación .....	43
2.4 Líneas de corriente, trayectoria y traza.....	43
2.4.1 Líneas de Senda o Trayectoria.....	44



2.4.2 Líneas de Traza .....	45
2.4.3 Líneas de Corriente .....	45
2.4.4 Concepto de línea fluida.....	47
2.5 Concepto de vorticidad e irrotacionalidad .....	47
2.6 Estudio cinemático del movimiento de una partícula .....	50

#### Problemas

5. Variación del volumen de fluido al variar parámetros termodinámicos .....	53
6. Cálculo de parámetros cinemáticos, aceleración, vorticidad .....	54
7. Cálculo de parámetros cinemáticos, líneas de corriente, traza y trayectoria.....	57
8. Cálculo global de parámetros cinemáticos.....	61

### Cap. 3 Estática de fluidos

3.1 Ecuación diferencial de la estática de fluidos .....	69
3.2 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido .....	70
3.3 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido, coordenadas cilíndricas.....	73
3.4 Fuerzas sobre superficies planas .....	74
3.5 Fuerzas sobre superficies curvas.....	77
3.6 Fuerzas sobre volúmenes sumergidos.....	79

#### Problemas

9. Fuerzas sobre cuerpos sumergidos, esfera .....	80
10. Cuerpos sumergidos entre dos fluidos .....	83
11. Fuerzas sobre superficies .....	87
12. Fluido como sólido rígido .....	92

### Cap. 4 Ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos

4.1 Introducción. Ecuación de transporte de Reynolds.....	99
4.2 Ecuación de continuidad de la masa en forma integral.....	104
4.2.1 Ecuación de continuidad, en modo diferencial.....	104

#### Problemas

13. Vaciado de un depósito troncocónico convergente.....	106
14. Vaciado de un depósito troncocónico divergente .....	107
15. Flujo que fluye por un conducto divergente .....	109
16. Vaciado de un depósito con múltiples agujeros.....	111
17. Evolución de un fluido de densidad variable por un conducto .....	113
18. Variación temporal de la presión en un cilindro .....	115
19. Evolución del fluido compresible en una suspensión hidráulica .....	118

## Cap. 5 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

5.1 Forma integral .....	125
5.2 Forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento.....	126
5.3 Ecuación de cantidad de movimiento en forma integral y para sistemas no inerciales de coordenadas .....	131
5.4 Ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial para sistemas no inerciales.....	133

### Problemas

20. Fuerza de un chorro sobre una superficie semiesférica .....	135
21. Cantidad de movimiento sobre una superficie cónica .....	136
22. Fuerza del fluido sobre un azud.....	139
23. Fuerza de un chorro sobre un álabe .....	140
24. Fuerza de reacción sobre un depósito móvil.....	147
25. Principio de funcionamiento de un helicóptero .....	151
26. Fuerza de reacción de un motor de avión .....	154
27. Aceleración de un cohete.....	155
28. Movimiento de un avión de pasajeros .....	158
29. Sistemas no inerciales de coordenadas I.....	163
30. Sistemas no inerciales de coordenadas II .....	166
31. Fuerzas actuantes en el interior de una servoválvula.....	172

## Cap. 6 Ecuación del momento de la cantidad de movimiento, momento cinético

6.1 Ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas.....	181
6.2 Aplicación de la ecuación del momento cinético a turbomáquinas .....	182
6.3 Ecuación de momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas .....	184

### Problemas

32. Aplicación a un aspersor giratorio.....	186
33. Turbina Pelton .....	189
34. Aspersor con álabes.....	194
35. Helicóptero .....	198
36. Aspersor inclinado.....	202

## Cap. 7 Ecuación de conservación de la energía

7.1 Introducción.....	205
7.2 Composición del término trabajo .....	206
7.3 Ecuación de la energía para turbomáquinas, caso máquinas térmicas e hidráulicas.....	208
7.4 Forma diferencial de la ecuación de la energía.....	211



Problemas	
37. Compresor.....	214
38. Bombeo de combustible.....	216
39. Hovercraft.....	219
40. Turbina axial.....	224

## Cap. 8 Flujo con viscosidad dominante

8.1 Flujo entre dos placas paralelas .....	231
8.2 Flujos independientes del tiempo.....	234
8.2.1 Flujo de Couette - Poiseulle plano .....	234
8.2.2 Flujo de Couette .....	235
8.2.3 Flujo de Hagen-Poiseulle o Poiseulle plano.....	236
8.3 Flujo dependiente del tiempo .....	236
8.3.1 Flujo de Rayleigh .....	236
8.4 Flujo estacionario en conductos circulares .....	240
8.4.1 Flujo de Poiseulle .....	240
8.5 Concepto de pendiente motriz .....	244
8.6 Flujo en un conducto anular.....	245
8.6.1 Considérese ahora el caso en que ambos cilindros son estacionarios pero existe una diferencia de presión entre los extremos de los cilindros.....	249
8.6.2 Caso genérico de flujo entre dos cilindros concéntricos, en donde existe desplazamiento en dirección axial de ambos cilindros y gradiente de presiones entre extremos de los cilindros.....	252
8.7 Flujo entre cilindros concéntricos giratorios.....	254
8.8 Flujos con aceleración despreciable.....	266
8.8.1 Introducción .....	266
8.8.2 Teoría de la lubricación de Reynolds. Flujo unidireccional. ....	268
8.8.2.1 Cojinetes hidrostáticos planos, patín de Michel. ....	268
8.8.2.2 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidimensional unidireccional. Coordenadas cartesianas .....	274
8.8.2.3 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidireccional, tridimensional. Coordenadas cartesianas.....	274
8.8.2.4 La ecuación de lubricación de Reynolds en régimen transitorio, flujo bidimensional tridireccional. Coordenadas cartesianas .....	275
8.8.3 Flujos con aceleración despreciable. Cojinetes cilíndricos cargados estáticamente .....	277

Problemas	
41. Flujo entre dos cilindros concéntricos giratorios .....	284
42. Flujo radial entre dos cilindros concéntricos .....	288
43. Cojinete esférico .....	291



44. Flujo radial entre dos placas planas .....	297
45. Patín deslizante con ranura .....	301
46. Patín deslizante inclinado .....	308
47. Flujo entre pistón y camisa .....	319
48. Flujo transitorio en un conducto .....	326
49. Cojinete hidrodinámico cilíndrico I .....	331
50. Cojinete hidrodinámico cilíndrico II .....	335
51. Caudal de fugas en una mini turbina .....	342
52. Patín de Michel .....	355
53. Flujo de pérdidas en la placa de cierre de una bomba de pistones .....	357
54. Patín deslizante mixto .....	375
55. Flujo en una válvula de asiento cónico .....	382

## Cap. 9 Análisis adimensional

9.1 Introducción .....	395
9.2 Fundamentos del análisis adimensional .....	396
9.3 Teorema de $\pi$ ó Buckingham .....	397
9.3.1 Caso del cálculo de las pérdidas de energía en una tubería .....	397
9.4 Extensión del ejemplo utilizando el método matricial .....	399
9.5 Método de normalización de las ecuaciones o método del análisis inspec- cional .....	400
9.6 Algunos de los grupos adimensionales más comunes en Mecánica de Fluidos son: .....	403
9.7 Pruebas con modelos, extrapolación de resultados .....	405

### Problemas

56. Grupos adimensionales que caracterizan el flujo incompresible en conductos ..	408
57. Grupos adimensionales que caracterizan el flujo compresible en conductos .....	411
58. Grupos adimensionales para una turbomáquina que opera con fluido compresible ..	413
59. Grupos adimensionales para un vertedero triangular .....	415
60. Grupos adimensionales aplicables a barcos .....	418

## Cap. 10 Flujo interno

10.1 Introducción .....	423
10.2 Tipos de flujo .....	423
10.3 Establecimiento de flujo en un conducto .....	424
10.4 Primera ley de la termodinámica aplicada al flujo en tuberías .....	425
10.5 El término de pérdidas .....	427
10.6 Pérdidas menores o singulares .....	430
10.7 Casos posibles de problemas en sistemas de tuberías .....	432
10.8 Conductos en serie y en paralelo, y conductos ramificados .....	435



10.8.1 Características de los sistemas en serie .....	435
10.8.2 Características de los sistemas en paralelo .....	436
10.9 Concepto de longitud equivalente.....	437
10.10 Conductos no circulares. Concepto de diámetro hidráulico .....	437
10.11 Sistemas de conductos ramificados.....	438

#### Problemas

61. Flujo en conductos ramificados .....	440
62. Flujo entre dos depósitos .....	444
63. Central térmica.....	448
64. Sistema de tres depósitos .....	454
65. Sistema con múltiples depósitos .....	470

### Cap. 11 Capa límite, flujo externo, flujo potencial

11.1 Capa límite .....	491
11.1.1 Introducción .....	491
11.1.2 Efectos de la capa límite sobre el flujo, concepto de espesor de desplazamiento de la capa límite .....	492
11.1.3 Concepto de espesor de cantidad de movimiento para la capa límite .....	493
11.1.4 Ecuación diferencial de Prandtl para el análisis de la capa límite .....	494
11.1.5 Ecuación integral de cantidad de movimiento para la capa límite. Ecuación de Von Karman .....	498
11.1.6 Evaluación de los parámetros de la capa límite para el flujo sobre una placa plana.....	501
11.1.6.1 Características para la capa límite en la región laminar .....	502
11.1.6.2 Capa límite turbulenta .....	507
11.2 Flujo externo .....	514
11.2.1 Introducción .....	514
11.2.2 Fuerza sobre cuerpos, resistencia y sustentación.....	515
11.2.3 Conceptos de vórtice libre y vórtice forzado.....	518
11.2.4 El teorema de Kutta-Joukowski (válido para flujo subsónico).....	518
11.2.5 Sustentación sobre cilindros y esferas giratorias, efecto Magnus .....	521
11.3 Introducción al Flujo Potencial .....	523
11.3.1 Ecuaciones de Euler y Bernoulli .....	523
11.3.2 Concepto de potencial de velocidades y función de corriente.....	525

#### Problemas

66. Capa límite en una embarcación .....	529
67. Capa límite en una aeronave .....	531
68. Capa límite en conductos sumergidos.....	534
69. Efecto Magnus I.....	538
70. Distribución de presión en un tornado .....	543

71. Efecto Magnus II .....	546
72. Vórtices bajo las alas de aeronaves .....	551

## Cap. 12 Golpe de ariete

12.1 Fenómeno físico .....	573
12.2 Expresiones para obtener el valor de la presión máxima o sobrepresión en el Conducto .....	576
12.3 Estudio temporal de las perturbaciones de presión en un punto genérico del conducto .....	579
12.4 Ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno del golpe de ariete .....	581
12.4.1 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento .....	582
12.4.2 Ecuación de continuidad .....	584
12.4.3 Modificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para que puedan ser aplicadas a transitorios y conductos deformables .....	585
12.4.4 Simplificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en régimen transitorio .....	587

### Problemas

73. Golpe de ariete I .....	589
74. Golpe de ariete II .....	595

## Cap. 13 Flujo compresible

13.1 Relaciones termodinámicas .....	601
13.2 Concepto de propiedades de estancamiento .....	603
13.3 Estudio de la propagación de una onda débil en un fluido compresible. Concepto de velocidad del sonido y el número de Mach. Límite de incompresibilidad.....	604
13.4 Relación entre el número de Mach y las propiedades de estancamiento del Fluido .....	608
13.5 El cono de Mach.....	609
13.6 Características de las ondas de choque.....	610
13.7 Estudio del flujo isentrópico y estacionario para un gas ideal.....	615
13.8 Condiciones críticas.....	617
13.9 Flujo unidimensional en un conducto de área variable.....	618
13.9.1 Concepto de caudal de bloqueo .....	622
13.9.2 Evolución del flujo en una tobera convergente.....	623
13.9.3 Evolución del flujo en una tobera convergente divergente .....	624
13.10 Flujo compresible unidimensional estacionario en conductos de sección constante.....	628
13.10.1 Flujo adiabático sin transferencia de calor y con fricción, flujo de Fanno .....	629



13.10.2 Flujo compresible isotérmico con fricción en una conducción larga de sección constante.....	636
13.10.2.1 Concepto de condición límite en flujo isotérmico con fricción .....	639
13.10.3 Flujo compresible estacionario con transferencia de calor y sin fricción. Flujo de Rayleigh .....	640
13.10.3.1 Ecuaciones gobernantes.....	641
13.10.3.2 Características del fluido para condiciones de máxima entalpía y máxima entropía .....	644
13.10.3.3 Intersección entre las líneas de Fanno y Rayleigh .....	645
13.10.3.4 Propiedades termodinámicas de flujo estacionario unidimensional con adición de calor .....	646
Problemas	
75. Descarga de un depósito .....	650
76. Flujo compresible entre dos depósitos .....	657
77. Aplicación del método de Bergh-Tijdemann .....	679
78. Flujo compresible en conductos de sección constante I.....	686
79. Flujo compresible en conductos de sección constante II .....	691
80. Ondas de choque oblicuas.....	697
81. Tobera supersónica .....	700
Nomenclatura.....	711
Bibliografía.....	717



→ 1



# Introducción a la Mecánica de Fluidos.

## Propiedades de los fluidos

### 1.1 Introducción. Fluido desde el punto de vista molecular

La Mecánica de Fluidos se puede definir como la parte de la física que se ocupa del estudio del equilibrio estático y dinámico de la materia en estado fluido. Desde el punto de vista molecular, se puede establecer que, en fase gaseosa, el fluido se caracteriza por tener unas fuerzas intermoleculares débiles. El entorno de una molécula es de rango largo para un sólido, de rango corto para un líquido, alrededor de  $30 \text{ \AA}$  ( $3 \text{ nm}$ ), y no tiene rango para un gas.

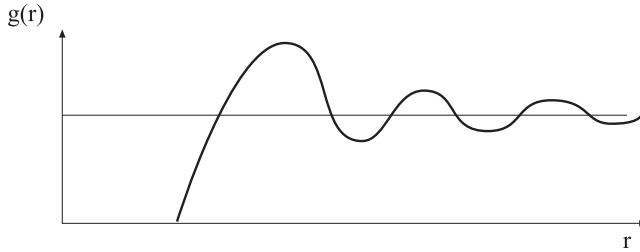
Para la fase líquida, con el fin de estudiar el comportamiento del fluido a nivel molecular, se utiliza el concepto de función de distribución radial  $g(r)$ , la cual se define como un cociente de densidades: densidad media del número de moléculas que hay en el interior de un volumen esférico de líquido de radio “ $r$ ” a partir del centro de una de ellas  $\rho(r)$ , dividido por la densidad media del número de moléculas que hay en una masa de líquido donde se encuentran millones de moléculas  $\rho(0)$ . Obsérvese que la función de distribución radial puede ser superior, inferior o igual a la unidad.

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho(0)} \begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 1 \end{cases}$$

La representación de la función de distribución radial en función del radio de la esfera se esquematiza en la figura T 1.1. Véase que, para radios de la esfera pequeños, es decir, cuando hay pocas moléculas en el interior de la esfera, la función de distribución radial tiende a cero; a medida que el número de moléculas en el interior de la esfera de radio genérico aumenta, el valor de la función de distribución radial oscila alrededor del valor unidad.

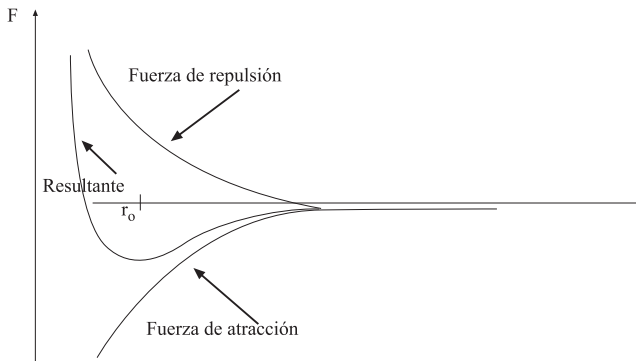


Fig. T 1.1  
Función de  
distribución  
radial



El comportamiento de estas variaciones de densidad a nivel molecular se explica gracias a las fuerzas de atracción y repulsión molecular. La figura T 1.2 representa dichas fuerzas en función de la distancia de alejamiento respecto el centro de una molécula. Véase que, a distancias muy pequeñas, las fuerzas de repulsión son mayores que las de atracción molecular y que, a partir de una distancia “ $r_0$ ” aparece un cierto equilibrio de fuerzas, a partir de dicho punto, las fuerzas de atracción son ligeramente mayores que las de repulsión.

Fig. T 1.2  
Fuerzas de  
atracción y  
repulsión a  
nivel molecular



La energía necesaria para desplazar un átomo a una distancia  $dr$  contra una fuerza  $F(r)$  se da como:  $du = -F(r) dr$ , el signo (-) es debido a que la fuerza aumenta al disminuir el radio. La energía requerida para traer un átomo desde el infinito a una distancia “ $r$ ” se define como:

$$u = -\int_{\infty}^r F(r)dr$$

Esta ecuación se conoce como el potencial de Lennard-Jones.

## 1.2 Fluido desde el punto de vista termodinámico

Desde el punto de vista termodinámico, la materia se define en tres estados posibles: líquido, sólido y gaseoso. Así, cuando se habla de fluido, es necesario considerar el estado termodinámico del mismo. A priori, en un primer curso de Mecánica de Fluidos, se considera que el fluido objeto de estudio, no experimenta ningún cambio de fase.





A modo de recordatorio, se presenta en la figura T 1.3 el diagrama P-T para el agua, donde se observan los tres estados de la materia, así como los puntos triple y crítico.

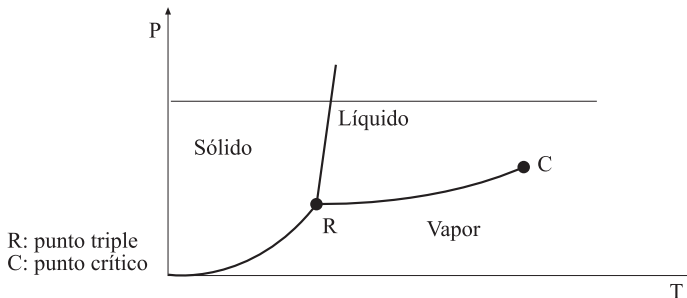


Fig. T 1.3.  
Diagrama  
presión  
temperatura  
para el agua

En el punto crítico, se definen los parámetros críticos  $P_c$ ,  $T_c$ ,  $V_c$ ,  $h_c$ , etc. En dicho punto, en un instante todo el líquido puede transformarse en vapor y viceversa, sin aportación ni cesión de calor alguna, (el calor de vaporización es igual a cero).

De manera homóloga, en el punto triple el calor de sublimación es también cero.

Las dos figuras siguientes T 1.4, T 1.5, muestran el diagrama P-V (presión-volumen) y T-S (temperatura-entropía) para el agua, donde de nuevo se observan claramente los tres estados de la materia, así como los puntos crítico y triple.

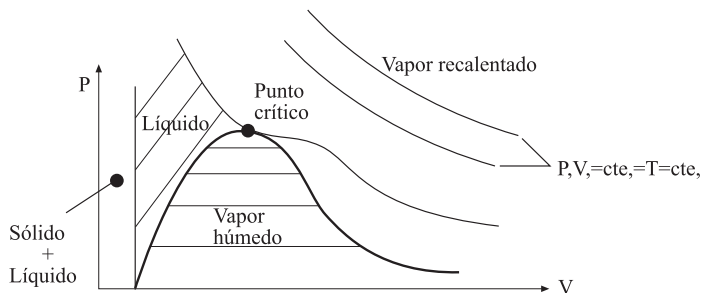


Fig. T 1.4  
Diagrama  
presión  
volumen para  
el agua

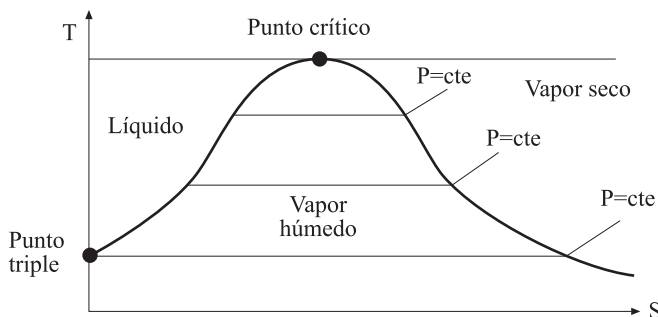


Fig. T 1.5  
Diagrama  
temperatura  
entropía para el  
agua

Desde el punto de vista termodinámico, se concluye que no se puede hablar de un fluido, sino de un fluido bajo un estado termodinámico concreto, siendo las propiedades del fluido altamente dependientes del estado termodinámico en el que se encuentra.



### 1.3 Fluido desde el punto de vista mecánico

Una sustancia se encuentra en estado fluido si experimenta una deformación continua durante el tiempo en que está sometida a una tensión tangencial. Los líquidos y los gases no pueden soportar tensiones tangenciales sin que en su interior aparezca un gradiente de velocidad. Un sólido requiere la aplicación de una tensión finita antes de que se produzca alguna deformación.

Existe un número adimensional, denominado número de Deborah ( $De$ ) que, desde el punto de vista mecánico y basado en mediciones experimentales, permite determinar si el cuerpo objeto de estudio es un fluido o bien un sólido. Su definición es:

$$De = \frac{\tau}{t_0}; \frac{\text{Tiempo de relajación}}{\text{Tiempo de observación}}; \frac{\text{Tiempo durante el que se aplica una tensión}}{\text{Tiempo que se toma para evaluar la velocidad de deformación}}$$

El número de Deborah es el cociente entre el tiempo transcurrido  $\tau$ , durante el cual se aplica una tensión tangencial a un fluido, y el tiempo necesario para evaluar la velocidad de deformación de la sustancia sometida a tensión.

Si observamos un material dado durante un tiempo más largo que  $\tau$ , puede parecer que fluye como un líquido viscoso, mientras que su comportamiento puede considerarse como el de un sólido rígido en escalas de tiempo menores.

Para:

$De \ll 1$  la sustancia es un fluido

$De \gg 1$  la sustancia es un sólido

### 1.4 Aproximación del continuo

En teoría, sería posible describir el comportamiento de una sustancia en cualquier estado en términos de la dinámica de las moléculas que la componen. En la práctica, esto es imposible, debido al número elevadísimo de moléculas. Prácticamente siempre es posible ignorar la naturaleza molecular de la materia y suponer que es continua. Es decir, los fenómenos físicos y químicos que se estudiarán están a una escala (macroscópica), la estructura molecular de cualquier sustancia tiene una escala (microscópica) que puede ser ignorada, el fluido se considerará como un medio isótropo.

En consecuencia, las propiedades que definen una sustancia son las que representan las características medias de la estructura molecular. Estas propiedades se describen para funciones continuas de la posición y el tiempo.

En la mecánica de medios continuos, basta estudiar la densidad, la velocidad y la energía interna como funciones de la posición y el tiempo.



## 1.5 Equilibrio termodinámico local

A la hora de estudiar un fluido, se va a considerar que cada elemento diferencial de materia está en equilibrio mecánico y térmico con los elementos que le rodean.

La termodinámica muestra que puede especificarse el estado macroscópico de los fluidos en equilibrio mediante los valores de algunas variables de estado: presión, densidad, temperatura, energía interna, entropía, etc. Enseña también que, si el fluido es homogéneo en composición, basta con conocer los valores de dos variables cualesquiera para poder determinar, en función de ellas, todas las demás. Las ecuaciones de estado son las funciones que ligán dichas variables.

La mecánica de fluidos se caracteriza por la existencia de no uniformidades en las propiedades mecánicas y térmicas del fluido. Sin embargo (al menos para los gases), la teoría cinética muestra que, siempre que el camino libre medio sea pequeño frente a la longitud característica de las no uniformidades macroscópicas (y que el tiempo entre colisiones moleculares sea pequeño con respecto al tiempo necesario para que las variables macroscópicas experimenten cambios locales apreciables), existe equilibrio termodinámico local.

Esta hipótesis se justifica por el hecho de que un átomo o molécula sufre un gran número de colisiones con sus vecinos antes de alcanzar regiones donde las magnitudes macroscópicas cambien; de modo que gradualmente adapta su movimiento y energía a los que existen localmente, y va perdiendo memoria de su situación primitiva en las sucesivas colisiones.

El número de Knudsen mide la relación entre el camino libre medio  $\lambda$  molecular y la longitud característica macroscópica  $L$  de variación de las propiedades fluidas.

$Kn = \lambda/L$ . Siempre que  $Kn \ll 1$ , se considera que existe equilibrio termodinámico local. Aunque, en realidad, es necesario que se cumpla, además, que el tiempo entre colisiones sea pequeño frente al tiempo necesario para que las variables microscópicas experimenten cambios locales apreciables.

## 1.6 Propiedades de los fluidos

Las propiedades características de los fluidos se desglosan en mecánicas y térmicas. Como propiedades mecánicas, cabe citar la densidad, la presión, el módulo de elasticidad volumétrica, la tensión superficial y la viscosidad del fluido.

Algunas de las propiedades térmicas son la temperatura, la energía interna, la entalpía, la entropía, los calores específicos a presión y temperatura constante y el coeficiente de expansión térmica.

A continuación, se presentaran brevemente algunas de estas propiedades.



### 1.6.1 Módulo de elasticidad

El módulo de elasticidad  $\beta$  es la propiedad de los fluidos que indica su grado de compresibilidad al ser sometidos a una variación de presión. Se define como:

$$\beta = -\nabla \frac{dP}{dV} = -v \frac{dP}{dv} = \rho \frac{dP}{d\rho}$$

El módulo de elasticidad es equivalente al módulo de Young en la mecánica de los sólidos.

Para un gas, se cumple que  $P = P(\rho, T)$

$$\text{Con lo que se puede definir: } dP = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho dT$$

Si el proceso es a temperatura constante, el módulo isotérmico de elasticidad será:

$$\beta_{v,t} = \rho \left( \frac{dP}{d\rho} \right) = \rho \frac{\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T d\rho}{d\rho} = \rho \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T$$

Si el gas fuese ideal, se ha de cumplir que  $P = \rho RT$

$$\beta_{v,t} = \rho \left( \frac{\partial(\rho RT)}{\partial \rho} \right)_T = \rho RT = P \quad \text{El módulo isotérmico de un gas es igual a la presión de dicho gas.}$$

En general, para cualquier fluido, de la ecuación genérica del módulo de elasticidad se tiene  $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\beta}$ . Esta ecuación puede ser utilizada para definir matemáticamente el concepto de fluido incompresible. Así, si se acepta un cambio de densidad del 1 % como insignificante, se puede definir un fluido como incompresible si cumple:

$$\frac{dP}{\beta} < 0,01 ;$$

Relacionando la variación de presión con la energía cinética asociada al fluido se establece:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho v^2$$

con lo que la consideración de un fluido como incompresible se puede dar como:  $\frac{\rho v^2}{\beta} < 0,02$ . Para aire en condiciones estándar, esta condición equivale a una velocidad de 40 m/s.



### 1.6.2 Coeficiente de expansión térmica

Una propiedad equivalente al módulo de elasticidad  $\beta$ , pero desde el punto de vista térmico, es el coeficiente de expansión térmica  $\alpha_T$ . Dicho coeficiente mide el efecto de expansión del fluido al variar la temperatura del mismo. Se define como:

$$\alpha_T = \frac{1}{\forall} \frac{d\forall}{dT} = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

Para todo fluido, existe una relación entre su densidad, su presión y su temperatura  $\rho = (P, T)$ , con lo que la variación de densidad en función de estos dos parámetros se define:

$$d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T dP$$

Para un proceso de expansión térmica a presión constante:

$$d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT \quad \text{de donde} \quad \frac{d\rho}{dT} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$

Sustituyendo en la expresión del coeficiente de expansión térmica, se tiene:

$$\alpha_{T,P} = - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P, \text{ ecuación que caracteriza el coeficiente de expansión térmica para}$$

un proceso a presión constante.

Si se considera el caso de un gas ideal, se tiene:

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

con lo que, para un proceso a presión constante se tiene:

$$\alpha_{T,P} = - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{P}{RT} \right) \right)_P = - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{RT} \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_P + P \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{RT} \right) \right)_P \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{P}{R} \left( - \frac{1}{T^2} \right) = \frac{1}{T}$$

Se concluye que, el coeficiente de expansión térmica de un gas ideal es igual a la inversa de la temperatura del mismo.

### 1.6.3 Colofón sobre módulo de elasticidad y coeficiente de expansión térmica

Considérese un volumen determinado de fluido  $\forall$ . Si se quiere estudiar la variación de dicho volumen, en función de las variaciones de presión y de temperatura, se puede establecer:



$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$$

$$\frac{dV}{V} = \alpha_{T,P} dT - \frac{1}{\beta_{V,T}} dP$$

ecuación que caracteriza la variación del volumen de un fluido en función de la variación de presión y temperatura al que está sometido, donde:

$$\alpha_{T,P} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad \text{es el coeficiente de expansión térmica}$$

$$\beta_{V,T} = -V \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \quad \text{es el módulo de elasticidad volumétrica}$$

La variación del volumen con respecto al volumen inicial se puede expresar como:

$$\frac{dV}{V} = \frac{V - V_0}{V} = \frac{\frac{V}{m} - \frac{V_0}{m}}{\frac{V}{m}} = \frac{v - v_0}{v} = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}}{\frac{1}{\rho}} = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = -\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$$

Así, la ecuación que relaciona la variación de densidad del fluido, en función de la variación de presión y temperatura, se puede dar como:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{\beta_{V,T}} (P - P_0) - \alpha_{T,P} (T - T_0)$$

A modo de ejemplo, para el agua a unas condiciones termodinámicas de  $P = 10^5$  Pa y  $T = 277$  K, se tiene que  $\beta_{V,T} = 1,96 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ;  $\alpha_{T,P} = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ , siendo las condiciones iniciales  $\rho_0 = 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  y  $T_0 = 0$  K.

#### 1.6.4 Tensión superficial

La tensión superficial  $\sigma$ ,  $\sigma = \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ , describe las fuerzas en la interfaz entre un gas y un líquido, o entre dos líquidos, o entre un gas y un sólido.



La tensión superficial juega un papel importante en problemas que implican la formación de burbujas en líquidos, la ruptura de chorros de líquidos en gotas y la determinación de las formas de masas de líquidos en condiciones ingravídas.

Con el fin de mostrar el carácter débil de las fuerzas debidas a la tensión superficial, se va a realizar el experimento que se muestra en la figura T 1.6, consistente en un alambre en forma de U y otro alambre que se desliza a lo largo de las dos ramas del alambre anteriormente mencionado. La superficie formada por los dos alambres se cubre con una película de jabón cuyo espesor es de pocas moléculas.

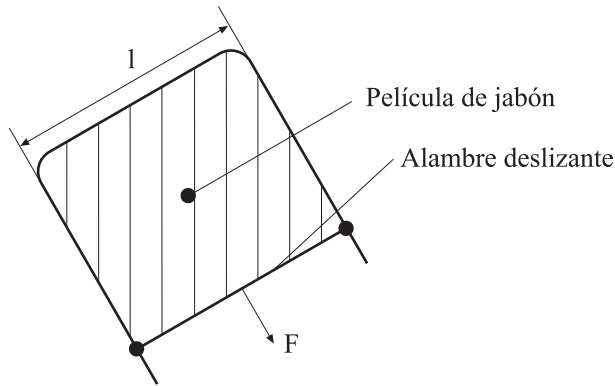


Fig. T 1.6  
Experimento  
para estudiar la  
tensión  
superficial

Dicha película de jabón crea una fuerza sobre el alambre deslizable, la cual tiende a disminuir la sección de película existente. La fuerza necesaria para mantener el alambre deslizable en una posición estable ha de ser igual y de sentido contrario a la creada por la película de jabón y vale  $F = 2 \sigma l$ . El 2 tiene en cuenta las dos superficies de jabón en contacto con el aire. Si el alambre se desplaza una distancia  $\Delta x$ , el trabajo requerido será:  $W = F(\Delta x) = 2 \sigma l (\Delta x) = 2 \sigma \Delta S$ , donde  $\Delta S$  es el elemento diferencial de superficie barrido.

Sea una gota infinitesimal de fluido con una forma casi esférica y situada en el seno de otro fluido, sea el punto 0 de la superficie tangente al plano xy. Para esta superficie infinitesimal, se puede demostrar que la fuerza vertical  $dF_z$  resultante de la tensión superficial a lo largo del borde de la superficie viene dada por:

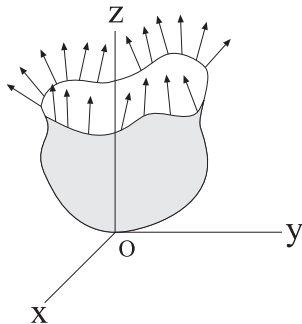


Fig. T 1.7  
Esquema de  
una gota casi  
esférica

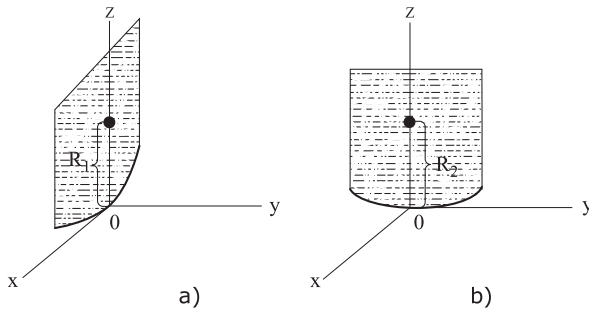


$$dF_z = \sigma \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_0 \right] dA$$

donde  $W$  es la curvatura de la superficie con respecto a los ejes coordenados.

Las derivadas pueden remplazarse por  $\frac{1}{R_1}$  y  $\frac{1}{R_2}$ , siendo estos los radios de curvatura en el centro de coordenadas y con respecto a los dos planos  $zx$  y  $zy$  que cortan a la gota casi esférica esquematizada, (ver figuras T 1.7 y T 1.8).

Fig. T 1.8  
Radios de curvatura respecto a los dos planos coordenados



Dividiendo por  $dA$ , se obtiene el aumento de presión entre la parte interior y exterior de la gota de fluido.

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Laplace-Young.}$$

Para el caso de que la gota sea perfectamente esférica  $R_1 = R_2$ , la ecuación que caracteriza la diferencia de presión entre la parte interior y exterior de la misma, toma la forma

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}.$$

### 1.6.5 Definición de viscosidad

Tal vez la propiedad más conocida y utilizada de los fluidos sea la viscosidad, entre otras cosas porque la ecuación reológica de los fluidos es función de la misma. La viscosidad fue definida inicialmente por Isaac Newton al relacionar los esfuerzos cortantes aplicados a una capa de fluido con la velocidad de deformación de dicho fluido.

Sea un elemento diferencial bidimensional de un sólido inicialmente en reposo y al cual se le aplican sendos esfuerzos cortantes en las caras superior e inferior del mismo. El sólido, al ser sometido a tensión, se deformará un ángulo  $\delta\theta$ , el cual no dependerá del tiempo durante el cual se aplique el esfuerzo cortante. Al dejar de aplicarse el esfuerzo (siempre y cuando no se haya sobrepasado el límite elástico), el elemento diferencial





volverá a su estado inicial. Si se realiza el mismo experimento sobre un elemento diferencial de fluido, se observa que, mientras le sea aplicada la tensión  $\tau$ , el fluido seguirá deformándose, es decir, el ángulo  $\delta\theta$  es para un fluido dependiente del tiempo.

Para un sólido:

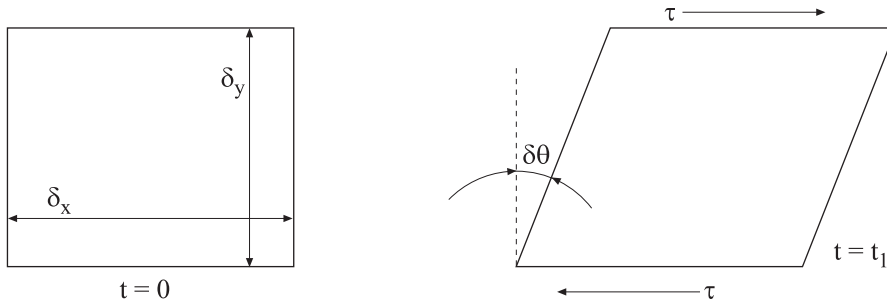
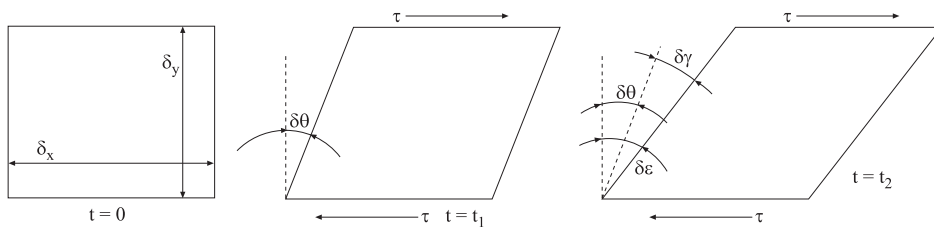


Fig. T 1.9  
Deformación de  
elementos  
diferenciales  
de sólido y  
fluido

Para un líquido:



Supóngase ahora que, en el seno de un fluido en movimiento, se extrae una muestra diferencial, sobre la cual actúan, en lados paralelos, velocidades distintas, figura T 1.10.

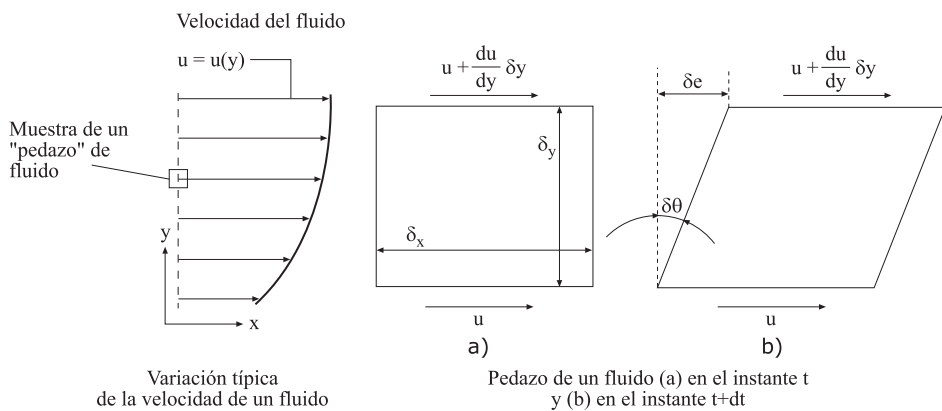


Fig. T 1.10  
Elemento  
diferencial de  
un fluido en  
movimiento

La diferencia de la velocidad entre la parte superior y la inferior del elemento diferencial es  $\frac{du}{dy} \delta y$ .



La distancia  $\delta e$  es la distancia de desplazamiento de la parte superior con respecto a la inferior, debido a la diferencia de velocidades entre estas dos caras.

$$\delta e = \frac{du}{dy} \delta y \delta t$$

Para un diferencial de tiempo pequeño, el ángulo girado  $\delta\theta$  será también pequeño, de donde:

$$\delta\theta \approx \tan(\delta\theta) = \frac{\delta e}{\delta y} = \frac{du}{dy} \delta t$$

La velocidad de deformación angular debida al esfuerzo cortante, es la velocidad de cambio de  $\delta\theta$ ; así:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{du}{dy}$$

En realidad, si existe un gradiente de velocidades entre la parte superior y la inferior del elemento diferencial, es equivalente a decir que existe un esfuerzo cortante entre estas dos capas de fluido. Considerando que el esfuerzo cortante  $\tau$  es proporcional a la velocidad de deformación angular, se obtiene  $\tau \propto \frac{\delta\theta}{\delta t}$ , donde el parámetro  $\alpha$  es la constante de proporcionalidad.

Dicha constante de proporcionalidad, es en realidad, un parámetro característico del fluido, que se denomina viscosidad absoluta o dinámica del fluido, obteniendo la relación:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Esta ecuación es la ley de Newton de la viscosidad, denominada también ecuación reológica de un fluido newtoniano, la cual puede expresarse como:

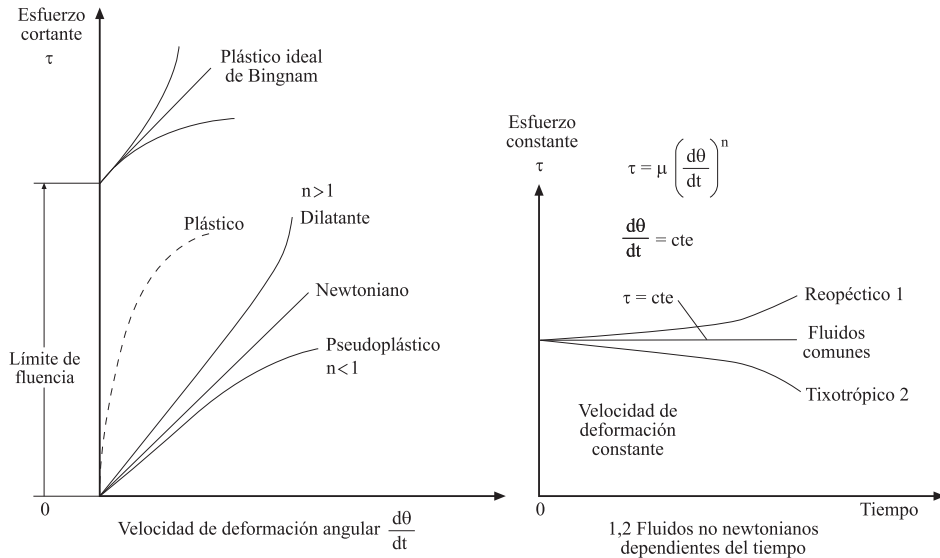
$$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma}^n ; \text{ siendo } \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y} .$$

El exponente  $n$  puede tomar los valores siguientes:

Para  $n = 1$  fluido newtoniano

Para  $n < 1$  o bien  $> 1$  el fluido es no newtoniano

Se denominan fluidos newtonianos, los que tienen una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación. La grafica siguiente muestra diferentes tipos de fluidos convencionales.



Un fluido dilatante aumenta la resistencia a la deformación al aumentar el esfuerzo cortante.

Un fluido pseudoplástico disminuye su resistencia al aumentar el esfuerzo. Si este efecto es muy importante (línea a trazos), el fluido se denomina plástico.

Todo fluido que necesite un esfuerzo cortante mínimo para empezar a fluir se denomina plástico de Bingham y puede ser lineal o no; su ecuación genérica sería:

$$\tau = \tau_0 + \mu \cdot \dot{\gamma}^n \quad 1 \leq n \leq 1$$

Los fluidos que necesitan un aumento gradual en el esfuerzo cortante para mantener constante la velocidad de deformación se denominan reopécticos. Los que necesitan esfuerzos decrecientes para mantener constante la velocidad de deformación reciben el nombre de tixotrópicos.



## Problema 1

### Enunciado

Entre los extremos de un tubo de 0,006 m de diámetro y 1 m de longitud, se aplica una diferencia de presión relativa de 50.000 Pa. Si el caudal que fluye es de  $Q = 3,5 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$ , halle la viscosidad del fluido circulante (considerando régimen laminar). Compruebe la veracidad de esta hipótesis.

### Resolución

La velocidad media de paso del fluido por el conducto será:

$$\bar{U} = \frac{Q}{S} = \frac{3,5 \times 10^{-6}}{\frac{\pi 0,006^2}{4}} = 0,1237 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dado que no se puede determinar el número de Reynolds, se considerará que el régimen de flujo es laminar; al final de proceso se comprobará esta hipótesis.

- Considerando que el fluido fluye según la ley de Poiseulle, y sabiendo que la distribución de velocidades en dirección radial según Poiseulle es:

$$\bar{U} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} \frac{1}{4} (r^2 - R^2) = U_{\text{máx}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

donde

$$U_{\text{máx}} = - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} R^2$$

La relación velocidad máxima-velocidad media  $\bar{U} = \frac{U_{\text{máx}}}{2}$

donde

$$\bar{U} = - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R^2}{8\mu}$$

La diferencia de presión entre extremos del conducto ha de ser contrarrestada por los esfuerzos cortantes en la pared del mismo, así:

$$F_p = \frac{\pi D^2}{4} \Delta P^*_{\text{total}} = \frac{\pi \times 0,006^2}{4} 50.000 = 1,4137 \text{ N}$$

El esfuerzo cortante se define como:

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} U_{\text{máx}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$



$$\tau = -\mu U_{\text{máx}} \frac{2r}{R^2}$$

El esfuerzo cortante de la pared valdrá:

$$r = R$$

$$\tau = -\mu U_{\text{máx}} \frac{2}{R}$$

$$\text{como } \bar{U} = \frac{U_{\text{máx}}}{2}$$

$$\tau = -\mu 4 \frac{\bar{U}}{R}$$

El esfuerzo debido a los esfuerzos cortantes a lo largo de todo el tubo será:

$$F_T = \tau S = \tau 2 \pi R L = -\mu 4 \frac{\bar{U}}{R} 2 \pi R L$$

$$\text{como } -F_T = F_p$$

$$1,4137 = 8 \pi \bar{U} \mu L = 8 \pi 0,1237 \mu$$

$$\mu = 0,4547 \frac{\text{N} \times \text{S}}{\text{m}^2}$$

Para que el flujo sea laminar se debe cumplir:

$$\text{Re} = \frac{\bar{U} D}{\nu} = \frac{0,1237 \times 0,006}{\frac{0,4547}{\rho}} < 2.400$$

Para cumplir la igualdad, se tiene que  $\rho$  debería valer  $\rho = 1.470.331 \text{ Kg/m}^3$ ; como esto es imposible, se concluye que la hipótesis es acertada. En concreto, para una densidad de  $800 \text{ Kg/m}^3$ , se obtiene  $\text{Re} = 1,3$ .

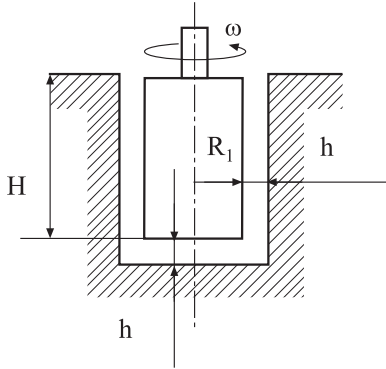
## Problema 2

### Enunciado

Halle la potencia necesaria para mantener una velocidad angular constante de  $10 \text{ rad/s}$  en el viscosímetro cilíndrico de la figura. (Considérense los esfuerzos cortantes, en la superficie lateral y en la base.)



Fig. 2.1



Datos:

$$H = 10 \text{ cm}$$

$$R_1 = 3 \text{ cm}$$

$$h = 0,1 \text{ cm}$$

$$\mu = 7 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$$

### Resolución

En la cara lateral se tiene:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_1 - 0}{h} = \frac{R_1 \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par laterales,  $F_L$  y  $M_L$ , se obtienen:

$$F_L = \tau \cdot dS = \mu \cdot \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi R_1 \cdot H = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^2$$

$$M_L = F \cdot R_1 = \mu \frac{R_1 \omega}{h} \cdot 2\pi R_1 \cdot H R_1 = \mu \frac{\omega}{h} 2\pi H \cdot R_1^3$$

El valor de la potencia necesaria para vencer los esfuerzos cortantes laterales será:

$$N_L = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2}{h} \cdot 2\pi H \cdot R_1^3$$

En la base del cilindro, se tiene:

$$\frac{du}{dy} = \frac{V_i}{h} = \frac{r_i \omega}{h}$$

Los valores de la fuerza y el par en la base,  $F_B$  y  $M_B$ , serán:

$$F_B = \int_S \tau dS = \int_0^R \mu \frac{r_i \omega}{h} 2\pi r_i dr_i = \mu \frac{2\pi}{h} \omega \left[ \frac{r_i^3}{3} \right]_0^R$$



$$F_B = \mu 2\pi \frac{\omega R^3}{h}$$

$$M_B = \int dF_B \cdot R_i = \mu \frac{\omega 2\pi}{h} \int_0^R r_i^3 \cdot dr_i = \mu \frac{\omega 2\pi}{h} \left[ \frac{R_i^4}{4} \right]_0^R$$

$$M_B = \mu \frac{\omega 2\pi R^4}{h}$$

La potencia debida a los esfuerzos cortantes en la base,  $N_B$ , será:

$$N_B = M \cdot \omega = \mu \frac{\omega^2 2\pi R^4}{h}$$

con lo que la potencia total necesaria para hacer girar el cilindro será:

$$N_T = N_L + N_B = \mu \frac{\omega^2 2\pi}{h} \left[ H R_l^3 + \frac{R_l^4}{4} \right] = 7 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^2}{0,001} \cdot 2\pi \left( 0,1 \cdot 0,03^3 + \frac{0,03^4}{4} \right)$$

$$N_T = 0,0127 \text{ [W]}$$

### Problema 3

#### Enunciado

Halle la expresión del par necesario para mover la esfera de la figura adjunta.

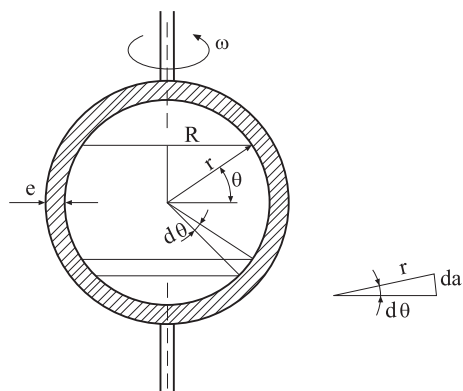


Fig. 3.1

#### Resolución

Las tensiones cortantes existentes se pueden definir como:



$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n} = \mu \frac{\omega R}{e} = \frac{\mu \omega r \cos \theta}{e} ;$$

Estudiando la esfera, se observa que la fuerza que se opone al movimiento se da como:

$$\begin{aligned} dF &= \tau dS = \frac{\mu \omega r \cos \theta}{e} 2\pi R da = \frac{\mu \omega r \cos \theta}{e} 2\pi r \cos \theta r d\theta = \\ &= \frac{\mu \omega r^3}{e} 2\pi \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

Así mismo, el momento resistente resultante valdrá:

$$dM = dF R_i = dF r \cos \theta$$

$$dM = \frac{\mu \omega r^3}{e} 2\pi \cos^2 \theta d\theta r \cos \theta$$

$$M = \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \frac{\mu \omega r^4}{e} 2\pi \cos^3 \theta d\theta$$

con lo cual, la potencia necesaria para hacer girar la esfera sería:

$$N = M \omega = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \int_{-90^\circ}^{90^\circ} \cos^3 \theta d\theta$$

y quedaría:

$$N = M \omega = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \left[ \left[ \frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin \theta \right]_{-90}^{90} + \left[ \frac{2}{3} \int_{-90}^{90} \cos \theta d\theta \right] \right]$$

$$N = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} 2\pi \left[ \left[ \frac{1}{3} \cos^2 \theta \sin \theta \right]_{-90}^{90} + \left[ \frac{2}{3} \sin \theta \right]_{-90}^{90} \right]$$

$$N = \mu \omega^2 \frac{r^4}{e} \frac{8}{3} \pi$$

## Problema 4

### Enunciado

Se hace rotar un cuerpo cónico con una velocidad constante de 10 rad/s; la base del cono tiene un diámetro de 5 cm, y el espesor de la película de aceite es de 0,1 mm. Si la





viscosidad del aceite es de  $7 \cdot 10^{-3} \text{ [N}\cdot\text{S/m}^2\text{]}$ , halle el par necesario para mantener el movimiento.

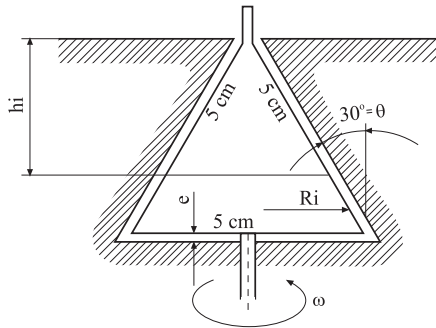


Fig. 4.1  
Esquema del  
cuerpo cónico

### Resolución

Se divide la superficie del cono en dos partes: por un lado, la superficie lateral y, por otro lado, la base.

En la superficie lateral, el esfuerzo cortante en un punto genérico vale:

$$\tau_i = \mu \frac{dv_i}{dn} = \mu \frac{R_i \omega}{e} = \mu \frac{h_i \operatorname{tg} \theta \omega}{e} ;$$

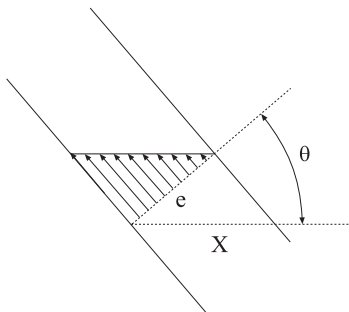


Fig. 4.2

En la base:

$$\tau_i = \mu \frac{dv_i}{dn} = \mu \frac{R_i \omega}{e} ;$$

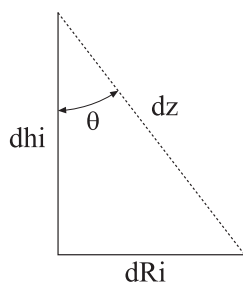


Fig. 4.3



La fuerza que se opone al movimiento en la superficie lateral:

$$dF = \tau dS = \tau 2\pi R_i dz \quad \cos\theta = \frac{dh}{dz};$$

$$dF = \tau 2\pi R_i \frac{dh}{\cos\theta} = \tau 2\pi h_i \operatorname{tg}\theta \frac{dh}{\cos\theta}$$

$$dF = \mu h_i^2 \operatorname{tg}^2\theta \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{dh}{\cos\theta}$$

$$F = \int_0^h \mu \frac{\omega}{e} \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\cos\theta} 2\pi h_i^2 dh = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\cos\theta} \frac{h_i^3}{3}$$

La fuerza en la base será:

$$dF = \tau dS = \tau 2\pi R_i dR$$

$$dF = \mu \frac{\omega}{e} R_i^2 2\pi dR$$

$$F = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e} 2\pi R_i^2 dR = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^3}{3}$$

El par necesario en la superficie lateral:

$$M = F \times R_i$$

$$dM = dF \times R_i$$

$$dM = \mu \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi h_i^2 dh R_i \quad R_i = h_i \operatorname{tg}\theta$$

$$M_L = \int_0^h \mu \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi h_i^3 dh = \mu \frac{\operatorname{tg}^3\theta}{\cos\theta} \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{h^4}{4}$$

El par en la base:

$$dM = dF R_i = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi R_i^2 dR R_i$$

$$M_b = \int_0^R \mu \frac{\omega}{e} 2\pi R_i^3 dR = \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4}$$

El par total necesario para mantener el movimiento será:

$$M_T = M_L + M_b$$



$$M_T = \mu \frac{\text{tg}^3 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{h^4}{4} + \mu \frac{\omega}{e} 2\pi \frac{R^4}{4} = \mu \frac{\omega}{e} \frac{2\pi}{4} \left[ \frac{\text{tg}^3 \theta}{\cos \theta} h^4 + R^4 \right]$$

Sustituyendo el radio por su equivalente:

$$M_T = \mu \frac{\omega}{e} \frac{\pi}{2} h^4 \text{tg}^3 \theta \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \text{tg} \theta \right]$$

La potencia necesaria para mantener el sistema en movimiento será:

$$N = M_T \omega = \mu \frac{\omega^2}{e} \frac{\pi}{2} h^4 \text{tg}^3 \theta \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \text{tg} \theta \right]$$

→2



# Cinemática de fluidos

## 2.1 Concepto de derivada sustancial, material o total

Sea  $\phi$  una propiedad intensiva cualquiera (densidad, temperatura, etc.). Si se sigue a una partícula de fluido en su movimiento, la magnitud  $\phi$  asociada a la partícula fluida varía no solo porque el tiempo  $t$  cambia, sino también porque la posición  $\vec{x}$  de la partícula es asimismo modificada. Si se calcula su variación con el tiempo respecto a un observador que se mueva con el fluido, se obtiene la denominada *derivada sustancial*. Desarrollando en serie la variación de la propiedad genérica, se tiene:

$$\delta\phi = \phi(\vec{x} + \delta\vec{x}; t + \delta t) - \phi(\vec{x}; t) \approx \delta\vec{x} \nabla\phi + \frac{\partial\phi}{\partial t} \delta t + \dots$$

Dividiendo por el diferencial de tiempo y despreciando los términos asociados a las derivadas de orden superior, se tiene:

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\delta\vec{x}}{\delta t} \nabla\phi$$

en el límite, se establece:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{v} \nabla\phi$$

siendo  $\frac{D\phi}{Dt}$  la derivada sustancial de la propiedad  $\phi$  asociada a la partícula de fluido.

El término  $\frac{\partial\phi}{\partial t}$  recibe el nombre de *derivada local*, y el término  $\vec{v} \nabla\phi$  es la *derivada convectiva*.



En Mecánica de Fluidos, la aceleración que experimenta una partícula se define como la derivada material de la velocidad de la partícula, y se define:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v}$$

Que es la suma de una aceleración local y una convectiva.

En coordenadas cartesianas y notación de subíndices, se puede representar como.

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Para extender su validez a otros sistemas coordenados rectangulares, se ha de sustituir el término  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  por su equivalente  $\nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v})$ .

Si el sistema de referencia no es inicial, para obtener la aceleración absoluta se ha de añadir, a la aceleración relativa, la aceleración debida al movimiento del sistema de referencia:

$$-\vec{a}_r = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$$

↓

↓

↓

↓

1

2

3

4

1. Aceleración de arrastre
2. Aceleración tangencial
3. Aceleración centrípeta
4. Aceleración de Coriolis

$\vec{a}_0$  = Aceleración lineal con que se mueve el origen del sistema de coordenadas móvil con respecto al fijo.

$\vec{\Omega}$  = Velocidad angular con que gira el sistema de coordenadas móvil.

## 2.2 Concepto de flujo convectivo a través de una superficie

Considérese una superficie fija a un sistema de referencia y un pequeño elemento de superficie sobre ella de área  $ds$ . Las partículas fluidas capaces de alcanzar la superficie  $ds$  en un tiempo  $dt$  son aquellas que se encuentran a una distancia igual o inferior a  $\vec{v} dt$ . De entre todas ellas, solo alcanzan  $ds$  las que tengan la orientación apropiada  $\vec{v} d\vec{s} dt$ . La cantidad de “magnitud”  $\phi$  que atraviesa con el fluido dicha superficie en la unidad de tiempo será  $\phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds$ .

El flujo total a través de toda la superficie fija será  $\int_{\text{sup}} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} ds$ , de donde  $\phi \vec{v} \cdot \vec{n}$  es el flujo que atraviesa la unidad de superficie de orientación  $\vec{n}$ .



- Si  $\phi$  es un escalar,  $\phi \vec{v}$  es un vector denominado vector flujo de la propiedad  $\phi$  (si  $\phi$  es, por ejemplo, la densidad  $\rho$ , la cantidad  $\rho \vec{v}$  es el vector flujo másico).
- Si  $\phi$  es un vector,  $\phi \vec{v}$  es un tensor denominado tensor flujo de la magnitud  $\phi$  (si  $\phi$  es la cantidad de movimiento  $\rho \vec{v}$ , la cantidad  $\rho \vec{v} \vec{v}$  será el flujo de cantidad de movimiento).

Si la superficie es cerrada y el término  $\phi \vec{v}$  es una función continua tanto en el interior como en la superficie (no existen fuentes, ni sumideros), el teorema de Gauss-Ostrogradsky permite escribir el flujo como una integral de volumen.

$\oint_S \phi \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_V \nabla \cdot (\phi \vec{v}) \, dV$ , donde  $\nabla \cdot (\phi \vec{v})$  es el flujo de la magnitud  $\phi$  por unidad de volumen.

El concepto de flujo volumétrico sería  $Q = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \int_V \text{div } \vec{v} \, dV$

Siendo el flujo másico,  $\dot{m} = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \, dV$

## 2.3 Concepto de Circulación

La circulación a lo largo de una línea de corriente  $L$  se define como el valor de la integral  $\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ , que equivale al trabajo desarrollado por el vector velocidad  $\vec{v}$  a lo largo de la línea  $L$ . Si la línea  $L$  es cerrada, el teorema de Stokes afirma que la circulación es igual al flujo del vector vorticidad  $\nabla \wedge \vec{v}$  a través de la superficie delimitada por la línea  $L$ .

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Si la circulación a lo largo de cualquier línea cerrada es nula, el vector vorticidad  $\nabla \wedge \vec{v}$  es cero en todo el campo fluido,  $\Gamma = 0 \Rightarrow \nabla \wedge \vec{v} = 0$ ; estos movimientos se denominan *irrotacionales o potenciales*, puesto que  $\nabla \wedge \vec{v} = 0$ , lo cual implica que la velocidad deriva de un potencial  $\vec{v} = \nabla \varphi$ .

El recíproco, en general, no es cierto, aunque  $\nabla \wedge \vec{v} = 0$  en todo el campo fluido, puede que existan líneas cerradas en las que  $\Gamma \neq 0$ . Este sería el caso correspondiente a un campo fluido que no fuese simplemente conexo.

## 2.4 Líneas de corriente, trayectoria y traza

Dado un campo vectorial de velocidades que caracteriza un fluido en movimiento, se puede definir la evolución espacial de las partículas de fluido sabiendo que en el instante inicial se encuentran en una posición dada. Para ello, se utilizarán los conceptos de líneas de corriente, trayectorias o sendas, y líneas de traza.



La *línea de senda* o *trayectoria* se define como el camino seguido realmente por una partícula fluida, conocida la posición de la partícula para un tiempo inicial.

La *línea de traza* sería el lugar geométrico de las partículas que en instantes sucesivos pasaron por un punto dado. Sería la obtenida si se inyectase colorante en un punto dado del fluido.

La *línea de corriente*, es aquella que en un instante dado es tangente a los vectores velocidad en todo punto. La línea de corriente tiene un profundo sustrato matemático, mientras que las otras dos son más esencialmente experimentales. No obstante, estas tres líneas están caracterizadas por sendas ecuaciones diferenciales y, como se verá seguidamente, cada una de las ecuaciones diferenciales puede ser definida para los diferentes sistemas de coordenadas existentes.

Se define como línea fluida, al conjunto de partículas fluidas que en un instante dado forman una línea. La línea fluida no dispone de ecuación diferencial característica.

La línea de corriente y la fluida están definidas para un instante dado, mientras que la senda y la línea de traza se forman con el transcurso del tiempo.

Si el campo vectorial de velocidades, que define el fluido en movimiento, caracteriza un fluido en régimen permanente, entonces las líneas de corriente trayectoria y traza, coinciden.

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan cada una de estas tres líneas principales son:

### 2.4.1 Líneas de Senda o Trayectoria

Las Sendas o trayectorias, vienen dadas en función del campo de velocidades mediante el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t)$$

Donde se cumple que, para  $t = 0$ ;  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ , es decir, para el tiempo inicial se conoce la posición de la partícula.

Desglosando la ecuación anterior para los diversos sistemas coordenados, se obtiene la ecuación diferencial de la trayectoria, donde para un sistema de referencia cartesiano.

$$\vec{x} = (x, y, z); \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x(\vec{x}, t); \quad \frac{dy}{dt} = v_y(\vec{x}, t); \quad \frac{dz}{dt} = v_z(\vec{x}, t)$$

En coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$\vec{x} = (r, \theta, z); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r(\vec{x}, t); \quad r \frac{d\theta}{dt} = v_\theta(\vec{x}, t); \quad \frac{dz}{dt} = v_z(\vec{x}, t)$$



En coordenadas esféricas:

$$\vec{x} = (r, \theta, \phi); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$$

$$\frac{dr}{dt} = v_r(\vec{x}, t); \quad r \sin\phi \frac{d\theta}{dt} = v_\theta(\vec{x}, t); \quad r \frac{d\phi}{dt} = v_\phi(\vec{x}, t)$$

Las condiciones de contorno para la resolución de las ecuaciones diferenciales se resumen en que en el estado inicial la posición de la partícula es conocida:

Coordenadas cartesianas:  $t = 0; x = x_0; y = y_0; z = z_0$

Coordenadas cilíndricas:  $t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; z = z_0$

Coordenadas esféricas:  $t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0$

Estas expresiones representan en forma paramétrica, la senda o curva descrita por una partícula en su movimiento alrededor de su posición inicial.

### 2.4.2 Líneas de Trazas

Mediante las líneas de traza, se estudia el colectivo de partículas que pasan por un punto dado en tiempos sucesivos,  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}_0, t_0, t)$ . Las ecuaciones diferenciales definitorias de las líneas de traza son las mismas que las que caracterizan las sendas o trayectorias; la diferencia reside en las condiciones de contorno, que ahora, para los diferentes sistemas coordenados, tomarán la forma:

Coordenadas cartesianas:  $t = \varepsilon; x = x_0; y = y_0; z = z_0$

Coordenadas cilíndricas:  $t = \varepsilon; r = r_0; \theta = \theta_0; z = z_0$

Coordenadas esféricas:  $t = \varepsilon; r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0$

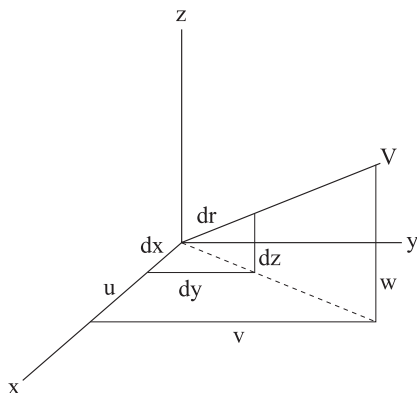
Obsérvese que las condiciones de contorno utilizadas para el cálculo de las líneas de traza indican que es necesario calcular la ecuación de todas las trayectorias que pasan por el punto de referencia  $(x_0, y_0, z_0)$  en diferentes instantes  $t_0 = \varepsilon$  y eliminar  $t_0$  de las ecuaciones resultantes.

### 2.4.3 Líneas de Corriente

Para la determinación de las líneas de corriente, se estudia el colectivo de partículas que en un instante dado son tangentes en cada punto al vector velocidad. Para determinar la ecuación diferencial de las líneas de corriente en coordenadas cartesianas, se utiliza la siguiente relación geométrica, ver figura T 2.1.



Fig. T 2.1  
Relación  
geométrica  
utilizada para la  
determinación  
de la ecuación  
diferencial de  
las líneas de  
corriente



El sistema de ecuaciones que las definen se obtienen estableciendo la proporcionalidad entre el vector tangente y el vector velocidad. Para los diversos sistemas coordenados, se tiene:

Coordenadas cartesianas:

$$\vec{x} = (x, y, z); \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\frac{dx}{v_x(\vec{x}, t)} = \frac{dy}{v_y(\vec{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{x}, t)}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\vec{x} = (r, \theta, z); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$$

$$\frac{dr}{v_r(\vec{x}, t)} = \frac{r d\theta}{v_\theta(\vec{x}, t)} = \frac{dz}{v_z(\vec{x}, t)}$$

Coordenadas esféricas:

$$\vec{x} = (r, \theta, \phi); \quad \vec{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$$

$$\frac{dr}{v_r(\vec{x}, t)} = \frac{r \sin\theta d\theta}{v_\theta(\vec{x}, t)} = \frac{r d\phi}{v_\phi(\vec{x}, t)}$$

Las condiciones de contorno necesarias para la resolución de las ecuaciones diferenciales son las mismas que las utilizadas para determinar las trayectorias, es decir:

Coordenadas cartesianas:  $t = 0; x = x_0; y = y_0; z = z_0$

Coordenadas cilíndricas:  $t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; z = z_0$

Coordenadas esféricas:  $t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0$

Con el fin de facilitar la integración en algunos casos complejos, es conveniente utilizar las ecuaciones diferenciales de las líneas de corriente en forma paramétrica. Sea  $S$  el parámetro elegido. Recuerdese que la ecuación resultante no puede depender del parámetro  $S$ , con lo que ha de ser extraído.



En coordenadas cartesianas, la ecuación de las líneas de corriente en forma paramétrica se establece:

$$\frac{dx}{dS} = v_x(\bar{x}, t); \quad \frac{dy}{dS} = v_y(\bar{x}, t); \quad \frac{dz}{dS} = v_z(\bar{x}, t)$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{dr}{dS} = v_r(\bar{x}, t); \quad \frac{r d\theta}{dS} = v_\theta(\bar{x}, t); \quad \frac{dz}{dS} = v_z(\bar{x}, t)$$

En coordenadas esféricas:

$$\frac{dr}{dS} = v_r(\bar{x}, t); \quad \frac{r \sin\phi d\theta}{dS} = v_\theta(\bar{x}, t); \quad \frac{r d\phi}{dS} = v_\phi(\bar{x}, t)$$

Las condiciones de contorno para la resolución de este segundo grupo de ecuaciones diferenciales para las líneas de corriente son:

$$t = 0; x = x_0; y = y_0; z = z_0; S = 0$$

$$t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; z = z_0; S = 0$$

$$t = 0; r = r_0; \theta = \theta_0; \phi = \phi_0; S = 0$$

En movimientos estacionarios, las líneas de corriente coinciden con las sendas y las trazas.

Si se toma una línea en el espacio, las líneas de corriente que se apoyan en ella forman una *superficie de corriente*; si la línea de partículas es cerrada la superficie de corriente se denomina *tubo de corriente*.

#### 2.4.4 Concepto de línea fluida

Si una serie de partículas forman inicialmente una línea, este conjunto de partículas seguirá formando, por continuidad, una línea que se denomina *línea fluida*. Si la línea primitiva es cerrada, se mantiene posteriormente cerrada.

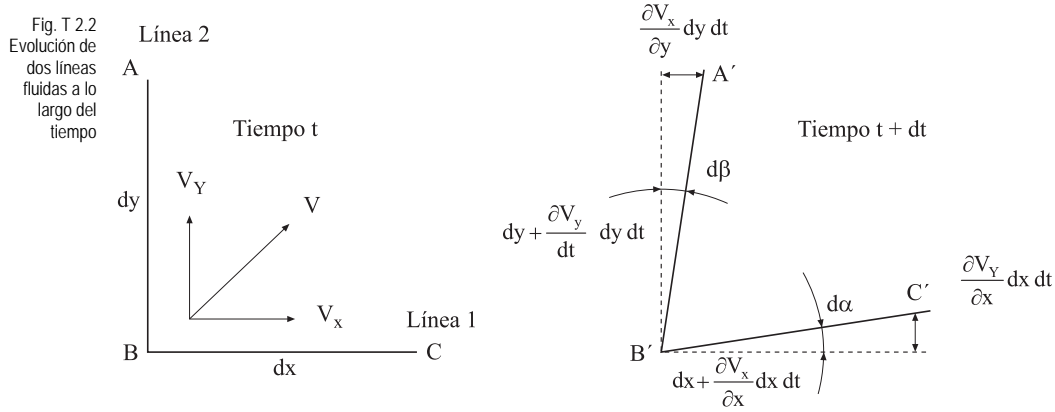
Si se denomina  $\bar{x}_0 = \bar{x}_0(\lambda)$  a la ecuación paramétrica de una línea fluida en el instante inicial, la ecuación de dicha línea en el instante  $t$  será  $\bar{x} = \bar{x}_T(\bar{x}_0(\lambda), t)$ .

### 2.5 Concepto de vorticidad e irrotacionalidad

Un flujo se denomina *irrotacional*, cuando la velocidad angular con respecto a todo eje coordenado es nula. La figura siguiente muestra dos líneas fluidas de longitudes infinitesimales, las cuales, para un tiempo dado  $t$ , forman un ángulo de 90 grados; al cabo de un diferencial de tiempo, se observa que las dos líneas fluidas, han girado un



diferencial de ángulo con respecto a su posición inicial, con lo que se pueden obtener las relaciones diferenciales que se muestran en la figura T 2.2 para la deformación de un elemento de fluido.



Partiendo de las relaciones establecidas en la figura, se quiere estudiar la velocidad angular y la velocidad de deformación de dos líneas fluidas que se deforman en el plano XY. Se observa que las dos líneas fluidas  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  perpendiculares en el instante t se mueven y deforman de modo que, en el instante  $t + dt$ , tienen diferentes longitudes  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{B'C'}$  y el ángulo que forman difiere de  $90^\circ$  en los ángulos  $d\alpha$  y  $d\beta$ ; esta deformación aparece de un modo cinemático, puesto que los puntos A, B, C tienen velocidades diferentes cuando el campo de velocidades  $\vec{V}$  no es espacialmente uniforme.

Se define la velocidad angular  $\omega_z$  alrededor del eje z perpendicular al plano del papel como el valor medio del giro, en la unidad de tiempo, de las dos líneas fluidas; el sentido contrario a las agujas del reloj se tomará como positivo.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right)$$

Como  $d\alpha$  y  $d\beta$  están directamente relacionados (para “dt” pequeños) con las derivadas de la velocidad, se puede establecer:

$$d\alpha = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \arctg \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$d\beta = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \arctg \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy dt}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$



Combinando las tres ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Operando de forma análoga, para los planos YZ y XZ, se obtendrá la velocidad angular promedio con respecto a los ejes X e Y, siendo su valor:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) ; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

El vector  $\omega = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z$  se define como la mitad del rotacional de la velocidad, de donde:

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Con el fin de obviar el  $\frac{1}{2}$ ; se trabaja a menudo con el vector doble, denominado *vorticidad*.  $\xi = 2\omega = \text{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v}$

Se denominan *flujos irrotacionales* los que tienen vorticidad nula:  $\text{rot} \vec{v} \equiv 0$  ;  $\xi = 0$

La velocidad de deformación del elemento formado por las dos líneas fluidas se define como el ritmo al cual se separan las líneas del ángulo inicialmente recto, y se expresa como:

$$\epsilon_{xy} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

La velocidad de deformación angular promedio se define como  $\phi_{xy} = \frac{1}{2} \epsilon_{xy}$ , con lo que

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Para el caso genérico de flujo tridimensional, aparecerán nueve velocidades de deformación promedio, que son:

$$\phi_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \phi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \phi_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right);$$

$$\phi_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \phi_{yy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \phi_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right);$$



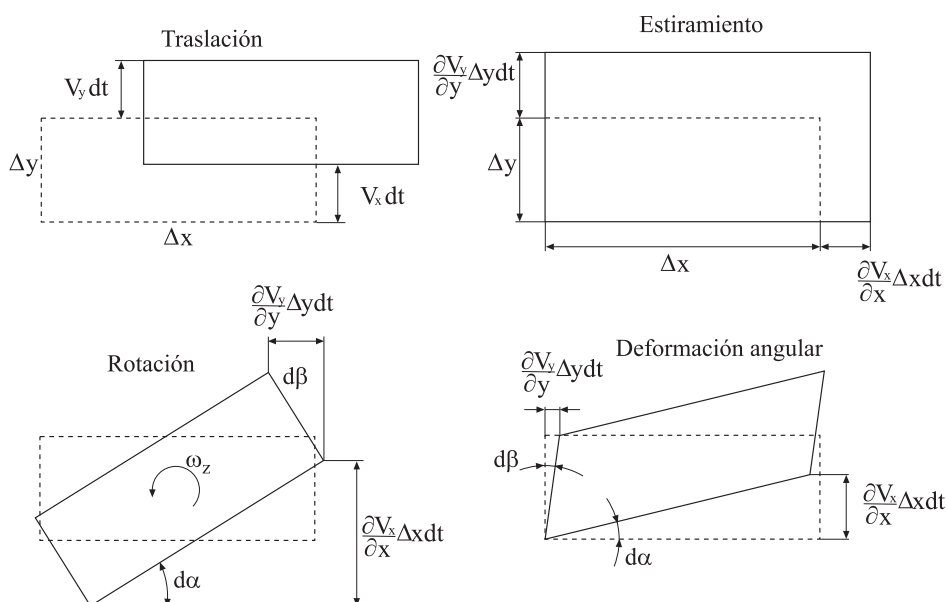
$$\phi_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad \phi_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \phi_{zz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial w}{\partial z};$$

Los esfuerzos viscosos en una dirección genérica  $ij$  se obtendrán al multiplicar por la viscosidad las velocidades de deformación en la dirección  $ij$   $\tau_{ij} = \mu \epsilon_{ij} = 2 \mu \phi_{ij}$

## 2.6 Estudio cinemático del movimiento de una partícula

Para realizar el estudio cinemático del movimiento de una partícula de fluido, se ha de considerar la superposición de cuatro movimientos independientes.

Fig. T 2.3  
Los cuatro  
movimientos  
independientes  
para el estudio  
cinemático de  
una partícula  
de fluido



Los cuatro movimientos independientes están definidos por los siguientes parámetros:

-Traslación. Dado por el vector velocidad o aceleración.  $\vec{V}$ ;  $\vec{a}$ ;  $\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$

-Rotación. Definido por la velocidad angular  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} (\nabla \wedge \vec{V})$

-Estiramiento (deformación lineal). Definido por  $\frac{1}{\delta V} \frac{d(\delta V)}{dt} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

-Deformación angular. Definido por la velocidad de deformación angular promedio.  $\phi_{ij}$ ;

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$



Puesto que los conceptos de aceleración, velocidad angular y velocidad de deformación angular han sido ya definidos, a continuación se aclarará el concepto de deformación lineal.

Sea un volumen de fluido genérico  $\forall$ , sea  $ds$  un elemento diferencial de superficie sobre este volumen, el elemento diferencial de superficie es atravesado por un fluido a una velocidad  $V$ . Al cabo de un diferencial de tiempo  $dt$  el cambio de volumen del volumen de control debido al flujo que atraviesa el diferencial de superficie será:

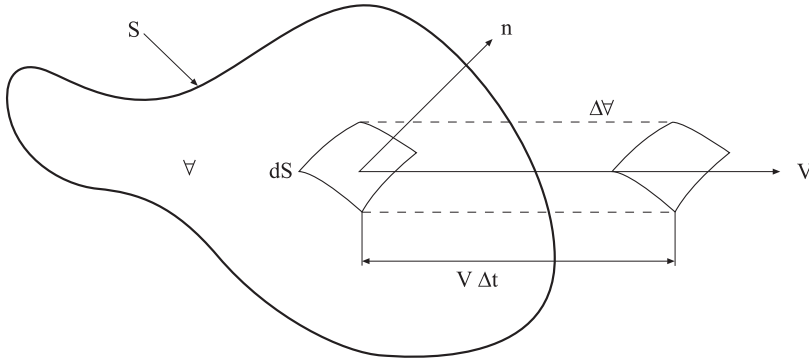


Fig. T 2.4  
Volumen de  
fluido elemental

$(\Delta \forall) = (\vec{V} dt) d\vec{s}$ , por otro lado, el cambio de volumen en todo el volumen elemental, será la suma de todos los volúmenes elementales asociados a cada diferencial de superficie. Dividiendo por el diferencial de tiempo se obtendrá la variación temporal del cambio de volumen:

$$\frac{d\forall}{dt} = \oint_s \vec{V} d\vec{s}$$

Suponiendo que el volumen elemental se reduce a un punto, es decir, es un diferencial de volumen, y aplicando el teorema de la divergencia, se obtiene:

$$\frac{d(\delta \forall)}{dt} = \oint_s \vec{V} d\vec{s} = \int_{\forall} \nabla \cdot \vec{V} d(\delta \forall) = \int_{\forall} \text{div } \vec{V} d(\delta \forall)$$

Asumiendo un volumen de fluido infinitesimal  $\delta \forall$  en el que la divergencia de la velocidad se mantiene constante a lo largo de todo el volumen elemental, se tiene:

$$\frac{d(\delta \forall)}{dt} = \int_{\forall} \text{div } \vec{V} d(\delta \forall) = \text{div } \vec{V} \delta \forall$$

de donde se obtiene:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\delta \forall} \frac{d(\delta \forall)}{dt}$$

Como conclusión, se observa que el estiramiento producido en una partícula o volumen elemental se define como la divergencia de la velocidad.



El estudio cinemático del movimiento de una partícula está definido por el tensor gradiente de velocidad  $\bar{\bar{G}}_v$ , que se descompone en un tensor simétrico denominado *tensor de deformación* y un tensor antisimétrico o *tensor de vorticidad*.

$$\bar{\bar{G}}_v = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

$\phi_{ij}$  = Tensor de deformación. Tensor de velocidades de deformación.

$\Omega_{ij}$  = Tensor de vorticidad.

$$\bar{\bar{G}}_v = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{ij} + \mathbf{T}_{ji}) + \frac{1}{2}(\mathbf{T}_{ij} - \mathbf{T}_{ji}) = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

$$\bar{\bar{G}}_v = \frac{\partial v_i}{\partial r_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} - \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right) = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

De forma explícita, el tensor gradiente de velocidad y los tensores de deformación y vorticidad para coordenadas cartesianas se establecen.

$$\bar{\bar{G}}_v = \left\| \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial r_j} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 0 \end{vmatrix} = \phi_{ij} + \Omega_{ij}$$

Obsérvese que la diagonal principal del tensor de deformación define el estiramiento de la partícula dado por la divergencia del vector velocidad.

Así, por ejemplo,  $\frac{\partial u}{\partial x}$  representa la velocidad con que se dilata proporcionalmente a su longitud un elemento de línea fluida (en este caso en la dirección x).

Los elementos fuera de la diagonal principal del tensor de deformación representan la mitad de la velocidad con que disminuye el ángulo recto que inicialmente forman las dos líneas fluidas.





## Problema 5

### Enunciado

Sea un volumen de agua de  $1 \text{ m}^3$ , sometido inicialmente a una presión de  $10^5 \text{ Pa}$  y a una temperatura de  $280 \text{ K}$ . Si el proceso evoluciona de forma que al cabo de un tiempo  $T$  la temperatura y la presión del fluido son de  $300 \text{ K}$  y  $3 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , determine el volumen que ocupará el líquido en estas condiciones.

Datos:

$$\alpha_T = 1,53 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \text{ (coeficiente de expansión térmica)}$$

$$\beta = 1,96 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ (módulo de compresibilidad volumétrica)}$$

### Resolución

La definición del módulo de compresibilidad y del coeficiente de expansión térmica es:

$$\beta = -\forall \frac{dp}{d\forall}$$

$$\alpha_T = \frac{1}{\forall} \frac{d\forall}{dT}$$

La variación de volumen con la presión y la temperatura se define:

$$d\forall = \frac{\partial \forall}{\partial p} dp + \frac{\partial \forall}{\partial T} dT$$

de donde:

$$d\forall = -\frac{\forall}{\beta} dp + \alpha \forall dT$$

Integrando:

$$\int_{\forall_{\text{inicial}}}^{\forall_{\text{final}}} \frac{d\forall}{\forall} = \int_{p_{\text{inicial}}}^{p_{\text{final}}} -\frac{dp}{\beta} + \int_{T_{\text{inicial}}}^{T_{\text{final}}} \alpha dT$$

$$\ln \left( \frac{\forall_{\text{final}}}{\forall_{\text{inicial}}} \right) = -\frac{1}{\beta} (p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}}) + \alpha (T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}})$$

$$\ln \forall_{\text{final}} = \ln \forall_{\text{inicial}} - \frac{1}{\beta} (p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}}) + \alpha (T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}})$$



$$\nabla_{\text{final}} = \nabla_{\text{inicial}} e^{\frac{1}{\beta}(p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}})} e^{\alpha(T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}})}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$\nabla_{\text{final}} = \nabla_{\text{inicial}} 1,002961$$

El volumen del fluido al final será ligeramente mayor que el inicial.

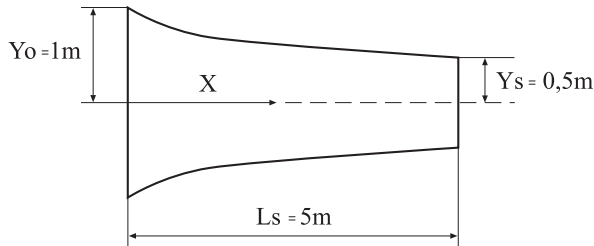
## Problema 6

### Enunciado

Dados un fluido de densidad constante que fluye en un canal convergente con una altura media de  $Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \left(\frac{x}{L}\right)\right)}$  y una velocidad en dirección  $x$  de

$$u = u_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^2\right], \text{ siendo } u_0 = 1 \text{ m/s}$$

Fig. 6.1



Calcule:

La velocidad transversal,  $v(x, y)$ .

La aceleración lineal, la velocidad angular, la vorticidad, la velocidad de deformación volumétrica y la velocidad de deformación angular para dicho fluido.

### Resolución

Para un fluido incompresible y flujo bidimensional, la ecuación de continuidad puede expresarse:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x};$$

En función de los datos del enunciado, la velocidad en dirección  $x$  se puede dar:

$$u = u_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \left[1 - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^2\right] = u_0 \left[\left(1 + \frac{x}{L}\right) - \frac{y^2}{Y_0^2} \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3\right]$$



derivando respecto a  $x$  se obtiene:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_0}{L} \left[ 1 - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right];$$

con lo cual la velocidad en dirección  $y$  será:

$$v = -\int \frac{u_0}{L} \left[ 1 - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right] dy = \int -\frac{u_0}{L} dy + \int \frac{u_0 3y^2}{LY_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 dy$$

$$v = -\frac{u_0 y}{L} + \frac{u_0 y^3}{LY_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 + C(x);$$

Condiciones de contorno:  $v = 0$ ; cuando  $y = Y$ ; y para cualquier  $x$ ;

$$0 = -\frac{u_0 Y_0}{L \left( 1 + \frac{x}{L} \right)} + \frac{u_0 Y_0^3}{LY_0^2} \frac{\left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2}{\left( 1 + \frac{x}{L} \right)^3} + C(x)$$

Para cualquier valor de “ $x$ ” comprendido entre  $0 < x < L$  se cumple que  $C(x) = 0$ ;

Por lo tanto:

$$v = -\frac{u_0 y}{L} \left[ 1 - \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Eligiendo el sistema cartesiano de coordenadas, la aceleración en dirección  $x$  e  $y$  será:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

Puesto que se está en régimen permanente:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

Derivando las velocidades  $u$  y  $v$  respecto las direcciones  $x$  e  $y$  se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_0 \left[ \frac{1}{L} - \frac{3y^2}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \frac{1}{L} \right];$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_0 \left[ -\frac{2y}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right];$$



$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_0 \left[ \frac{y^3}{LY_0^2} 2 \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \frac{1}{L} \right];$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = u_0 \left[ \frac{3y^2}{LY_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{L} \right];$$

Sustituyendo en las ecuaciones para la aceleración, se obtiene:

$$a_x = \frac{u_0^2}{L} \left[ \left( 1 + \frac{x}{L} \right) - 2 \left( \frac{y}{Y_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^3 + \left( \frac{y}{Y_0} \right)^4 \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^5 \right]$$

$$a_y = \frac{u_0^2}{L^2} \left[ y - 2 \frac{y^3}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{y}{Y_0^4} \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^4 \right]$$

La velocidad angular se define como:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Obsérvese que:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

Sustituyendo, queda:

$$\omega_z = \frac{yu_0}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ \frac{y^2}{L^2} + \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right];$$

Puesto que la vorticidad se define como el doble de la velocidad angular,  $\xi_z = 2\omega_z$ :

$$\xi_z = 2 \frac{yu_0}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ \frac{y^2}{L^2} + \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 \right];$$

la velocidad de deformación volumétrica está dada en este caso por:

$$\frac{1}{\delta \nabla} \frac{d(\delta \nabla)}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Al sustituir  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , se llega a:

$$\frac{1}{\delta \nabla} \frac{d(\delta \nabla)}{dt} = 0;$$



la velocidad de deformación angular viene dada por:

$$\phi_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

puesto que:

$$\phi_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0; \quad \phi_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0;$$

Sustituyendo, se llega a:

$$\phi_{xy} = \frac{yu_0}{Y_0^2} \left( 1 + \frac{x}{L} \right) \left[ - \left( 1 + \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{y^2}{L^2} \right];$$

Cabe recordar que, aunque matemáticamente se puedan separar, la rotación, la dilatación y la deformación angular, ocurren en el fluido de forma simultánea, y no se pueden separar desde el punto de vista físico.

## Problema 7

### Enunciado

Sea un flujo definido por una distribución de velocidades tal como:

$$u = \frac{x}{1+t}; \quad v = \frac{y}{1+2t}; \quad w = 0$$

Halle la línea de corriente, senda o trayectoria y la línea de traza que en el instante  $t = 0$  pasa por el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .

### Resolución

Puesto que  $w = 0$ , el flujo es bidimensional y, todas las líneas de corriente serán paralelas al plano XY

La determinación de las líneas de corriente se basa en la ecuación:

$$\frac{dx}{ds} = u = \frac{x}{1+t} \qquad \frac{dy}{ds} = v = \frac{y}{1+2t}$$

Integrando para  $t = \text{cte}$ , queda:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{1+t}; \quad \ln x = \frac{s}{1+t} + \text{cte} \quad \xrightarrow{\text{variables}(x,y)} \quad x = c_1 e^{\frac{s}{1+t}}$$

$$y = c_2 e^{\frac{s}{1+2t}}$$



Para calcular las constantes, se impondrá la condición:  $s = 0$ ;  $x = X_0$ ;  $y = Y_0$ , y se obtendrá  $C_1 = x_0$ ;  $C_2 = y_0$ ; Eliminando  $s$ , queda:

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot (1+t) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) \cdot (1+2t)$$

Reagrupando en  $x$  e  $y$ , se obtendrá:

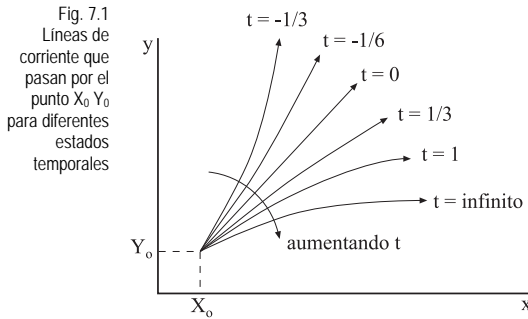
$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1+t}{1+2t} = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right); \quad e^{\left[\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) \cdot \frac{1+t}{1+2t}\right]} = e^{\ln\left(\frac{y}{y_0}\right)}; \quad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}} = \frac{y}{y_0};$$

Se obtiene así la ecuación de las líneas de corriente que pasan por  $(x_0, y_0)$  en cualquier instante  $t$ :

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}}$$

$$\text{Para } t = 0 \longrightarrow \frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0}$$

La línea de corriente será una línea inclinada  $45^\circ$  que pasa por el punto  $(X_0, Y_0)$ , ver figura 7.1:



Las líneas de corriente se pueden determinar también utilizando la ecuación:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Sustituyendo los valores de  $u$  y  $v$  se obtiene:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \cdot \frac{1+2t}{1+t}$$

de donde:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \cdot \frac{1+2t}{1+t}$$



Integrando entre límites, se obtiene:

$$\frac{1+t}{1+2t} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{y}$$

de donde:  $\frac{1+t}{1+2t} \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)$

o bien:  $\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1+t}{1+2t}} = \left(\frac{y}{y_0}\right)$

Véase que se obtiene la misma ecuación que en el apartado anterior.

Las sendas o trayectorias se determinan integrando las ecuaciones A y B

$$(A) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \quad (B) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+2t}$$

Integrando,

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{1+t}; \ln x = \ln(1+t) + k_1; e^{\ln x} = e^{\ln(1+t) + k_1} \longrightarrow x = (1+t) \cdot k'_1 \quad (C)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{1+2t}; \ln y = \frac{1}{2} \ln(1+2t) + k_2; e^{\ln y} = e^{\frac{1}{2} \ln(1+2t) + k_2} \longrightarrow y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot k'_2 \quad (D)$$

Aparecen dos nuevas constantes,  $k'_1$  y  $k'_2$ , que corresponden a  $e^{k_1}$  y  $e^{k_2}$

Aplicando las condiciones de contorno  $t = 0$ ,  $x = X_0$ ,  $y = Y_0$ , queda:

$$X_0 = k'_1; \quad x = (1+t) \cdot X_0$$

$$Y_0 = k'_2; \quad y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot Y_0$$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la senda o trayectoria.

$$y = \left[ 1 + 2 \left( \frac{x}{X_0} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot Y_0$$

Ésta se muestra en la figura 7.2. Véase que no coincide con la ecuación de la línea de corriente en  $t=0$ .

Para hallar la línea de traza, se parte de las ecuaciones integradas de las sendas, ecuaciones C y D, y se calcula la familia de partículas que pasaron por  $(X_0, Y_0)$  en instantes  $\varepsilon < t$ .

Así pues, para  $t = \varepsilon$ ,  $x = X_0$ ,  $y = Y_0$ , se obtiene:

$$x = (1+t) \cdot k'_1; \quad k'_1 = \frac{X_0}{1+\varepsilon} \longrightarrow x = \frac{(1+t)}{1+\varepsilon} X_0 \quad (C)$$



$$y = (1+2t)^{\frac{1}{2}} \cdot k_2; \quad k_2 = \frac{Y_0}{(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow y = \frac{(1+2t)^{\frac{1}{2}}}{(1+2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} Y_0 \quad (D)$$

Estas expresiones corresponden a las líneas de traza que pasan por  $(X_0, Y_0)$  en cualquier instante  $t$ .

Para  $t = \text{cte}$ , se igualan los valores de  $\varepsilon$  de las dos ecuaciones.

$$\varepsilon = \frac{(1+t)}{x} \cdot X_0 - 1 = \left[ (1+2t) \cdot \left( \frac{Y_0}{y} \right)^2 - 1 \right] \frac{1}{2} \longrightarrow (1+t) \frac{X_0}{x} - \frac{1}{2} = \frac{(1+2t)}{2} \left( \frac{Y_0}{y} \right)^2$$

Despejando  $\left( \frac{y}{Y_0} \right)$ , se obtiene:

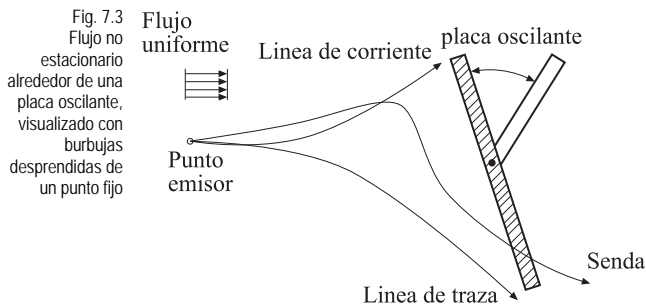
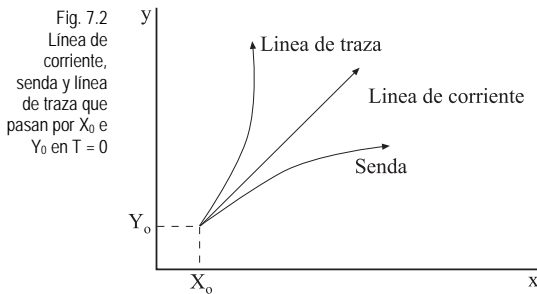
$$\left( \frac{y}{Y_0} \right) = \left[ \frac{(1+2t)}{2(1+t) \frac{X_0}{x} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \text{Para } t=0 \longrightarrow \left( \frac{y}{Y_0} \right) = \left[ \frac{1}{2 \frac{X_0}{x} - 1} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ 2 \frac{X_0}{x} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Línea también representada en la figura 7.2.

Fisicamente, la línea de traza refleja el comportamiento de las líneas de corriente antes del instante  $t = 0$ , mientras que la senda refleja lo que ocurre después.

Una línea de traza se genera experimentalmente por medio de la inyección continua de partículas marcadas (tinta, humo o burbujas) desde un punto fijo.

Como última observación, cabe decir que en caso de flujo estacionario, las líneas de traza, senda y corriente coinciden.



Adaptado del problema 1-14 del libro *Mecánica de Fluidos* del autor Frank M White edición 1988, publicado por McGraw-Hill





## Problema 8

### Enunciado

Sea el movimiento en régimen permanente definido en coordenadas eulerianas y dado por el campo de velocidades:  $\vec{v} = (2x - 3y)\hat{i} + (3x - 2y)\hat{j}$

Se pide:

1. Demuestre que el fluido es incompresible.
2. Determine el campo de aceleración  $\vec{a}$  y el campo de vorticidad ( $\vec{\Omega}$ ).
3. Determine las líneas de corriente e identifique aquella que pasa por el punto  $x = 1$ ;  $y = 1$ ;  $z = 0$ .
4. Determine la ecuación de las líneas de torbellino (vector remolino  $\vec{\omega}$ ).
5. Calcule la circulación del vector velocidad a lo largo de la línea de corriente que pasa por el punto  $x = 1$ ;  $y = 1$ ;  $z = 0$ . Calcule también el flujo de vorticidad  $\vec{\Omega}$  a través de la superficie que tiene por línea frontera aquella línea de corriente.
6. Calcule la velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario  $\vec{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$

### Resolución

1. La ecuación de conservación de la masa en forma diferencial se enuncia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0;$$

Si el fluido es incompresible, se ha de cumplir:  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Sustituyendo:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \text{fluido incompresible}$$

$$2. \quad \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$$

Por ser el movimiento estacionario,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = (2x - 3y)(3x - 2y) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = (2x - 3y)(3x - 2y) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
 &= [(2x - 3y)2 + (3x - 2y)(-3)]\hat{i} + [(2x - 3y)3 + (3x - 2y)(-2)]\hat{j} = \\
 &= [4x - 6y - 9x + 6y]\hat{i} + [6x - 9y - 6x + 4y]\hat{j} = -5x\hat{i} - 5y\hat{j}
 \end{aligned}$$

El campo de vorticidad está definido por  $\vec{\Omega} = \nabla \wedge \vec{V} = \text{rot } \vec{V}$

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x - 3y) & (3x - 2y) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(3x - 2y)\hat{k} - \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3y)\hat{k} = 6\hat{k}$$

El fluido está girando respecto al eje z.

3. Las líneas de corriente se definen por la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} \quad ; \quad \frac{dx}{2x - 3y} = \frac{dy}{3x - 2y} \quad ; \quad dx(3x - 2y) - dy(2x - 3y) = 0$$

Se llega a una ecuación diferencial del tipo:  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

Se debe comprobar si se trata de una diferencial exacta:

Para ello, se ha de cumplir  $\longrightarrow \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \longrightarrow$  Recordando que

$$N(x, y) = -(2x - 3y)$$

Se observa que la ecuación diferencial es exacta, dado que las dos derivadas tienen el mismo valor.

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = -2$$

Puesto que se trata de una diferencial exacta, la solución de la ecuación será del tipo:

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx = \int (3x - 2y)dx = 3\frac{x^2}{2} - 2xy + C(y)$$

y debe cumplirse que  $N(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ ,

con lo cual:  $-(2x - 3y) = -2x + C'(y) \longrightarrow C'(y) = 3y \longrightarrow C(y) = \frac{3y^2}{2} + C_0$

Por tanto la función queda:

$$F(x, y) = \frac{3x^2}{2} - 2xy + \frac{3y^2}{2} + C_0 = 0$$



(Si en lugar de igualarla a 0 se iguala a cualquier otro número, se obtendrán elipses concéntricas.)

Sustituyendo para el punto  $x=1$ ;  $y=1$ ;  $z=0$ , queda:

$$F(x, y) = \frac{3}{2} - 2 + \frac{3}{2} + C_0 = 0 \longrightarrow C_0 = -1$$

En este punto, la función será:

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - 1 = 0$$

Ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto  $(1,1,0)$  y representa la ecuación de una elipse centrada en el origen pero inclinada un ángulo  $\theta$ .

Con el fin de hallar la ecuación de la elipse referida a sus ejes centrales, se debe determinar el ángulo de rotación de la misma.

La expresión de una elipse plana en cualquier punto del eje de coordenadas y girada un ángulo  $\theta$  viene dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El término  $xy$  es el que da la rotación.

Los términos en  $x$  e  $y$  dan el desplazamiento (en este caso, no existe desplazamiento)

El ángulo de giro viene dado por:  $\cotg(2\theta) = \frac{A-C}{B}$

La ecuación hallada es:  $\frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - 1 = 0$ . Y se puede expresar como:

$$3x^2 + 3y^2 - 4xy - 2 = 0 \quad (1)$$

Se deduce que  $A = 3$ ;  $B = -4$ ;  $C = 3$ .

$$\cotg(2\theta) = \frac{3-3}{-4} = 0 \longrightarrow 2\theta = 90^\circ \longrightarrow \theta = 45^\circ$$

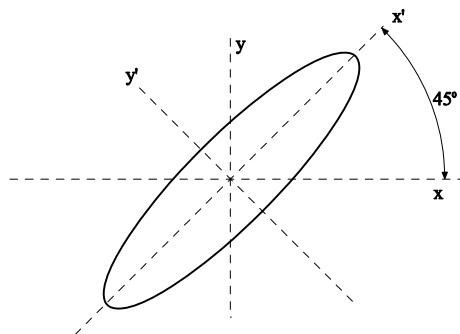


Fig. 8.1  
Inclinación de la  
elipse respecto  
a los ejes  
coordenados



Para transformar la ecuación de la elipse referida a los ejes  $x$  y respecto a los ejes  $x'y'$  se debe realizar el cambio:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta & \Rightarrow & & x &= x'\cos 45^\circ - y'\sin 45^\circ \\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta & & & y &= x'\sin 45^\circ + y'\cos 45^\circ \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 = 0$$

Desarrollando se llega a  $x'^2 + 5y'^2 - 2 = 0$

La ecuación de la elipse respecto a los ejes  $x'$  e  $y'$  será:

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{5}{2}y'^2 - 1 = 0$$

La ecuación genérica de una elipse centrada es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

siendo  $a$  y  $b$  los semiejes principales, que en este caso valdrán:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \\ b &= \sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

4. El vector remolino se define como  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \longrightarrow (\vec{\Omega} = 6\hat{k}) \text{ apartado 2 } \longrightarrow \vec{\omega} = 3\hat{k}$$

5. La circulación del vector velocidad se define como:

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \{i(2x - 3y) + j(3x - 2y)\} \{i \cdot dx + j \cdot dy\}$$

Esta integral hay que realizarla a lo largo de la línea de corriente (que es la elipse); para integrar se deben transformar todos estos parámetros en uno solo e integrar respecto a dicho parámetro.

Consecuentemente, se han de dar los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$  en función de los semiejes principales de la elipse y el ángulo de giro.



Las relaciones de transformación son:

$$\sin\theta = \frac{y}{b}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{a}$$

$$x = a\cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$$

$$y = b\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta$$

$$dx = -a\sin\theta d\theta = -\sqrt{2}\sin\theta d\theta$$

$$dy = b\cos\theta d\theta = \sqrt{\frac{2}{5}}\cos\theta d\theta$$

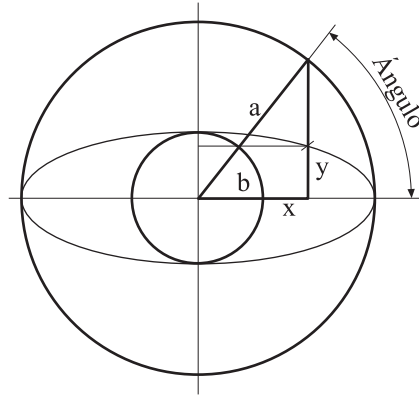


Fig. 8.2  
Relaciones de  
Transformación  
para una elipse

Sustituyendo estos valores en la integral se obtiene como única variable el ángulo  $\theta$ , que se integrará entre 0 y  $2\pi$ ;

$$\begin{aligned}\Gamma &= \oint (2x - 3y)dx + (3x - 2y)dy = \int_0^{2\pi} \left( 2\sqrt{2}\cos\theta - 3\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta \right) (-\sqrt{2}\sin\theta) d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \left( 3\sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta \right) \left( \sqrt{\frac{2}{5}}\cos\theta \right) d\theta\end{aligned}$$

De realizar la integración se obtiene que  $\Gamma = \left( \frac{12\pi}{\sqrt{5}} \right)$

Se observa que este camino elegido es largo. Un método alternativo sería la aplicación del teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}\oint_l \vec{v} \cdot d\vec{l} &= \int_s (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{\Omega} \cdot d\vec{s} = \int_s 6\hat{k} \cdot \hat{n} ds = 6 \int_s d\vec{s} = 6\pi ab \rightarrow \text{área de la elipse} \rightarrow \\ &\rightarrow 6\pi ab = 6\pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{12\pi}{\sqrt{5}} = \Gamma\end{aligned}$$

Obsérvese que el flujo de vorticidad, que se define como  $\int_s (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{s}$  es igual a la circulación del vector velocidad.

6. La velocidad de deformación lineal específica en la dirección del vector unitario

$\vec{r} = i\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}$  se calcula mediante la expresión:

$$\frac{1}{|\vec{d}\vec{r}|} \cdot \frac{d}{dt} |\vec{d}\vec{r}| = e_{ij} \beta_i \beta_j \longrightarrow \begin{aligned} \beta_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \beta_j &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

de donde  $e_{ij}$  valdrá:



$$e_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{|d\vec{r}|} \cdot \frac{d}{dt} |d\vec{r}| = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}(-3+3) & 0 \\ \frac{1}{2}(-3+3) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La velocidad de deformación lineal vendrá dada por  $\sqrt{2} \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j}$ .



→ 3

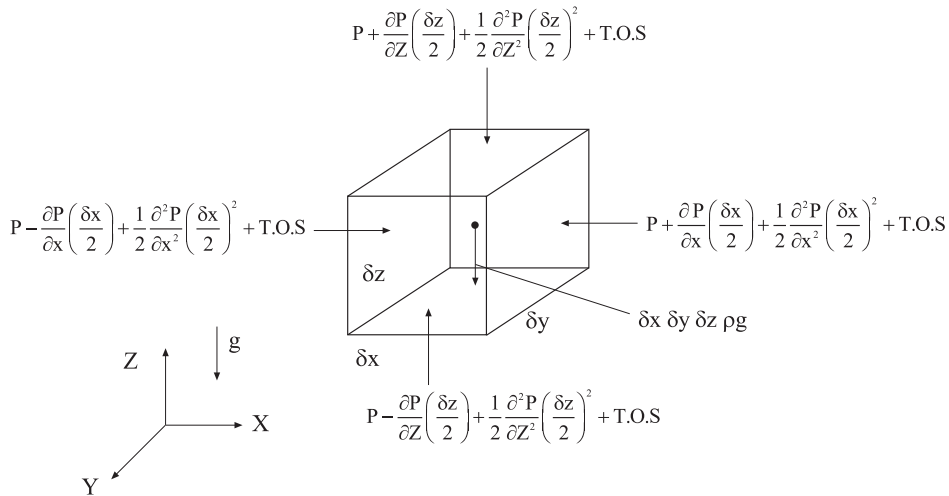




## Estática de fluidos

### 3.1 Ecuación diferencial de la estática de fluidos

Sea un cubo elemental de fluido como el que se muestra en la figura T 3.1, sea  $P$  la presión en el centro del elemento diferencial. A priori, se va a suponer que el fluido no está sometido a ninguna aceleración. La presión en cada una de las caras se define en forma de series de Taylor, siendo T.O.S, los términos de orden superior. (Por simplicidad, no se ha definido la dirección  $y$ ).



El sumatorio de fuerzas en dirección  $X$  y  $Z$  en el cubo elemental dará lugar a:

$$\sum F_x = P_{x(-)}(\delta_z)(\delta_y) - P_{x(+)}(\delta_z)(\delta_y) = 0$$

$$\sum F_z = P_{z(-)}(\delta_x)(\delta_y) - P_{z(+)}(\delta_x)(\delta_y) - \rho g(\delta_x)(\delta_y)(\delta_z) = 0$$



Sustituyendo los valores de las presiones en las ecuaciones de las fuerzas, se obtiene:

En dirección x:

$$\left[ P - \frac{\partial P}{\partial x} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left( \frac{\delta_x}{2} \right)^2 - P - \frac{\partial P}{\partial x} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \left( \frac{\delta_x}{2} \right)^2 + T.O.S. \right] (\delta_x \delta_y) = 0$$

Aunque con posterioridad se van a anular, a priori se debe considerar que los TOS de las dos presiones no tienen porqué anularse.

En dirección z:

$$\left[ P - \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\delta_z}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \left( \frac{\delta_z}{2} \right)^2 - P - \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\delta_z}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \left( \frac{\delta_z}{2} \right)^2 + T.O.S. - \rho g \delta_z \right] (\delta_x \delta_y) = 0$$

de donde las ecuaciones en dirección x y z quedarán:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \delta_x + T.O.S. \right) \delta_y \delta_z &= 0 \\ \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + T.O.S. - \rho g \delta_z \right) \delta_x \delta_y &= 0 \end{aligned}$$

Dado que los TOS se pueden considerar muy pequeños, comparados con el resto de los sumandos, las ecuaciones resultantes serán:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} \delta_x \delta_y \delta_z &= 0; & \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 \\ \left( -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g \right) \delta_x \delta_y \delta_z &= 0; & \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g &= 0; & \frac{dP}{dz} &= -\rho g \end{aligned}$$

Operando de forma análoga en la dirección Y, se obtendría  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ .

Ello implica que, cuando un fluido está en reposo, la presión en un plano paralelo a la superficie del líquido dependerá únicamente de la profundidad a la que se encuentre el mismo. Dicha presión viene dada por la ecuación diferencial de la estática  $dP = -\rho g dz$

### 3.2 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido

Un apartado que usualmente se incluye dentro del capítulo de estática es el de movimiento de un fluido como un sólido rígido. Bajo este considerando, se definen los fluidos sometidos a aceleraciones constantes. Así, en coordenadas cartesianas, asumiendo que existe aceleración constante en la dirección de los tres ejes coordenados, las fuerzas actuantes sobre un elemento diferencial de fluido se definen:

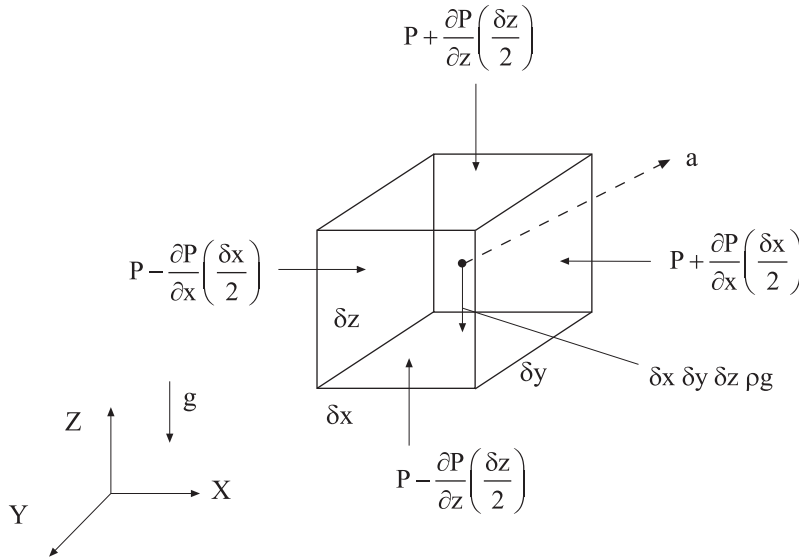


Fig. T 3.2  
Elemento  
diferencial de  
fluido sometido  
a una  
aceleración  
constante

Véase que los términos de segundo orden y de orden elevado han sido ya obviados.

La masa diferencial asociada al cubo elemental es:

$$\delta_m = \rho(\delta\forall) = \rho(\delta_x)(\delta_y)(\delta_z)$$

La aceleración aplicada al elemento diferencial de fluido se definirá como:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Aplicando la segunda ley de Newton en dirección x,  $\sum \vec{F}_x = m \cdot \vec{a}_x$

$$\left( P - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta_y \delta_z - \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta_y \delta_z = \rho(\delta_x)(\delta_y)(\delta_z) \vec{a}_x$$

y, operando, se llega a  $\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \vec{a}_x$

En dirección z, se establece:

$$\left( P - \frac{\partial P}{\partial z} \left( \frac{\delta z}{2} \right) \right) \delta_x \delta_y - \left( P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\delta z}{2} \right) \delta_x \delta_y - \rho g (\delta_x \delta_y \delta_z) = \rho(\delta_x \delta_y \delta_z) \vec{a}_z$$

y, operando, se llega a  $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \left( 1 + \frac{\vec{a}_z}{g} \right)$



En dirección y (considerando que también hay aceleración respecto a este eje), se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \bar{a}_y$$

La diferencial total de presión se define como:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z$$

Sustituyendo las tres variaciones de presión con respecto a los tres ejes coordenados en la ecuación del diferencial total de presión, se obtiene:

$$dP = -\rho \bar{a}_x dx - \rho \bar{a}_y dy - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

Ecuación diferencial que determina la presión en cualquier punto de la masa de un fluido que está sometido a una aceleración constante y positiva con respecto a los tres ejes coordenados.

Sea el caso de una aceleración lineal uniforme en dirección  $\bar{a}_x$  y  $\bar{a}_z$ ;  $\bar{a}_y = 0$ . La ecuación diferencial para este caso será:

$$\int_{P_0}^P dP = \int_0^x -\rho \bar{a}_x dx - \int_0^z \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

Si  $\bar{a}_x = \bar{a}_z = \text{cte}$  y después de integrar se llega a:

$$P = -\rho \cdot \bar{a}_x \cdot x - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) z + P_0$$

$P_0$  = es la presión en el punto  $x = 0$ ;  $z = 0$

Ecuación que da la presión en un punto genérico del fluido que está sometido a las dos aceleraciones objeto de estudio.

Las superficies de presión constante tendrán por ecuación:

$$P - P_0 = \text{cte} = 0 = -\rho \cdot \bar{a}_x \cdot dx - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

de donde:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-\bar{a}_x}{(\bar{a}_z + g)}$$

ecuación que representa la pendiente del plano inclinado que formaría la superficie libre del líquido.



### 3.3 Ecuación diferencial del movimiento del fluido como sólido rígido, coordenadas cilíndricas

La ecuación diferencial que caracteriza la distribución de presiones actuantes sobre una partícula elemental de fluido sometida a aceleraciones en todas las direcciones posibles y en coordenadas cilíndricas, se obtiene partiendo del elemento diferencial de fluido definido en la figura T 3.3.

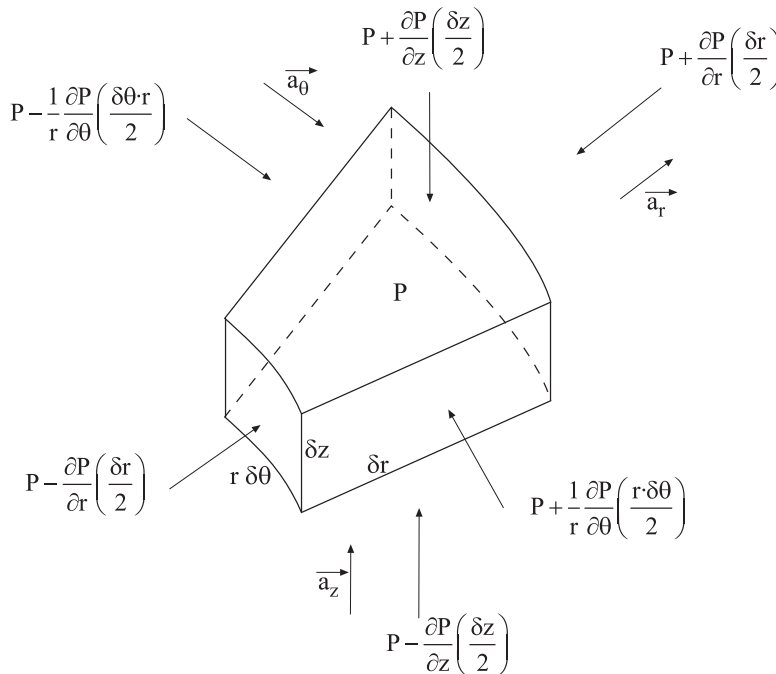


Fig. T 3.3  
Elemento  
diferencial de  
fluido sometido  
a una  
aceleración  
constante, caso  
de  
coordenadas  
cilíndricas

El sumatorio de fuerzas actuantes sobre cada cara del elemento diferencial en coordenadas cilíndricas da lugar a:

Dirección radial:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \delta r r \delta \theta \delta z = \delta r r \delta \theta \delta z \rho \bar{a}_r$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \bar{a}_r$$

$$\bar{a}_r = -r \omega^2, \text{ aceleración centrípeta.}$$

En dirección angular:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} r \delta \theta \delta r \delta z = \delta r r \delta \theta \delta z \rho \bar{a}_\theta$$



$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho \bar{a}_\theta$$

$$\bar{a}_\theta = r \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \text{ aceleración tangencial.}$$

En dirección del eje Z:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \delta z r \delta \theta \delta r - \delta z r \delta \theta \delta r \rho g = \delta r r \delta \theta \delta z \rho \bar{a}_z$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = \rho \bar{a}_z$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho (g + \bar{a}_z)$$

El diferencial de presión en coordenadas cilíndricas, se establece:

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} \delta r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} r \delta \theta + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z$$

de donde, sustituyendo las derivadas parciales por sus equivalentes, se obtiene:

$$dP = -\rho \bar{a}_r dr - \rho \bar{a}_\theta r d\theta - \rho (g + \bar{a}_z) dz$$

Esta es la ecuación diferencial que caracteriza la distribución de presiones a la que es sometido un elemento diferencial de fluido en coordenadas cilíndricas.

Con las ecuaciones diferenciales presentadas hasta el momento, es posible resolver la gran mayoría de problemas de estática y de fluido como sólido rígido. No obstante, hay una serie de ecuaciones que permiten facilitar la resolución de problemas. Estas ecuaciones identifican las fuerzas y su punto de aplicación sobre superficies sumergidas en un fluido sin movimiento. A continuación se presentan dichas ecuaciones.

### 3.4 Fuerzas sobre superficies planas

Sea la superficie plana genérica que se muestra en la figura T 3.4. La fuerza sobre un elemento diferencial de superficie inmersa en un fluido se da como:  $d\vec{F} = P d\vec{s}$ , y es normal a la superficie.

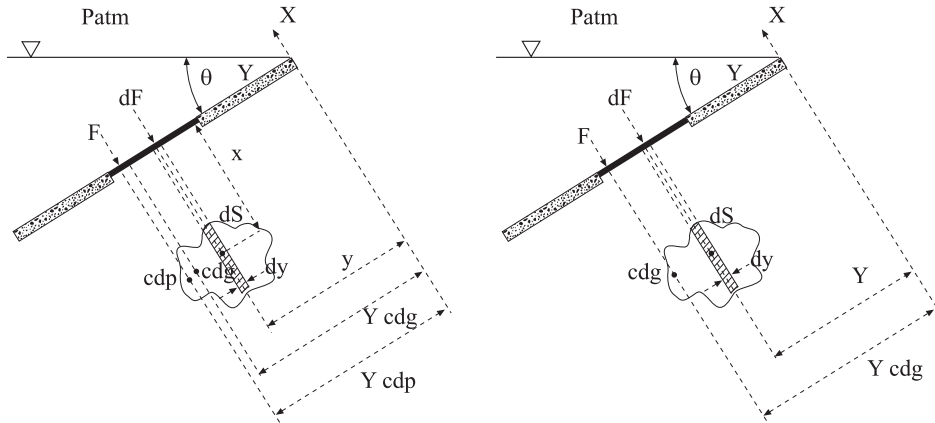


Fig. T 3.4  
Fuerzas sobre  
superficies  
planas

De la figura anterior, se observa que:

$$h = y \sen \theta \quad ; \quad P = \rho g h + P_{atm}$$

Trabajando en presiones relativas:

$$dF = \rho g y \sen \theta ds$$

$$F = \rho g \sen \theta \int y ds$$

El centroide, o centro de gravedad de una superficie, se define como:

$$y_{cdg} = \frac{\int y ds}{S}$$

$y_{cdg}$  = distancia desde el origen de coordenadas hasta el centro de gravedad de la superficie de área  $S$ .

Así, la fuerza sobre la placa se puede dar en función de la distancia al centro de gravedad de la superficie sumergida:

$$F = \rho g \sen \theta y_{cdg} S, \text{ puesto que } h_{cdg} = y_{cdg} \sen \theta$$

$$F = \rho g h_{cdg} S$$

$$F = P_{cdg} S$$

Se concluye que la fuerza sobre una superficie plana sumergida es el producto de la presión sobre el centro de gravedad (cdg) de la superficie por la superficie.

*Determinación del centro de presiones.* Se define el centro de presiones (cdp) como la línea de acción sobre la cual está aplicada la fuerza resultante sobre la superficie en estudio.



Aplicando momentos de cada elemento diferencial de fuerza sobre los ejes coordenados, se tiene:

$$F \cdot y_{cdp} = M_{xp} = \int y \cdot P ds$$

$$F \cdot x_{cdp} = M_{yp} = \int x \cdot P ds$$

La fuerza que el fluido ejerce sobre la superficie es  $F = \int P ds$ .

De las ecuaciones del balance de momentos, se obtiene:

$$y_{cdp} = \frac{\int y \cdot P \cdot ds}{F} = \frac{\int y \cdot P \cdot ds}{\int P \cdot ds}$$

$$x_{cdp} = \frac{\int x \cdot P \cdot ds}{\int P \cdot ds}$$

La presión en un punto cualquiera de la superficie vale:

$$P = \rho g y \sin \theta$$

con lo cual:

$$y_{cdp} = \frac{\int \rho g \sin \theta y^2 \cdot ds}{\int \rho g \sin \theta y \cdot ds} = \frac{\int y^2 \cdot ds}{\int y \cdot ds} = \frac{I_x}{y_{cdg} S} \quad (1)$$

Obsérvese que el concepto de momento de inercia de una superficie con respecto a un eje X externo es:

$$I_x = \int y^2 \cdot ds$$

Según el teorema de Steiner o de los ejes paralelos:

$$I_x = I_{x cdg} + y_{cdg}^2 \cdot S$$

$I_{x cdg}$  = momento de inercia del área con respecto a un eje X que pasa por el centro de gravedad de la superficie.

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene:

$$y_{cdp} = \frac{I_{x cdg} + y_{cdg}^2 \cdot S}{y_{cdg} \cdot S} = \frac{I_{x cdg}}{y_{cdg} \cdot S} + y_{cdg}$$

$$y_{cdp} - y_{cdg} = \frac{I_{x cdg}}{y_{cdg} \cdot S}$$

$I_{x cdg}$  es el momento de inercia de la superficie objeto de estudio respecto al eje X que pasa por su centro de gravedad.





Se concluye que el centro de presión se encuentra debajo del centro de gravedad a una distancia que vale  $\frac{I_{x_{cdg}}}{y_{cdg} \cdot S}$ .

Para localizar el centro de presiones respecto al eje X se procede del mismo modo y se obtiene:

$$x_{cdp} = \frac{\int xP \cdot ds}{\int P \cdot ds} = \frac{\int x \rho g y \sin \theta \cdot ds}{\int \rho g y \sin \theta \cdot ds} = \frac{\int x \rho g y \sin \theta \cdot ds}{\rho g \sin \theta \int y \cdot ds} = \frac{\int x \rho g y \sin \theta \cdot ds}{\rho g \sin \theta y_{cdg} S} = \frac{\int x y \cdot ds}{y_{cdg} S}$$

$$x_{cdp} = \frac{\int xy \cdot ds}{y_{cdg} S} = \frac{I_{xy}}{y_{cdg} S}$$

$I_{xy}$  es el momento de inercia (cruzado) de la superficie objeto de estudio respecto a los ejes de coordenadas de referencia.

Según Steiner:

$$I_{xy} = I_{xycdg} + x_{cdg} y_{cdg} \cdot S$$

con lo cual:

$$x_{cdp} = \frac{I_{xycdg} + x_{cdg} y_{cdg} \cdot S}{y_{cdg} \cdot S} = \frac{I_{xycdg}}{y_{cdg} \cdot S} + x_{cdg}$$

$$x_{cdp} - x_{cdg} = \frac{I_{xycdg}}{y_{cdg} \cdot S}$$

$I_{xycdg}$  representa el momento de inercia cruzado de la superficie objeto de estudio con respecto a los ejes de coordenadas que pasan por su centro de gravedad.

### 3.5 Fuerzas sobre superficies curvas

Sea la superficie curva de la figura T 3.5. Sea  $dF$  la fuerza elemental que actúa sobre un diferencial de superficie.

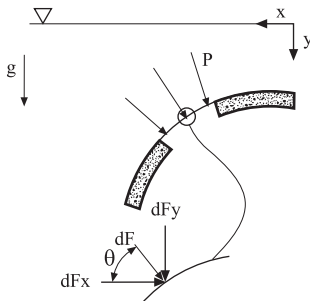


Fig. T 3.5  
Fuerzas  
actuales  
sobre  
superficies  
curvas

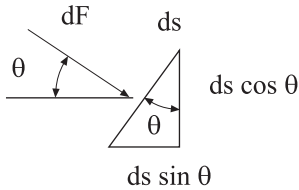


La componente horizontal de la fuerza elemental que actúa sobre la superficie diferencial valdrá:

$$dF_x = dF \cos \theta = P ds \cos \theta$$

La proyección del elemento diferencial de superficie en la dirección perpendicular a la componente de fuerza en dirección x es:

Fig. 3.6  
Diferencial de fuerza actuando sobre un diferencial de superficie



$$ds \cos \theta = ds_x$$

$$ds \sin \theta = ds_y$$

Con lo cual:

$$F_x = \int P ds_x = \int \rho g h ds_x$$

Recordando que  $h_{cdg} = \frac{\int h ds_x}{S_x}$ , se obtiene:

$$F_x = \int \rho g h ds_x = \rho g h_{cdg} S_x = P_{cdg} S_x$$

$S_x$  es la proyección de la superficie curva con respecto al eje Y.

$h_{cdg}$  sería la distancia desde el origen de coordenadas situado en la superficie del depósito al centro de gravedad de la proyección de la superficie curva.

Se concluye que la componente horizontal de la fuerza resultante sobre la superficie curva será la presión sobre el centro de gravedad de la proyección, multiplicado por la superficie proyectada.

Para determinar la línea de acción de la fuerza horizontal, centro de presiones, se trabajará con la proyección de la superficie, aplicando las mismas expresiones que para una placa plana.

La componente vertical de una fuerza de presión sobre una superficie curva se obtiene:

$$dF_y = P ds \sin \theta$$

$$dF_y = \rho g h ds \sin \theta = \rho g h ds_y$$

$$F_y = \rho g \int h ds_y = \rho g \nabla$$

$h ds_y$  = volumen elemental de fluido situado encima de la superficie.



La línea de acción de la componente vertical de la fuerza pasará a través del centro de gravedad del volumen de líquido situado encima de dicha superficie.

Para superficies tridimensionales, existirán dos componentes horizontales y una vertical.

### 3.6 Fuerzas sobre volúmenes sumergidos

Según Arquímedes, todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta una fuerza ascendente igual al peso del fluido que desaloja. Con el fin de comprobar este principio, se realiza la siguiente demostración matemática.

Sean el cuerpo sumergido de la figura T 3.7, y una columna de fluido elemental que atraviesa dicho cuerpo.

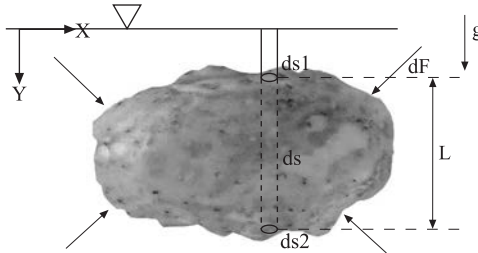


Fig. T 3.7  
Fuerzas  
actantes  
sobre un  
volumen  
sumergido

La fuerza de presión resultante sobre las dos superficies elementales es:

$$dF = P_1 ds_{1y} - P_2 ds_{2y}$$

Puesto que las proyecciones con respecto a un plano horizontal de las dos áreas elementales son iguales  $ds_{1y} = ds_{2y} = ds_y$ , se concluye:

$$dF = (P_1 - P_2) ds_y = (\rho g h_1 - \rho g h_2) ds_y = \rho g L ds_y$$

$$F = \int \rho g L ds_y = \rho g \int L ds_y = \rho g \nabla$$

donde  $\int L ds_y$  es el volumen del cuerpo sumergido.

Se concluye que la fuerza en sentido ascendente que actúa sobre un cuerpo total o parcialmente sumergido es igual al peso de fluido desalojado por dicho cuerpo.

La línea de acción de la fuerza de flotación pasa a través del centroide del volumen desplazado. Este centroide se denomina *centro de flotación* (es el centro de gravedad del volumen desplazado).



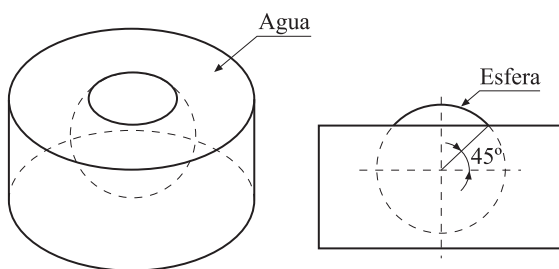
## Problema 9

### Enunciado

Sea una esfera de radio la unidad, sumergida parcialmente en agua. Se conoce que, en la posición de equilibrio, el punto de tangencia del casquete esférico que sobresale del líquido con el eje de abscisas que pasa por el centro de la esfera forman un ángulo de 45 grados. Determine:

1. La densidad del material de que está compuesta la esfera.
2. Si la esfera se sumerge en mercurio, determine el nivel de mercurio respecto al eje central de la esfera.

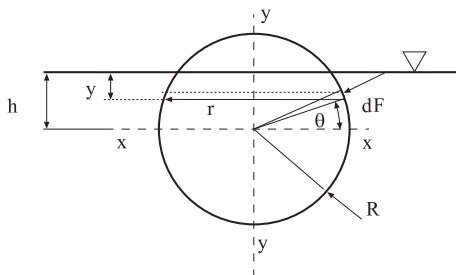
Fig. 9.1  
Esquema de la  
esfera  
parcialmente  
sumergida



### Resolución

1. El elemento diferencial de superficie empleado para determinar el empuje queda esquematizado en la figura 9.2.

Fig. 9.2  
Esquema del  
elemento  
diferencial  
empleado



$$E = - \int_S dF_y = - \int_S dF \sin \theta = - \int_S \rho g y \cdot 2\pi r \cdot R d\theta \cdot \sin \theta;$$

puesto que: 
$$\begin{cases} r = R \cos \theta \\ y = h - R \sin \theta \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 E &= - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g (h - R \sin \theta) \cdot 2\pi R \cos \theta \cdot R \cdot \sin \theta d\theta; \\
 E &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g h \cdot 2\pi R^2 \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \rho g 2\pi R^3 \sin^2 \theta \cos \theta d\theta; \\
 E &= -\rho g h 2\pi R^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho g 2\pi R^3 \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ;  $h = R \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = R \sin(45^\circ)$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \frac{1}{2} \left[ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} \left[ \sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right];$$

$$E = -\rho g h 2\pi R^2 \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} [0,353553 - (-1)];$$

$$E = \rho g h 2\pi R^2 \left( \frac{1}{4} \right) + \rho g 2\pi R^3 \frac{1}{3} (1,353553);$$

$$E = \rho g 2\pi \left[ \frac{R^2}{4} h + \frac{R^3}{3} (1,353553) \right];$$

$$E = \rho g 2\pi \left[ \frac{R^3 \sin 45^\circ}{4} + \frac{R^3}{3} (1,353553) \right];$$

$$E = \rho g 2\pi R^3 \left[ \frac{\sin 45^\circ}{4} + \frac{1,353553}{3} \right] = \rho g 2\pi R^3 \cdot 0,62796 = \rho g \pi R^3 \cdot 1,2559$$

El peso de la esfera ha de ser igual a su empuje, con lo cual se ha de cumplir:

$$w = \rho_E g \frac{4}{3} \pi R^3 = E = \rho_{H_2O} g \pi R^3 \cdot 1,2559$$

$$\rho_E = \frac{\rho_{H_2O} \cdot 1,2559}{\frac{4}{3}} = 941,94 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

Véase que, tal como cabía esperar, la densidad es menor que la densidad del agua.

2. Si la esfera se sumerge en el mercurio, y dado que la densidad del mercurio es 13,6 veces la densidad del agua, se puede realizar una estimación inicial calculando si la mitad de la esfera quedará o no cubierta por el mercurio. Para ello, se ha de evaluar si se cumple:



$$\text{Peso}_{\text{esfera}} = W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3} \pi R^3 \stackrel{>}{<} \rho_{\text{Hg}} g \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3$$

y se cumple que :  $\rho_E < \rho_{\text{Hg}} \frac{1}{2}$

con lo cual, seguro que únicamente un pequeño casquete esférico quedará sumergido en el mercurio.

Dado que el elemento diferencial de empuje es el mismo que en el apartado inicial, se llega a la misma expresión (1) que en dicho apartado, aunque ahora la densidad de fluido es la del mercurio.

$$E = -\rho_{\text{Hg}} g h 2\pi R^2 \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} + \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^3 \left[ \frac{\sin^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

de donde:

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^2 \left\{ \left[ \frac{R}{3} \left( \sin^3 \theta - \sin^3 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] - \left[ \frac{h}{2} \left( \sin^2 \theta - \sin^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right] \right\}; \quad (2)$$

Con el fin de comprobar la bondad de la ecuación hallada, se comprueba que para  $\theta = 0$  se cumple que  $h = 0$ , con lo cual el empuje debería ser el equivalente al de media esfera.

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^2 \left[ \frac{R}{3} (0+1) - \frac{h}{2} (0-1) \right]$$

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi R^2 \left[ \frac{R}{3} + \frac{h}{2} \right]$$

$$E = \rho_{\text{Hg}} g 2\pi \frac{R^3}{3} = \rho_{\text{Hg}} g \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{2}$$

Véase que se cumple.

La determinación del ángulo  $\theta$  se obtendrá de igualar el peso de la esfera a la ecuación del empuje en función de dicho ángulo.

El peso de la esfera viene dado por:

$$W_{\text{esfera}} = \rho_{\text{esfera}} g \frac{4}{3} \pi R^3 = 941,94 \cdot 9,8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = 38666,77 \text{ N} \quad (3)$$

La figura 9.3 es la representación gráfica de la ecuación (2), donde entrando para el peso de la esfera se obtiene el ángulo  $\theta$  que forma la superficie libre del mercurio con el eje de abscisas central de la esfera. Cuyo valor es de  $\theta = -42,7^\circ$ .

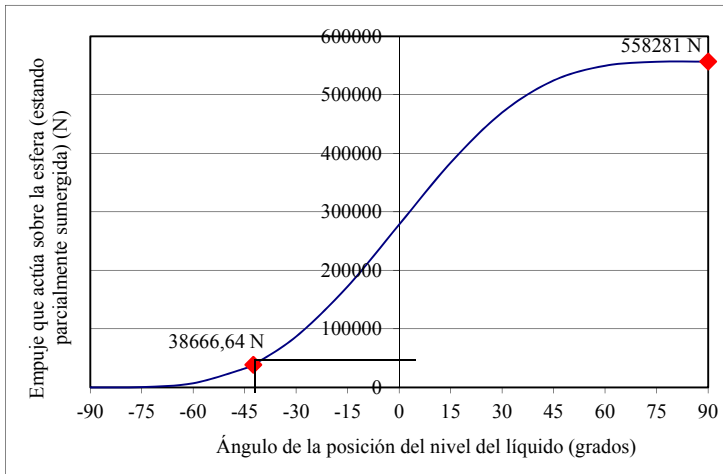


Fig. 9.3  
Representación  
gráfica de la  
ecuación 2

## Problema 10

### Enunciado

Sea una esfera de radio  $R$  sumergida entre dos fluidos de densidades diferentes. Determinar la relación entre la densidad de la esfera y la de ambos fluidos si se considera que la mitad de la esfera está sumergida en el fluido inferior y la otra mitad, en el fluido superior. Extender la relación para un caso genérico.

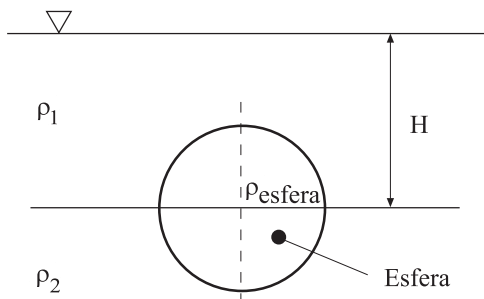


Fig. 10.1  
Conjunto de la  
esfera  
sumergida  
entre dos  
fluidos de  
densidades  
diferentes

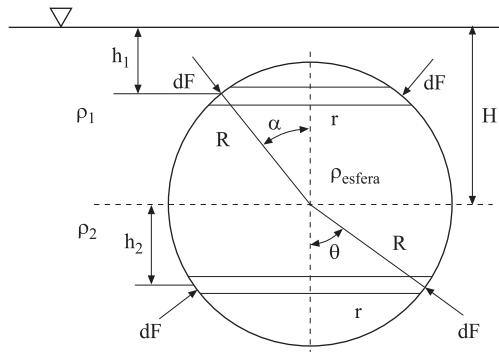
### Resolución

1. Para determinar la relación que se pide en el problema, se ha de realizar un balance de fuerzas entre el peso de la esfera y la fuerza ascensorial ejercida por los dos fluidos.

La fuerza diferencial ejercida sobre el elemento diferencial de superficie establecido en la parte inferior de la esfera se define como (v. figura 10.2):



Fig.10.2.  
Esfera con los  
correspondientes  
elementos  
diferenciales de  
fuerza en la parte  
superior e inferior  
de la misma



$$dF_{inf} = (P_{atm} + \rho_1 g H + \rho_2 g h_2) 2\pi R \sin \theta R d\theta$$

Puesto que lo que se requiere es la componente vertical de dicha fuerza,

$$dF_{Yinf} = dF_{inf} \cos \theta$$

$$dF_{Yinf} = (P_{atm} + \rho_1 g H + \rho_2 g h_2) 2\pi R \sin \theta \cos \theta R d\theta$$

Integrando entre el valor mínimo y el máximo del ángulo  $\theta$ , una vez se ha considerado el valor variable de  $h_2$ , se tiene:

$$\int_0^{F_{Yinf}} dF_{Yinf} = \int_0^{\pi} (P_{atm} + \rho_1 g H + \rho_2 g R \cos \theta) 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$F_{Yinf} = (P_{atm} + \rho_1 g H) 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\pi} + \rho_2 g 2\pi R^3 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi}$$

$$F_{Yinf} = (P_{atm} + \rho_1 g H) \pi R^2 + \rho_2 g 2\pi R^3 \frac{1}{3}$$

Para la parte superior de la esfera, se puede establecer:

$$dF_{sup} = (P_{atm} + \rho_1 g h_1) 2\pi R \sin \alpha R d\alpha$$

La componente vertical de esta fuerza se definirá como (obsérvese que se ha tenido en cuenta el signo de la fuerza):

$$dF_{Ysup} = -dF \cos \alpha = -(P_{atm} + \rho_1 g h_1) 2\pi R \sin \alpha \cos \alpha R d\alpha$$

Sustituyendo el valor de  $h_1$  por su equivalente, se obtiene:

$$dF_{Ysup} = -dF \cos \alpha = -(P_{atm} + \rho_1 g (H - R \cos \alpha)) 2\pi R \sin \alpha \cos \alpha R d\alpha$$





E integrando entre límites se obtiene:

$$\int_0^{F_{Y\sup}} dF_{Y\sup} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} - (P_{\text{atm}} + \rho_1 g (H - R \cos \alpha)) 2\pi R \sin \alpha \cos \alpha R d\alpha$$

El resultado de la integración es:

$$F_{Y\sup} = - (P_{\text{atm}} + \rho_1 g H) 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \rho_1 g 2\pi R^3 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

de donde:

$$F_{Y\sup} = - (P_{\text{atm}} + \rho_1 g H) 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \right] + \rho_1 g 2\pi R^3 \left[ \frac{1}{3} \right]$$

La fuerza total debida a los dos fluidos que actúan sobre la esfera será:

$$F_{Y\text{Total}} = F_{Y\text{inf}} + F_{Y\sup}$$

$$F_{Y\text{Total}} = (P_{\text{atm}} + \rho_1 g H) \pi R^2 + \rho_2 g 2\pi R^3 \frac{1}{3} - (P_{\text{atm}} + \rho_1 g H) 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \right] + \rho_1 g 2\pi R^3 \left[ \frac{1}{3} \right]$$

y se obtiene:

$$F_{Y\text{Total}} = \rho_2 g \pi R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g \pi R^3 \frac{2}{3}$$

Esta es la fuerza de empuje que los dos fluidos crean sobre la esfera. Puesto que la esfera está en equilibrio, dicha fuerza ha de ser igual al peso de la esfera, de donde:

$$\pi R^3 \frac{4}{3} \rho_{\text{esfera}} g = \rho_2 g \pi R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g \pi R^3 \frac{2}{3}$$

y resulta:

$$\rho_{\text{esfera}} = \rho_2 \frac{1}{2} + \rho_1 \frac{1}{2}$$

siendo esta la relación entre las densidades de los fluidos y la densidad de la esfera.

Es necesario remarcar que este mismo resultado se habría podido obtener con mayor facilidad si se hubiese aplicado el principio de Arquímedes.

Así, recordando que el empuje sobre el cuerpo sumergido es igual al peso del fluido desalojado, se establece:



$$F_{\text{empuje de Arquímedes}} = \rho_2 g \pi R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g \pi R^3 \frac{2}{3}$$

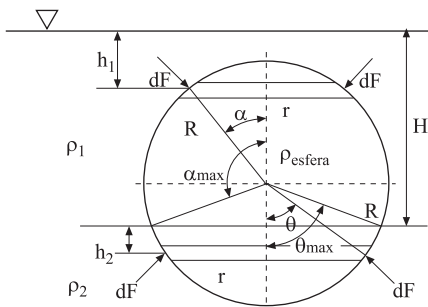
E igualando esta ecuación al peso de la esfera, se obtiene el resultado del problema:

$$\rho_{\text{esfera}} g \pi R^3 \frac{4}{3} = \rho_2 g \pi R^3 \frac{2}{3} + \rho_1 g \pi R^3 \frac{2}{3}$$

$$\rho_{\text{esfera}} = \rho_2 \frac{1}{2} + \rho_1 \frac{1}{2}$$

2. En la segunda parte del problema, se pide extender el resultado obtenido para que sea aplicable a un caso genérico, es decir, cuando el plano que divide los dos fluidos divida la esfera en dos volúmenes no simétricos. Este caso se define en la figura 10.3.

Fig. 10.3  
Esfera con los correspondientes elementos diferenciales de fuerza en la parte superior y en la inferior de la misma. Caso de aplicación genérico.



Para este caso genérico, las ecuaciones utilizadas en el apartado anterior son igualmente válidas. Únicamente será necesario modificar los límites de integración de las mismas, y quedará:

Fuerza ascensorial sobre la parte inferior de la esfera:

$$F_{Y_{\text{inf}}} = (P_{\text{atm}} + \rho_1 g H) 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\theta_{\text{max}}} + \rho_2 g 2\pi R^3 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\theta_{\text{max}}}$$

Fuerza ascensorial para la parte superior de la esfera:

$$F_{Y_{\text{sup}}} = -(P_{\text{atm}} + \rho_1 g H) 2\pi R^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right]_0^{\alpha_{\text{max}}} + \rho_1 g 2\pi R^3 \left[ -\frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^{\alpha_{\text{max}}}$$

La fuerza neta se obtendrá de realizar la suma algebraica de las dos ecuaciones anteriores, dado que los signos correspondientes ya están incluidos en dichas ecuaciones. Dicha fuerza resultante se igualará al peso de la esfera con el fin de obtener la densidad de la misma.



## Problema 11

### Enunciado

Determine la localización del centro de presión y de los momentos causados por las fuerzas hidrostáticas sobre el eje que pasa por la base de una placa semicircular de radio la unidad, sumergida completamente e inclinada un ángulo de  $\theta=45^\circ$  respecto a la superficie libre del líquido.

Considérese que la parte superior de la placa está situada a una distancia respecto al nivel del líquido de  $h_a$  (10 m; 100 m; 500 m), por debajo de la superficie del mar.

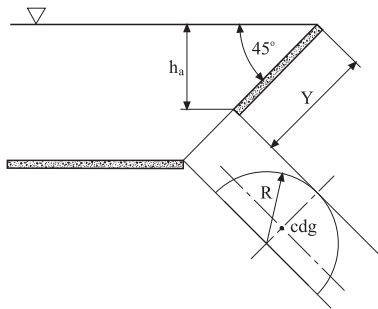


Fig. 11.1  
Esquema de la  
posición de la  
placa

### Resolución

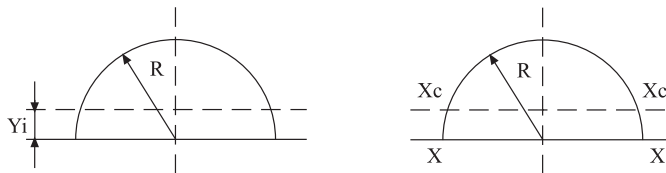


Fig. 11.2  
Ejes de  
referencia

1. Los momentos de inercia respecto al eje central y el que pasa por la base de la placa se establecen:

$$I_{xc} = \frac{\pi R^4}{8} \left( 1 - \frac{64}{9\pi^2} \right); \quad I_x = \frac{1}{8} \pi R^4; \quad Y = \frac{4R}{3\pi}$$

Sustituyendo para el momento de inercia que pasa por el eje central, se tiene:

$$I_{xc} = 0,1097 \times R^4$$

La distancia (inclinada) desde la superficie del líquido hasta el centro de gravedad del cuerpo se define:



$$Y_{cdg} = \frac{h_a}{\sin 45} + \left( R - \frac{4R}{3\pi} \right)$$

$$Y_{cdg10} = Y_{cdg10m} = \frac{10}{\sin 45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 14,717 \text{ m}$$

$$Y_{cdg100} = Y_{cdg100m} = \frac{100}{\sin 45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 141,996 \text{ m}$$

$$Y_{cdg500} = Y_{cdg500m} = \frac{500}{\sin 45} + \left( 1 - \frac{4 \times 1}{3\pi} \right) = 707,682 \text{ m}$$

El centro de presión en los tres casos está situado:

$$Y_{cdp} - Y_{cdg} = \frac{I_{x_{cdg}}}{Y_{cdg} \times A}$$

$$h_a = 10 \text{ m.} \quad Y_{cdp10} = Y_{cdg10} + \frac{I_{x_{cdg}}}{Y_{cdg10} \times A} = 14,717 + \frac{0,1097 \times 1^4}{14,717 \times \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 14,721 \text{ m}$$

$$Y_{cdp10} - Y_{cdg10} = 0,00474 \text{ m}$$

$$h_a = 100 \text{ m.} \quad Y_{cdp100} = 141,996 + \frac{0,1097 \times 1^4}{141,996 \times \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 141,99649 \text{ m}$$

$$Y_{cdp100} - Y_{cdg100} = 0,000491 \text{ m}$$

$$h_a = 500 \text{ m} \quad Y_{cdp500} = 707,682 + \frac{0,1097 \times 1^4}{707,682 \times \frac{\pi \times 1^2}{2}} = 707,6820987 \text{ m}$$

$$Y_{cdp500} - Y_{cdg500} = 0,00009870 \text{ m}$$

Obsérvese que la distancia entre el centro de presiones y el centro de gravedad disminuye a medida que la profundidad aumenta.

La fuerza ejercida sobre la superficie semicircular para las tres profundidades se establece del modo siguiente:

$$F_{10} = \rho g Y_{cdg10} \sin 45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 14,717 \cdot \sin 45 \cdot \frac{\pi 1^2}{2} = 160.195,4 \text{ N}$$



$$F_{100} = \rho g Y_{cdg_{100}} \sin 45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 141,996 \cdot \sin 45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 154.5635,43 \text{ N}$$

$$F_{500} = \rho g Y_{cdg_{500}} \sin 45 \cdot \frac{\pi R^2}{2} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot 707,682 \cdot \sin 45 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 770.3163,29 \text{ N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular será:

$$M = F \cdot d_{(cdp-base)} = F \cdot \left\{ \frac{4R}{3\pi} - (Y_{cdp} - Y_{cdg}) \right\}$$

$$M_{10m} = 160.195,4 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00474 \right\} = 67.229,71 \text{ Nm}$$

$$M_{100m} = 1.545.635,43 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,000491 \right\} = 655.229,14 \text{ Nm}$$

$$M_{500m} = 7.703.163,29 \cdot \left\{ \frac{4 \cdot 1}{3\pi} - 0,00009870 \right\} = 3.268.563,73 \text{ Nm}$$

2. Segundo método de resolución, por integración directa:

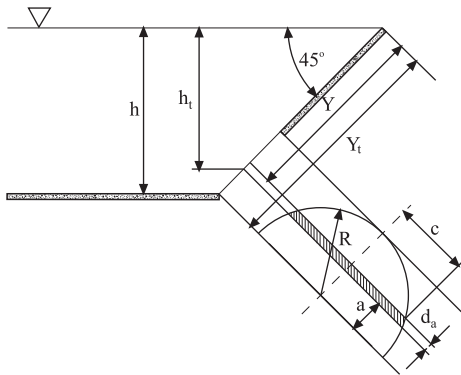


Fig. 11.3  
Esquema de la  
posición de la  
placa con el  
elemento  
diferencial de  
superficie  
elegido

Sea el elemento diferencial de superficie definido en la figura 11.3.

$$ds = 2c \cdot da$$

$$a^2 + c^2 = R^2$$

$$ds = 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$dF = P \quad ds$$

$$dF = \rho g h \, ds = \rho g (h_t - a \sin \theta) \, ds = \rho g (Y_t \sin \theta) \, ds = \rho g (Y_t - a) \sin \theta \, ds$$

$$dF = \rho g (Y_t - a) \sin \theta \, ds = \rho g (Y_t - a) \sin \theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} \, da$$



$$F = \int_0^R \rho g (Y_t - a) \cdot \sin\theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da - \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \left[ \frac{a}{2} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{a}{R} \right]_0^R - \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho \cdot g \cdot Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \left[ \frac{R^2}{2} \sqrt{R^2 - R^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{R}{R} \right] - \rho \cdot g \cdot \sin\theta \cdot 2 \int_0^R a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} \cdot da$$

$$F = \rho g Y_t \sin\theta \cdot 2 \left[ 0 + \frac{R^2}{2} \arcsin 1 \right] - \rho g \cdot \sin\theta \cdot 2 \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R$$

$$F = \rho g Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \cdot \left( \frac{R^2}{2} \arcsin 1 \right) - \rho g \sin\theta \cdot 2 \left[ -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - R^2)^{\frac{3}{2}} - \left( -\frac{1}{3} (R^2 - 0^2)^{\frac{3}{2}} \right) \right]$$

$$F = \rho g Y_t \cdot \sin\theta \cdot 2 \times \frac{R^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \rho g \cdot \sin\theta \cdot 2 \frac{1}{3} (R^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$F = \rho g Y_t \cdot \sin\theta \cdot \frac{R^2 \cdot \pi}{2} - \rho g \cdot \sin\theta \cdot 2 \frac{1}{3} R^3 ;$$

$$F = \rho g \cdot \sin\theta R^2 \left[ Y_t \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3} \right] ;$$

El valor de  $Y_t$  será:

$$h_t = h_a + R \cdot \sin\theta$$

La  $h_a$  ha de entenderse ahora como la distancia vertical entre el extremo superior de la placa y la superficie libre del líquido.

$$Y_t = \frac{h_a + R \cdot \sin\theta}{\sin\theta} = \frac{h_a}{\sin\theta} + R$$

Sustituyendo en la ecuación de la fuerza:

$$F = \rho g \cdot \sin\theta R^2 \left[ \left( \frac{h_a}{\sin\theta} + R \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{R \cdot 2}{3} \right]$$



La fuerza sobre la superficie para las tres profundidades será:

$$h_a = 10 \text{ m} \quad F_{10} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \sin 45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{10}{\sin 45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 160.203,3 \text{ N}$$

$$h_a = 100 \text{ m} \quad F_{100} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \sin 45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{100}{\sin 45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 1.545.645,69 \text{ N}$$

$$h_a = 500 \text{ m} \quad F_{10000} = 1.000 \cdot 9,8 \cdot \sin 45 \cdot 1^2 \cdot \left[ \left( \frac{500}{\sin 45} + 1 \right) \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1 \cdot 2}{3} \right] = 7.703.167,29 \text{ N}$$

El momento respecto a la base del área semicircular es:

$$dM = dF \cdot a$$

$$dM = a \cdot \rho \cdot g \cdot (Y_t - a) \cdot \sin \theta \cdot 2\sqrt{R^2 - a^2} da$$

$$M = \int_0^R \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot 2 \cdot Y_t \cdot a \cdot \sqrt{R^2 - a^2} da - \int_0^R \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{R^2 - a^2} da$$

$$M = \rho \times g \times \sin \theta \times 2 \left[ Y_t \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R - \left[ \frac{a(2a^2 - R^2)}{8} \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{R^4}{8} \arcsin \left( \frac{a}{R} \right) \right]_0^R \right]$$

$$M = \rho \times g \times \sin \theta \times 2 \left[ Y_t \left[ \frac{1}{3} R^3 \right] - \left[ \frac{R^4}{8} \arcsin 1 \right] \right]$$

Recordando que

$$Y_t = \frac{h_a}{\sin 45} + R ,$$

el momento para los diferentes valores de  $h_a$  será:

$$h_a = 10 \text{ m}$$

$$M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \sin 45 \times 2 \left[ \left[ \frac{10}{\sin 45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right] \right] = 67.231,83 \text{ Nm}$$

$$h_a = 100 \text{ m}$$

$$M_{100} = 1.000 \times 9,8 \times \sin 45 \times 2 \left[ \left[ \frac{100}{\sin 45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} 1^3 \right] - \left[ \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right] \right] = 655.231,83 \text{ Nm}$$



$$h_a = 500 \text{ m}$$

$$M_{10} = 1.000 \times 9,8 \times \sin 45 \times 2 \left[ \left[ \frac{500}{\sin 45} + 1 \right] \left[ \frac{1}{3} l^3 \right] - \left[ \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} \right] \right] = 3.268.565,16 \text{ Nm}$$

Véase que los valores de la fuerza y los momentos coinciden con los obtenidos en la resolución anterior.

## Problema 12

### Enunciado

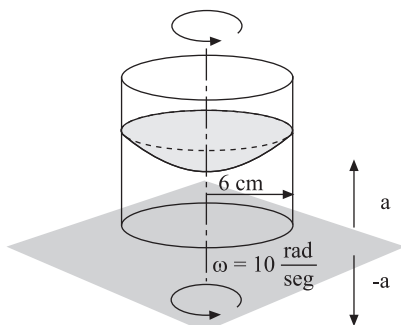
Sea un recipiente cilíndrico parcialmente lleno de agua y abierto a la atmósfera. Dicho recipiente gira a una velocidad angular de  $10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  y está montado en un ascensor.

En condiciones de reposo, la altura del nivel del líquido es de 30 cm. Quedando un espacio libre entre el nivel del líquido y la superficie del vaso de 10 cm, el radio del cilindro es de 6 cm.

Sabiendo que cuando el ascensor se pone en marcha, tanto en sentido ascendente como descendente, la aceleración del mismo es de  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  y su deceleración para cualquier sentido de la marcha es de  $0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  determine:

1. La ecuación que rige la posición del nivel del líquido en función del radio.
2. La presión a la que está sometida una partícula de fluido situada en el fondo del depósito y a un radio de 0,02 m, para cualquier sentido de la marcha del ascensor.
3. La velocidad de giro del cilindro para que, en el borde exterior, el líquido se sitúe en el extremo del vaso. Considere el ascensor parado.

Fig. 12.1  
Esquema del  
recipiente  
cilíndrico que gira







## Resolución

1. La ecuación diferencial que rige el movimiento de un fluido sometido a las aceleraciones: centrípeta, angular, y en dirección vertical se define como:

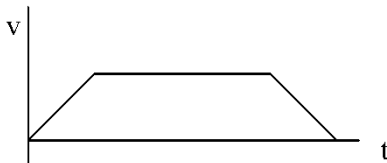
$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho a_\theta r d\theta - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

Puesto que la aceleración angular no existe para el caso que nos ocupa, queda:

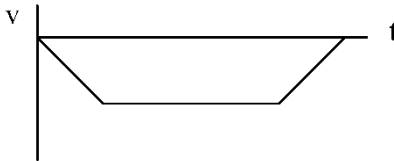
$$dP = \rho r \omega^2 dr - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

Los valores de la aceleración  $a_z$  dependerán de si el ascensor está subiendo o bajando y de si está en fase de aceleración o deceleración, con lo cual:

Ascensor en sentido ascendente:



Ascensor en sentido descendente:



- Aceleración  $a_z = 1 \frac{m}{s^2}$

Fig. 12.2

- Deceleración  $a_z = -0,7 \frac{m}{s^2}$

- Deceleración  $a_z = +0,7 \frac{m}{s^2}$

Fig. 12.3

- Aceleración  $a_z = -1 \frac{m}{s^2}$

Las superficies de presión constante tendrán por ecuación diferencial:

$$0 = \rho r \omega^2 dr - \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

de donde:

$$\rho r \omega^2 dr = \rho g \left( 1 + \frac{\bar{a}_z}{g} \right) dz$$

$$\int_{r=0}^r r \omega^2 dr = \int_{z_0}^z (g + \bar{a}_z) dz$$

$z_0$  será la altura del líquido para  $r = 0$ ;

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} = (g + \bar{a}_z) [z - z_0]$$



con lo cual:

$$z = \omega^2 \frac{r^2}{2} \frac{1}{(g + \bar{a}_z)} + z_0$$

Se observa que la posición del nivel del líquido depende no sólo de la velocidad de giro, sino también de la aceleración del ascensor.

Esta ecuación quedará completamente definida una vez se determine  $z_0$ .

Para determinar  $z_0$  deberán igualarse los volúmenes del líquido en reposo y en movimiento.

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = \int_0^R 2\pi r z \, dr$$

Del enunciado se conoce que  $z_{\text{inicial}} = 30 \text{ cm}$ .

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = \int_0^R 2\pi r \left( \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g + \bar{a}_z)} + z_0 \right) dr$$

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = 2\pi \left[ \frac{\omega^2}{2 \times (g + \bar{a}_z)} \times \frac{r^4}{4} + z_0 \times \frac{r^2}{2} \right]_0^R$$

$$\pi R^2 z_{\text{inicial}} = 2\pi \left[ \frac{\omega^2}{2 (g + \bar{a}_z)} \frac{R^4}{4} + z_0 \frac{R^2}{2} \right]$$

$$z_{\text{inicial}} = \frac{\omega^2}{4 (g + \bar{a}_z)} R^2 + z_0$$

$$z_0 = z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4 (g + \bar{a}_z)}$$

Véase que el nivel del líquido cuando el cilindro gira; se desplaza, para radio igual a cero, y depende de las aceleraciones que se tengan en cada caso particular.

La ecuación que da la posición del nivel del líquido teniendo en cuenta todos los parámetros estipulados es:

$$Z = z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4 (g + \bar{a}_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{(g + \bar{a}_z)}$$

2. La presión en el punto considerado saldrá de la ecuación:

$$\int_{p_{\text{atm}}}^{p_{\text{punto}}} dp = \int_0^r \rho r \omega^2 dr - \int_{z_0}^0 \rho (g + \bar{a}_z) dz$$



$$P_{\text{punto}} - P_{\text{atm}} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + \rho(g + \bar{a}_z) Z_0$$

$$P_{\text{punto}} - P_{\text{atm}} = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + \rho(g + \bar{a}_z) \left[ Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} \right]$$

Trabajando en presiones relativas, esta ecuación se puede dar como:

$$P_{\text{punto}} = \rho(g + \bar{a}_z) \left[ Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} + \frac{r^2 \omega^2}{2(g + \bar{a}_z)} \right]$$

Los valores de las constantes conocidas son:

$$\rho = 1.000 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}; \quad g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

$$Z_{\text{inicial}} = 0,3 \text{ m}; \quad R = 0,06 \text{ m};$$

$$r = 0,02 \text{ m}; \quad \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$a_z$  = (posee cuatro valores, definidos en el primer apartado):

Así, la presión en el punto deseado para los cuatro casos en estudio será:

Ascensor subiendo, período de aceleración:  $a_z = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$P = 1.000 \times (9,8 + 1) \left[ 0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8 + 1)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8 + 1)} \right]$$

$$P = 3170 \text{ Pa}$$

Ascensor subiendo, período de deceleración:  $a_z = -0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;

$$P = 1.000 \times (9,8 - 0,7) \left[ 0,3 - \frac{10^2 \times 0,06^2}{4(9,8 - 0,7)} + \frac{10^2 \times 0,02^2}{2} \times \frac{1}{(9,8 - 0,7)} \right]$$

$$P = 2660 \text{ Pa}$$

Ascensor bajando, período de aceleración:  $a_z = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;

$$P = 2570 \text{ Pa}$$



Ascensor bajando, período de deceleración:  $a_z = +0,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ;

$$P = 3083,9 \text{ Pa}$$

Para el fluido en reposo:  $P = 1.000 \times 9,8 \times 0,3 = 2940 \text{ Pa}$  ;

3. Puesto que el nivel del líquido está dado por la ecuación:

$$Z = Z_{\text{inicial}} - \frac{\omega^2 R^2}{4(g + \bar{a}_z)} + \frac{\omega^2 r^2}{2} \frac{1}{g + \bar{a}_z}$$

Para:

$$Z = 0,40 \text{ m} \quad Z_{\text{inicial}} = 0,3 \text{ m}$$

$$a_z = 0 \quad R = 0,06 \text{ m}$$

$$r = R$$

se tiene:

$$0,4 = 0,3 - \frac{\omega^2 0,06^2}{4 \times 9,8} + \frac{\omega^2 0,06^2}{2} \frac{1}{9,8}$$

$$\omega = 32,99 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$$







## **Ecuaciones fundamentales de la Mecánica de Fluidos. Ecuación de continuidad**

### **4.1 Introducción. Ecuación de transporte de Reynolds**

El estado y el movimiento de un fluido se pueden determinar a partir de los principios, las leyes o las hipótesis siguientes:

Principio de conservación de la masa. En un volumen finito, esta es invariable, aunque cambie su posición y su forma.

Variación de la cantidad de movimiento. La variación en la unidad de tiempo de la cantidad de movimiento de un volumen fluido es igual a la resultante de las fuerzas de superficie (presión y viscosidad) y las fuerzas volumétricas y másicas.

Principio de conservación de la energía. La variación de la energía de un volumen de fluido es igual al trabajo de las fuerzas exteriores sobre este, más el calor recibido del exterior por conducción y radiación.

Hipótesis de equilibrio termodinámico local. Existe equilibrio termodinámico local si el estado macroscópico del fluido en cada punto e instante puede ser caracterizado mediante su velocidad  $\vec{V}$  en este punto y las variables termodinámicas de estado  $\rho, T, P, u, s$ , etc. que mediría un observador que se desplazase con la partícula de fluido.

En Mecánica de Fluidos, se puede dar a estas ecuaciones el enfoque del volumen de control finito o el diferencial. Algunas de las principales ventajas y desventajas de utilización de uno y otro enfoque son:



	Ventajas	Desventajas
Formulación diferencial	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Revela todos los detalles del flujo con gran precisión.</li><li>2. El fluido, es obligado a obedecer las leyes fundamentales en todos los puntos.</li><li>3. Para resolver el problema, son necesarias únicamente las condiciones frontera</li><li>4. Proporciona una gran información sobre el fluido.</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Las ecuaciones diferenciales obtenidas son a menudo difíciles o imposibles de resolver de forma analítica.</li><li>2. Es común que las ecuaciones se resuelvan mediante programas de ordenador.</li></ol>
Formulación integral.	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Las ecuaciones matemáticas utilizadas, son relativamente simples.</li><li>2. La información obtenida es aproximada, aunque muy útil. Las hipótesis de trabajo son simples.</li><li>3. El tiempo necesario para obtener una información suficientemente válida es corto.</li></ol>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. No obliga al fluido a obedecer las leyes fundamentales en cada punto del mismo.</li><li>2. Es común que se obtengan solamente respuestas aproximadas.</li><li>3. Requiere más información de entrada, como una distribución de velocidades en las fronteras de control.</li><li>4. Con frecuencia, la información obtenida es menor que la que sería deseable.</li></ol>

La determinación de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos en forma integral se realizará partiendo del teorema de transporte de Reynolds.

Dicho teorema proporciona una manera de identificar un sistema finito y evaluar la velocidad de cambio de cualquier propiedad o característica de dicho sistema, examinando el flujo a través de un volumen de control.

Se define como sistema de control a una masa específica de identidad fija, identificada por su posición en el espacio. La masa puede ser elemental o finita.

El volumen de control es una región finita con fronteras abiertas por las cuales se pueden definir flujos de masa, cantidad de movimiento y energía. Entre estas fronteras, se hace un balance de flujos entrantes, salientes y remanentes.

Con el fin de calcular la velocidad de cambio de una propiedad genérica asociada al fluido dentro del sistema de control, se concibe la manera de identificar un sistema específico en un fluido que se mueve y se deforma, sistema en el que se podrán aplicar,





las leyes fundamentales, la segunda ley de Newton, que estudia la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento en el sistema, y la primera ley de la termodinámica, que se centra en la velocidad de cambio de energía del sistema.

Para calcular la velocidad de cambio de una propiedad genérica asociada al fluido, se define un sistema de control que se desplace con el fluido. Inicialmente, el sistema de control ocupa el mismo volumen que el volumen de control.

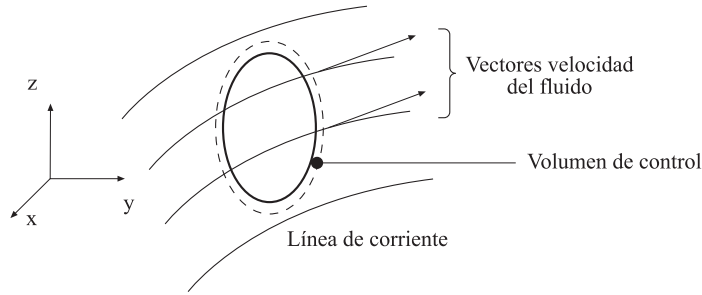


Fig. T 4.1  
Volumen y sistema de control donde se realiza el balance

Las posiciones espaciales de los sistemas y volúmenes de control para diferentes espacios temporales son:

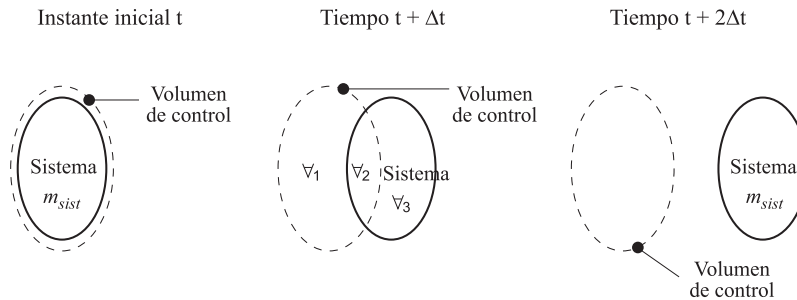


Fig. T 4.2  
Evolución del volumen y sistema de control con el tiempo

Se denomina  $m_{sist}$  a la masa del sistema dentro del volumen de control en el instante inicial.

Se quiere calcular la velocidad de cambio de una propiedad arbitraria  $B$  del sistema.

Sea  $b$  = la propiedad específica por unidad de masa,  $b = \frac{B}{m}$

$$B_{sist} = \int_{m_{sist}} b dm = \int_{V_{sist}} b \rho dV$$

$V$  = volumen del sistema

La rapidez de cambio de la propiedad  $B$  será:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{B_{sist}|_{t+\delta t} - B_{sist}|_t}{\delta t}$$



Al sustituir en la ecuación anterior el valor de B, se tiene:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{\text{sist}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t} - \int_{V_{\text{sist}}} \rho b dV \Big|_t}{\delta t}$$

En el instante t el volumen ocupado por el sistema y el volumen de control son idénticos.

$$V_{\text{sist}} \Big|_t = V_{\text{volumen de control}}$$

En el instante t + δt, se cumple:

$$V_{\text{sist}} \Big|_{t+\delta t} = V_{\text{II}} + V_{\text{III}} = V_{\text{VC}} - V_{\text{I}} + V_{\text{III}}$$

de donde:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{\text{VC}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t} - \int_{V_{\text{I}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t} + \int_{V_{\text{III}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t} - \int_{V_{\text{VC}}} \rho b dV \Big|_t}{\delta t}$$

Esta ecuación se puede escribir de la forma:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{\text{VC}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t} - \int_{V_{\text{VC}}} \rho b dV \Big|_t}{\delta t} + \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{\text{III}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t}}{\delta t} - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_{\text{I}}} \rho b dV \Big|_{t+\delta t}}{\delta t}$$

$\downarrow$   
 Término I

$\downarrow$   
 Término II

$\downarrow$   
 Término III

I. Indica la variación temporal de la propiedad B contenida en el volumen de control (velocidad de acumulación) y se puede expresar:

$$I = \frac{d}{dt} \int_{V_{\text{VC}}} \rho b dV = \frac{d}{dt} (B_{\text{VC}})$$

II. Es la cantidad de propiedad “B” que fluye hacia fuera del volumen de control entre los instantes t y t + dt.

El término II se puede expresar como  $II = \dot{B}_{\text{sal}}$  (flujo másico saliente de la propiedad genérica).

III. Es la cantidad de propiedad B que fluye hacia el volumen de control entre el instante t y t + dt. Sería el flujo másico de propiedad B entrante al volumen de control en un diferencial de tiempo.  $III = \dot{B}_{\text{ent}}$ .

Así pues, la ecuación de variación de propiedad B queda:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{VC}} \rho b dV + \dot{B}_{\text{sal}} - \dot{B}_{\text{ent}}$$



El signo negativo (-) indica que el flujo va hacia dentro del sistema.

Esta ecuación dice que la velocidad de cambio de cualquier propiedad del sistema que ocupe un volumen de control en cualquier instante específico es igual a la velocidad instantánea de acumulación de la propiedad dentro del volumen de control, más la diferencia entre los flujos instantáneos de salida y entrada de dicha propiedad.

Los flujos máscicos a la salida y a la entrada se pueden escribir como:

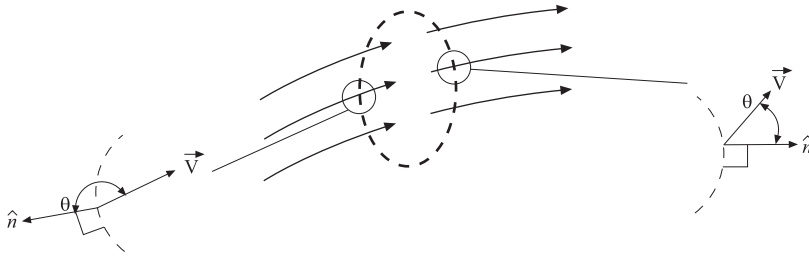


Fig.T 4 3  
Vectores  
velocidad y  
diferencial de  
superficie en  
las regiones de  
entrada y salida  
del sistema de  
control

a) El concepto de flujo máscico saliente se define como:

$$\dot{m}_s = \int_{ss} \rho \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{ss} \rho V \cos \theta ds = \int_{ss} \rho \vec{V} \hat{n} ds$$

Recuérdese que, B es una propiedad asociada a la masa del fluido. Cada unidad de masa que sale del volumen de control lleva b unidades de B en ella. Como b puede no ser uniforme, se puede escribir:

$$\begin{aligned} d\dot{B}_{sal} &= b \cdot (d\dot{m})_{sal} \\ \dot{B}_{sal} &= \int d\dot{B}_{sal} = \int b \cdot (d\dot{m})_{sal} = \int_{ss} b \rho \vec{V} \hat{n} ds = \int_{ss} b \rho V \cos \theta ds = \int_{ss} b \rho \vec{V} d\vec{s} \end{aligned}$$

Véase que, para todo flujo saliente, el valor del  $\cos \theta$  será siempre positivo, puesto que el ángulo  $\theta$  estará siempre comprendido entre 0 y 90 grados.

b) Flujo entrante.

Haciendo lo mismo que para el flujo entrante, se obtiene:

$$\dot{B}_{ent} = \int_{se} b \rho \vec{V} \hat{n} ds = \int_{se} b \rho V \cos \theta ds = \int_{se} b \rho \vec{V} d\vec{s}$$

Obsérvese que, para todo flujo entrante, el valor del  $\cos \theta$  será siempre negativo, puesto que el ángulo  $\theta$  estará siempre comprendido entre 90 y 180 grados.

Sustituyendo en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dB_{sist}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{ss} \rho b \vec{V} \hat{n} ds + \int_{se} \rho b \vec{V} \hat{n} ds = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b dV + \int_{ss} \rho b V \cos \theta ds - \int_{se} \rho b V \cos \theta ds \end{aligned}$$



de donde la ecuación de transporte de Reynolds de manera compacta se puede dar:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\text{vc}} \rho b dV + \oint_{\text{sc}} \rho b \vec{v} d\vec{s}$$

el término  $\oint_{\text{sc}} \rho b \vec{v} d\vec{s}$  representa el flujo neto de propiedad B a través de las fronteras del volumen de control.

## 4.2 Ecuación de continuidad de la masa en forma integral

La determinación de la ecuación de continuidad de la masa se realizará partiendo de la ecuación de transporte de Reynolds. Sea un campo de flujo no estacionario, tridimensional y tridireccional.

La propiedad que se quiere estudiar es la “masa” B = masa. Puesto que se ha definido el sistema de control como un sistema de identidad fija, la masa en el sistema no varía, se establece:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{dm_{\text{sis}}}{dt} = 0$$

La propiedad específica es  $b = \frac{B_{\text{sist}}}{m_{\text{sist}}} = \frac{m_{\text{sis}}}{m_{\text{sis}}} = 1$

Sustituyendo en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\text{vc}} \rho dV + \oint_{\text{sc}} \rho \vec{v} d\vec{s}$$

Siendo esta la ecuación de continuidad en modo integral.

El primer sumando del segundo término representa la velocidad de acumulación o pérdida de masa dentro del volumen de control, mientras que el segundo sumando indica el flujo másico neto a través de las superficies de control.

### 4.2.1 Ecuación de continuidad, en modo diferencial

La ecuación de continuidad en forma diferencial, se puede obtener partiendo de la ecuación en modo integral y aplicando el teorema de la divergencia. Así, la integral de superficie que caracteriza el flujo de masa a través de las superficies de control se puede transformar en una integral de volumen, y se obtiene:

$$\oint_{\text{sc}} \rho \vec{v} d\vec{s} = \int_{\text{vc}} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV$$



con lo que la ecuación de continuidad en modo integral queda:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{VC} \nabla (\rho \vec{V}) dV = 0$$

Puesto que ahora las dos integrales son de volumen, los dos sumandos se pueden escribir dentro de una única integral y, dado que esta integral resultante está igualada a cero, el integrando ha de ser cero, puesto que le diferencial de volumen nunca puede valer cero, de donde se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{V}) = 0$$

siendo esta la ecuación de continuidad de la masa en modo diferencial.

Esta ecuación se puede asimismo representar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{V} + \vec{V} \nabla \rho = 0$$

Y, utilizando el concepto de derivada sustancial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0$$

Cualquiera de las tres versiones precedentes se define como ecuación diferencial de continuidad.

Esta ecuación es válida para cualquier sistema coordenado, siempre y cuando el operador diferencial  $\nabla$  sea el apropiado para el sistema coordenado en estudio.

En concreto, en coordenadas cilíndricas y esféricas, la ecuación de continuidad toma la forma:

Coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0$$

Coordenadas esféricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0$$



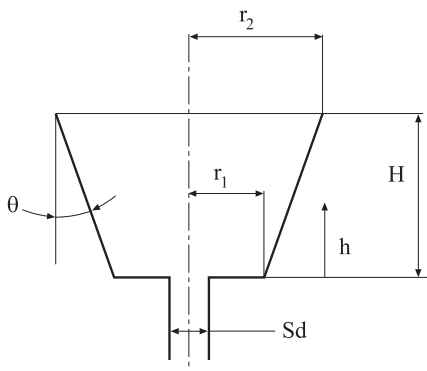
## Problema 13

### Enunciado

Halle la expresión que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito troncocónico de la figura 13.1.

$S_d$  = Superficie del agujero de salida

Fig. 13.1



### Resolución

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

$$0 = \rho \frac{dV}{dt} + \dot{m}_s$$

$$dV = \pi r_1^2 dh$$

$$dV = \pi (r_1 + h \tan(\theta))^2 dh$$

$$\tan \theta = \frac{r_2 - r_1}{H}$$

$$dV = \pi \left( r_1 + h \frac{r_2 - r_1}{H} \right)^2 dh$$

$$\rho \pi \left( r_1 + h \frac{r_2 - r_1}{H} \right)^2 dh = -\dot{m}_s dt$$

$$\dot{m}_s = \rho S_d v = \rho S_d \sqrt{2gh}$$



$$\frac{\rho\pi}{\rho S_d \sqrt{2g}} \int_H^{hf} \left( r_1 + h \frac{r_2 - r_1}{H} \right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int_0^t -dt$$

$$\frac{\pi}{S_d \sqrt{2g}} \int_H^{hf} \left( r_1^2 + 2r_1 h \frac{r_2 - r_1}{H} + h^2 \frac{(r_2 - r_1)^2}{H^2} \right) \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -t$$

$$\frac{\pi}{S_d \sqrt{2g}} \left[ r_1^2 \frac{\sqrt{h}}{1/2} + 2r_1 \frac{r_2 - r_1}{H} \frac{h^{3/2}}{3/2} + \frac{(r_2 - r_1)^2}{H^2} \frac{h^{5/2}}{5/2} \right]_H^{hf} = -t$$

El tiempo de vaciado del depósito será:

$$t = \frac{\pi}{S_d \sqrt{2g}} \left[ r_1^2 \frac{\sqrt{H}}{1/2} + 2r_1 \frac{r_2 - r_1}{H} \frac{H^{3/2}}{3/2} + \frac{(r_2 - r_1)^2}{H^2} \frac{H^{5/2}}{5/2} \right]$$

## Problema 14

### Enunciado

Halle el tiempo que tardará en vaciarse el depósito troncocónico de la figura 14.1, tomando como fluido de trabajo el agua.

$$R_d = 0,1 \text{ m}; h = 1 \text{ m}; \alpha = 15^\circ; S_s = 0,1 \text{ m}^2$$

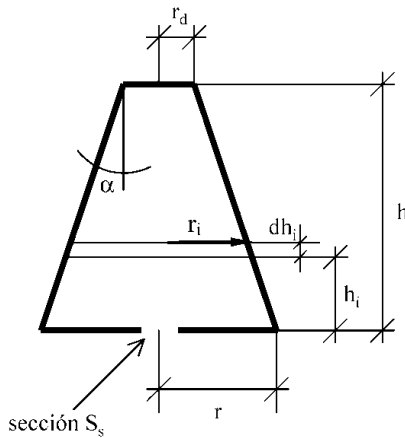


Fig. 14.1

### Resolución

El vaciado del depósito se rige por la ecuación de continuidad:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \vec{V} \cdot \hat{n} dS$$



de donde, considerando el fluido como incompresible, se tiene:

$$0 = \rho \frac{dV}{dt} + \rho V S_s \quad (A)$$

De la figura 14.1 se desprende la relación entre el diferencial de volumen y el diferencial de altura:

$$dV = \pi r_i^2 dh_i$$

Por otro lado, la ecuación que rige la velocidad de salida del fluido por la sección  $S_s$  vendrá dada por:

$$V = \sqrt{2gh_i}$$

Sustituyendo en (A):

$$0 = \frac{\rho \pi r_i^2 dh_i}{dt} + \rho \sqrt{2gh_i} S_s$$

de la figura 1 se desprende la relación entre el radio  $r_i$  y la altura  $h_i$

$$r_i = r_d + \operatorname{tg} \alpha (h - h_i) ,$$

con lo cual se obtiene:

$$\frac{\pi (r_d + \operatorname{tg} \alpha (h - h_i))^2}{dt} dh_i = -\sqrt{2gh_i} S_s$$

cuyas variables son  $h_i$  y  $t$ .

Agrupando variables e integrando  $h_i$  entre los límites 0 y  $h$ , y el tiempo entre 0 y  $t$ , se obtiene:

$$\pi (r_d + \operatorname{tg} \alpha (h - h_i))^2 dh_i = -\sqrt{2gh_i} S_s dt$$

$$\left[ r_d^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (h - h_i)^2 + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha (h - h_i) \right] dh_i = -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} h_i^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\left[ r_d^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha (h^2 - 2 h h_i + h_i^2) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha h - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha h_i \right] dh_i = -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} h_i^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\int_h^0 \left[ \frac{r_d^2}{h_i^{\frac{1}{2}}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{(h^2 - 2 h h_i + h_i^2)}{h_i^{\frac{1}{2}}} + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h}{h_i^{\frac{1}{2}}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h_i}{h_i^{\frac{1}{2}}} \right] dh_i = \int_0^t -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} dt$$





$$\left[ r_d^2 \frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \left( h^2 \frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 h \frac{h_i^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h_i^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha h \frac{h_i^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h_i^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_h^0 = \left[ -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} t \right]_0^t$$

$$- \left( r_d^2 \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = -\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi} t$$

Podemos aislar el valor de  $t$  en función de todas las demás variables que son conocidas.

$$t = \left( r_d^2 \frac{h^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{h^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 r_d \operatorname{tg} \alpha \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2g} \frac{S_s}{\pi}}$$

Y, sustituyendo los valores, se obtiene:

$$t = \left( 0,1^2 \operatorname{m}^2 \frac{1^{\frac{1}{2}} \operatorname{m}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 0,268^2 \left( \frac{1^{\frac{5}{2}} \operatorname{m}^{\frac{5}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \frac{1^{\frac{3}{2}} \operatorname{m}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1^{\frac{5}{2}} \operatorname{m}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + \right. \\ \left. + 2 \cdot 0,1 \operatorname{m} \cdot 0,268 \frac{1^{\frac{3}{2}} \operatorname{m}^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 0,1 \operatorname{m} \cdot 0,268 \frac{1^{\frac{3}{2}} \operatorname{m}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2 \times 9,81 \operatorname{m/s}^2} \frac{0,1 \operatorname{m}^2}{\pi}}$$

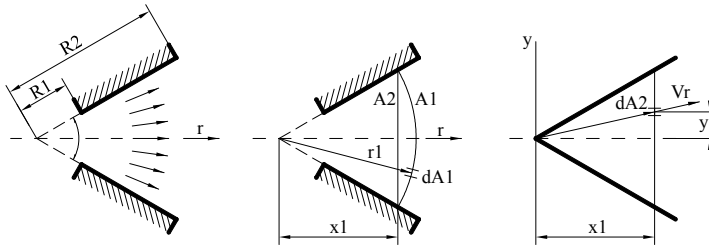
$$t = 1,19 \operatorname{s}$$

## Problema 15

### Enunciado

Sea un fluido no viscoso de densidad constante que fluye a través de un difusor bidimensional cuya profundidad es  $b$ , se sabe que la velocidad tiene únicamente componente radial  $V = N/r$ ; y que  $N = \text{cte}$ . Halle el caudal volumétrico para una de las superficies siguientes:  $r = r_1 = \text{cte.}$ ;  $x = x_1 = \text{cte.}$

Fig. 15.1



### Resolución

El caudal volumétrico viene dado por:

$$Q = \int_S V_n dA$$



Para la superficie  $r = r_1 = \text{cte}$ .

$V$  es perpendicular al elemento diferencial de área  $d_A$ ;

$$d_A = b r_1 d\theta$$

Sustituyendo:

$$Q = \int_{-\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{N}{r_1} b r_1 d\theta = [N b \theta]_{-\theta_{\min}}^{\theta_{\max}}$$

$Q = N b (\theta_{\max} + \theta_{\min}) = 2 N b \theta_{\max}$ , puesto que el difusor es simétrico respecto al eje X.

El caudal másico será  $\dot{m} = Q \rho = \rho 2 N b \theta_{\max}$

Para hallar el caudal en la superficie  $x = x_1$ , se deberán utilizar las relaciones: (v. figura 15.1):

$$V_n = V \cos \theta; \quad dA = b dy; \quad r = \sqrt{x_1^2 + y^2}$$

Integrando únicamente en la mitad superior:

$$Q = 2 \int_0^{y_{\max}} V \cos \theta (b dy)$$

$$Q = 2b \int_0^{y_{\max}} \frac{N \cdot \cos \theta}{\sqrt{x_1^2 + y^2}} dy$$

$$\cos \theta = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y^2}}$$

$$Q = 2b \int_0^{y_{\max}} \frac{N \cdot x_1}{x_1^2 + y^2} dy = 2b N x_1 \left( \frac{1}{x_1} \arctg \left( \frac{y}{x_1} \right) \right) \Bigg|_0^{y_{\max}}$$

$$Q = 2b N \arctg \left( \frac{y_{\max}}{x_1} \right); \quad \text{tg } \theta_{\max} = \frac{y_{\max}}{x_1}$$

$$Q = 2b N \arctg(\text{tg}(\theta_{\max}))$$

$Q = 2b N \theta_{\max}$  que es la misma respuesta que en el caso anterior, lo cual es lógico, pues para una sección de paso que abarque todo el campo de fluido y siempre que la densidad sea constante el caudal volumétrico será constante.



## Problema 16

### Enunciado

Halle la ecuación diferencial que determina el tiempo de vaciado del depósito de la figura, donde se han realizado varios agujeros para la salida del fluido:

Punto 1. Diámetro  $D_1$ ; altura del centro del agujero respecto a la base del depósito  $H_1$ .

Punto 2. Diámetro  $D_2$ ; agujero en la base.

Punto 3. Diámetro  $D_3$ ; altura del centro del agujero respecto a la base del depósito  $H_3$ .

$H$ =Nivel del líquido en el depósito para  $t=0$ .

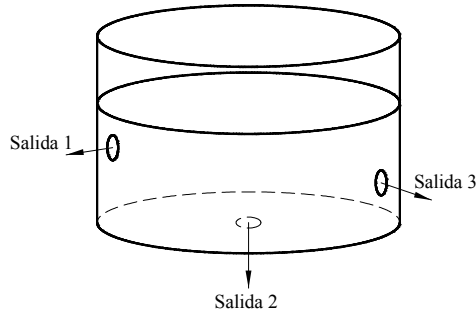


Fig. 16.1

### Resolución

Para hallar la ecuación diferencial que determina el tiempo de vaciado del depósito de la figura, se aplicará la ecuación de continuidad en forma integral:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 ; \quad dV = s_D dh$$

$s_D$  = Superficie del depósito cilíndrico

Aplicando la ecuación de continuidad al depósito de la figura 16.1, se tiene:

$$\rho s_D \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{s_1} (\rho \sqrt{2g(h-H_1)}) ds_1 + \int_{s_2} (\rho \sqrt{2gh}) ds_2 + \int_{s_3} (\rho \sqrt{2g(h-H_3)}) ds_3 = 0$$

Resolviendo las integrales, se obtiene la ecuación siguiente:

$$\rho s_D \frac{dh}{dt} + (\rho \sqrt{2g(h-H_1)}) s_1 + (\rho \sqrt{2gh}) s_2 + (\rho \sqrt{2g(h-H_3)}) s_3 = 0$$



con lo cual, la ecuación diferencial requerida tendrá la forma:

$$-\frac{dt}{s_D} = \frac{dh}{\left(\sqrt{2g(h-H_1)}\right)s_1 + \left(\sqrt{2gh}\right)s_2 + \left(\sqrt{2g(h-H_3)}\right)s_3}$$

Véase que para la resolución de esta ecuación diferencial se dan tres casos posibles. El primer caso se define para un nivel de líquido en el depósito comprendido entre una altura  $H$  genérica y una altura  $H_1$ . El nivel del líquido en el depósito para el segundo caso estará comprendido entre las alturas  $H_1$  y  $H_3$ . Cuando el nivel del líquido esté comprendido entre las alturas  $H_3$  y  $0$ , se definirá el tercer caso.

Así, para el primer caso, la ecuación diferencial anterior se integrará entre los límites:

$$\int_0^t -\frac{dt}{s_D} = \int_H^{H_1} \frac{dh}{\left(\sqrt{2g(h-H_1)}\right)s_1 + \left(\sqrt{2gh}\right)s_2 + \left(\sqrt{2g(h-H_3)}\right)s_3}$$

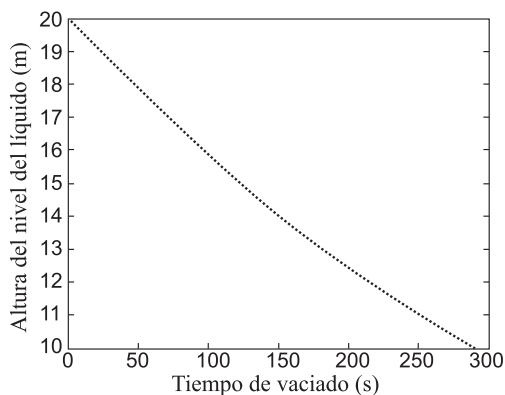
Dicha ecuación debe resolverse numéricamente y de ella se obtendrá la variación temporal  $t_1$  del nivel del líquido en el depósito entre una altura genérica  $H$  y la altura  $H_1$ .

Esta ecuación se resolvió utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden y para los siguientes valores:

$$H=20 \text{ m}; \quad H_1=10 \text{ m}; \quad H_3=5 \text{ m}; \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0,0001 \text{ m}^2; \quad S_0 = 0,5 \text{ m}^2.$$

La variación temporal de la altura del nivel del líquido en el depósito entre los valores inicial  $H = 20 \text{ m}$  y el valor final  $H_1 = 10 \text{ m}$  se detalla en la gráfica siguiente.

Fig. 16.2



Cuando el nivel del líquido llegue a la salida 1, la ecuación diferencial quedará: (Caso 2).

$$\int_0^t -\frac{dt}{s_D} = \int_{H_1}^{H_3} \frac{dh}{\left(\sqrt{2gh}\right)s_2 + \left(\sqrt{2g(h-H_3)}\right)s_3}$$



Obsérvese que se ha situado el origen de tiempos cuando el nivel del líquido en el depósito es  $H_1$ .

La ecuación diferencial anterior se puede dar como

$$\int_0^t -\frac{dt}{S_D} = \int_{H_1}^{H_3} \frac{dh}{(a\sqrt{h}) + (b\sqrt{(h-c)})}$$

donde:  $a = S_2\sqrt{2g}$ ;  $b = S_3\sqrt{2g}$ ;  $c = H_3$ ,

Integrando, se obtiene:

$$-\frac{t_2}{S_D} = \left[ \frac{2ba c \operatorname{arctg} \left( \frac{(-b^2 + a^2)\sqrt{h-c}}{a\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right)}{-b^2 + a^2} + \frac{2ba c \operatorname{arctg} \left( \frac{(-b^2 + a^2)\sqrt{h}}{b\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right)}{(a-b)(a+b)\sqrt{c(-b^2 + a^2)}} \right]_{H_1}^{H_3}$$

ecuación que caracteriza el tiempo de vaciado del depósito cuando el nivel del líquido esté comprendido entre los valores  $H_1$  y  $H_3$ .

Por otro lado, cuando la altura del nivel del líquido llegue a la salida 3, la ecuación diferencial aplicable será

$$\int_0^t -\frac{dt}{S_D} = \int_{H_3}^0 \frac{dh}{(\sqrt{2gh})s_2}$$

$$t_3 = S_D \frac{2\sqrt{H_3}}{S_2\sqrt{2g}}$$

Véase que el tiempo  $t_1$  es relevante cuando la altura del líquido en el depósito oscila entre una altura genérica y  $H_1$ ; el tiempo  $t_2$  caracteriza la variación temporal del nivel del fluido en el depósito para alturas comprendidas entre  $H_1$  y  $H_3$ , mientras que el tiempo  $t_3$  caracterizará el nivel del líquido para alturas comprendidas entre  $H_3$  y cero.

## Problema 17

### Enunciado

La densidad del gas que fluye a través de un conducto de sección constante  $S$  y longitud  $X$  varía de acuerdo con la ley:

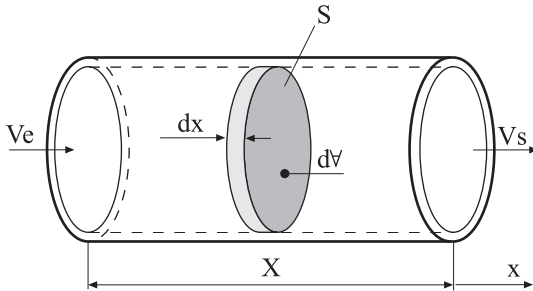


$$\rho = \rho_1 \left( 1 - \frac{x}{2X} \right) \sin \frac{v_1 t}{X} \quad \frac{X}{v_1} \frac{\pi}{2} > t \geq 0$$

$$0 \leq x \leq X$$

Donde  $V_1$  y  $\rho_1$  son la velocidad y la densidad de referencia; por ejemplo, la velocidad y la densidad del fluido a la entrada del conducto.

Fig. 17.1



Halle la diferencia de flujo másico que entra y sale del conducto en función del tiempo.

### Resolución

La ecuación de continuidad se expresa:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV + \int_{ss} \rho \vec{v} d\vec{s} + \int_{se} \rho \vec{v} d\vec{s} ;$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = - \int_{ss} \rho \vec{v} d\vec{s} - \int_{se} \rho \vec{v} d\vec{s} = \int_{se} \rho v \cos \theta \cdot ds - \int_{ss} \rho v \cos \theta \cdot ds ;$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \dot{m}_e - \dot{m}_s ;$$

La variación de flujo másico se obtendrá de resolver esta ecuación, de donde:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_0^X \rho_1 \left( 1 - \frac{x}{2X} \right) \sin \frac{v_1 t}{X} \cdot S dx = \frac{d}{dt} \rho_1 \sin \frac{v_1 t}{X} S \int_0^X \left( 1 - \frac{x}{2X} \right) dx = \\ &= \frac{d}{dt} \rho_1 \sin \frac{v_1 t}{X} S \left[ x - \frac{x^2}{4X} \right]_0^X = \frac{d}{dt} \rho_1 \sin \frac{v_1 t}{X} \cdot S \frac{3}{4} X = \\ &= S X \rho_1 \frac{3}{4} \cos \frac{v_1 t}{X} \frac{v_1}{X} ; \text{ simplificando} \end{aligned}$$



$$\dot{m}_e - \dot{m}_s = \frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = S \rho_1 \frac{3}{4} v_1 \cos \frac{v_1 t}{X}$$

Por otro lado, si en lugar de realizar el proceso de integración inicialmente y luego el de derivación se realiza a la inversa, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_0^X \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) \sin \frac{v_1 t}{X} S dx = \int_0^X S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx \left[ \frac{d}{dt} \sin \frac{v_1 t}{X} \right] =$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = \int_0^X S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{2X}\right) dx \left[ \cos \frac{v_1 t}{X} \frac{v_1}{X} \right] =$$

Integrando:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c} \rho dV = S \rho_1 \left(1 - \frac{x}{4X}\right)_0^X \left[ \cos \frac{v_1 t}{X} \frac{v_1}{X} \right] = S \rho_1 \frac{3}{4} V_1 \cos \frac{v_1 t}{X}$$

Obsérvese que en ambos casos se obtiene el mismo resultado.

## Problema 18

### Enunciado

En el esquema de la figura 18.1, halle la ecuación diferencial que determina la variación temporal de presión en la cámara del cilindro, conocidas las ecuaciones de los caudales de fuga,  $Q_{L1}$ ;  $Q_{L2}$ .

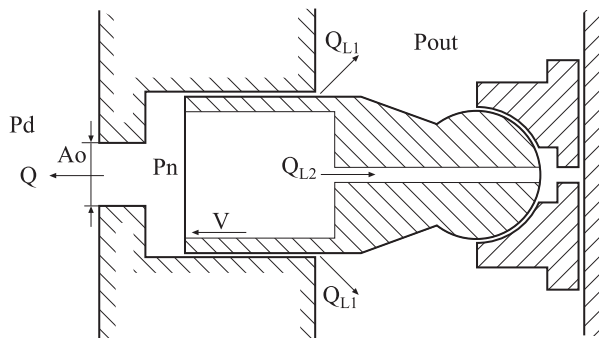


Fig. 18.1

### Resolución

La ecuación de continuidad en modo integral y régimen transitorio se enuncia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \oint_{sc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \, dV + \int_{s_0} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_1} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_2} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} = 0$$

puesto que la densidad y el volumen de control dependen del tiempo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{vc} dV + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} dV + \int_{s_0} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_1} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} + \int_{s_2} \rho \, \vec{V}_r \, d\vec{s} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} V + \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \dot{m}_{\text{salida } 0} + \dot{m}_{\text{salida } 1} + \dot{m}_{\text{salida } 2} = 0$$

$$\beta = -V \frac{dp}{dV} = -\frac{V}{m} \frac{dp}{d\left(\frac{V}{m}\right)} = -v \frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\left(\frac{1}{\rho}\right)} = \rho \frac{dp}{d\rho};$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\beta}; \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \frac{d\rho}{dt};$$

$$\frac{\rho}{\beta} V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho Q_{\text{salida } 0} + \rho Q_{L1} + \rho Q_{L2} = 0$$

Despejando la densidad:

$$\frac{V}{\beta} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} + Q_{\text{outlet } 0} + Q_{L1} + Q_{L2} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\beta}{V} \left( -Q_{\text{salida } 0} - Q_{L1} - Q_{L2} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (A)$$

$$\frac{dV}{dt} = S \frac{dx}{dt} = S V_{\text{velocidad}};$$

La variación temporal de presión en la cámara cilíndrica puede ser determinada si se conocen las ecuaciones de los caudales de fuga en función de la presión  $P_n$  necesiéndose también el valor temporal del volumen de la cámara del cilindro.

A modo de ejemplo, y para el pistón de la figura 18.2, estas ecuaciones se podrían dar de la siguiente manera:

Suponiendo que en  $t = 0$  el pistón se halla en el PMI (punto muerto inferior), el volumen temporal de la cámara del cilindro se puede dar como:

$$V = V_0 + S_{\text{pistón}} R_p \tan(\alpha) (\cos(\omega t) - 1)$$





Y por tanto:

$$\frac{d\forall}{dt} = -S_{\text{pistón}} R_p \tan(\alpha) \sin(\omega t) \omega$$

Donde:

$\forall_0$  es el volumen del cilindro en el punto muerto inferior.

$\omega$  = velocidad de giro de la bomba.

$R_p$  = radio del plato inclinado.

$\alpha$  = ángulo de inclinación del plato inclinado.

El caudal de salida del fluido hacia el exterior de la bomba se da por:

$$Q_{\text{salida } 0} = \text{signo de } (P_{\text{in}} - P_{\text{Tank}}) C_d A_0 \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{\text{in}} - P_{\text{Tank}})};$$

$C_d$  = coeficiente de descarga

$A_0$  = Área de salida.

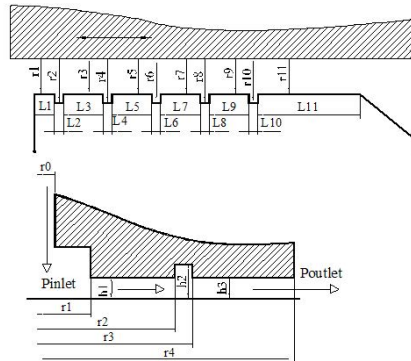


Fig. 18.2  
Conjunto pistón  
y patín  
deslizante

Para el pistón de la figura 18.2, el caudal de fugas temporal viene dado por la ecuación:

$$Q_{L1} = \pi D \left[ \frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega}{2} \right] +$$

$$- \frac{\pi D}{12} \left[ \frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{in}} - 6 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega \mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \left( l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11} - \frac{0,0195}{2} - R_p \tan \alpha \cos(\omega t) \right) + \mu \left[ \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right]} \right]$$

Obsérvese que el caudal depende de la velocidad temporal del pistón y de la longitud del pistón en el interior del cilindro.



Para el patín deslizante de la figura 18.2, y considerando que el patín se desliza paralelo al plato inclinado, el caudal de fugas vendrá dado por:

$$Q_{L2} = \frac{\pi}{6\mu} \frac{P_{in} - P_{Tank}}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}$$

La integración de la ecuación diferencial (A) con las correspondientes ecuaciones asociadas da lugar a la variación de presión en la cámara del pistón, en función del tiempo.

## Problema 19

### Enunciado

El esquema que se muestra a continuación representa un pistón que impulsa fluido hacia un acumulador. Para el estado inicial, se conocen tanto la posición del pistón como la del émbolo del acumulador, sus secciones  $S_{pistón}$ ,  $S_{émbolo}$ , así como las condiciones iniciales de los dos fluidos:

$$P_0; T_0; \rho_0; h_0; \quad P_{N_2 0}; T_{N_2 0}; \rho_{N_2 0}; \forall_{N_2 0}$$

La velocidad de desplazamiento temporal del pistón se puede dar como  $V = K \text{ seno}(t)$ , donde  $K$  es una constante a determinar. La variación temporal del volumen del cilindro inferior se representa:  $\forall = \frac{S_{pistón} h_0}{2} (1 + \cos(t))$ , donde  $h_0$  es la longitud inicial de la cámara del pistón.

Se pide:

1. Hallar la ecuación diferencial que caracteriza la variación temporal de la presión en la cámara del pistón, sabiendo que la válvula (A) situada en el acumulador está abierta y permite que pequeñas cantidades de fluido fluyan hacia la atmósfera. Considerar que este caudal de fugas es pequeño, comparado con el flujo proveniente del pistón. Considerar asimismo que el émbolo que separa el nitrógeno del aceite esta bloqueado y no se puede mover. Determinar la constante  $K$ .
2. Si la válvula (A) está cerrada, y Para el caso en que el émbolo que separa el aceite y el nitrógeno esté inmóvil, determinar la ecuación que caracteriza la variación temporal de presión en el sistema.
3. Si el émbolo del acumulador tiene en la parte superior nitrógeno a presión, la válvula (A) está cerrada, y dicho émbolo se puede mover libremente, determinar el conjunto



de ecuaciones diferenciales que caracteriza el desplazamiento temporal del émbolo. Razonar las hipótesis realizadas.

- Determinar cómo varían la posición del émbolo y la presión del nitrógeno con el tiempo, si se tiene en cuenta que el aceite se puede considerar incompresible. La válvula A está cerrada.

Recordar que el fluido ( $N_2$ ), es un gas ideal.

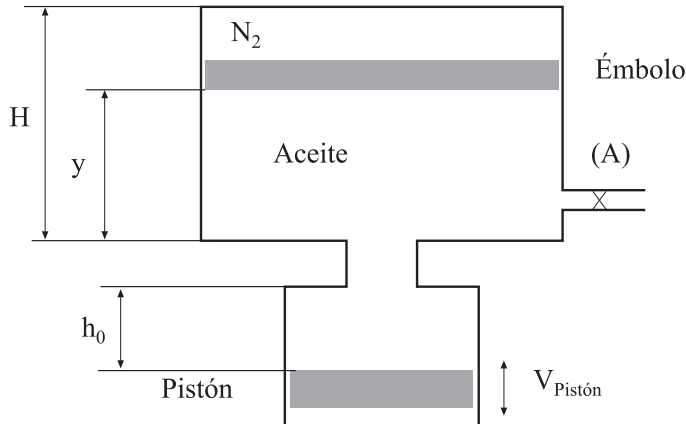


Fig. 19.1  
Conjunto de  
pistón y  
acumulador

## Resolución

- La ecuación de continuidad en modo integral establece

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

Según el enunciado, el volumen de la parte superior se considerará constante:

$$\forall \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{piston}} \cdot \frac{\partial h_{\text{piston}}}{\partial t} + \rho \cdot V_s \cdot S_s = 0$$

$$(\forall_{\text{embolo}} + \forall_{\text{piston}}) \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot S_{\text{Piston}} \cdot V_{\text{piston}} + \rho \cdot V_s \cdot S_s = 0$$

Considerando que el fluido que atraviesa la válvula mantiene su densidad constante, la velocidad del fluido por la válvula se puede dar en función del gradiente de presiones entre extremos de la misma.

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[ -\rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - \rho \cdot S_{\text{salida}} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_{\text{aceite}} - P_{\text{ext}})}{\rho}} \right] \cdot \frac{1}{(\forall_{\text{émbolo}} + \forall_{\text{pistón}})}$$



La relación entre la variación de densidad y la variación de presión, viene dada en función del módulo de compresibilidad volumétrico, de donde

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{\beta} \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dP_{\text{aceite}}}{dt} = \left[ -S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t) - S_{\text{salida}} \sqrt{\frac{2 \cdot (P_{\text{aceite}} - P_{\text{ext}})}{\rho}} \right] \cdot \frac{\beta}{(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}})}$$

Esta es la ecuación diferencial que da la presión del aceite en función del tiempo. Se ha considerado que, a través de la válvula, el flujo es siempre saliente.

A priori, en esta ecuación, la densidad del aceite se considerará la inicial y constante, aunque la mejor manera de afrontar el tema es conocer la ecuación que determina la variación de densidad con la presión.

Véase asimismo que, según el enunciado  $\nabla_{\text{pistón}} = \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_0}{2} \cdot (1 + \cos(t))$

El valor de la constante K se puede determinar:

$$\frac{\partial \nabla_{\text{pistón}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{pistón}} \partial h}{\partial t} = S_{\text{pistón}} V_{\text{pistón}};$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial \nabla_{\text{pistón}}}{\partial t} = \frac{S_{\text{pistón}} h_0}{2} (-\sin(t));$$

$$\frac{S_{\text{pistón}} h_0}{2} (-\sin(t)) = S_{\text{pistón}} K \sin(t); \quad K = -\frac{h_0}{2}$$

2. Cuando la válvula (A) está cerrada y el émbolo se mantiene estático, la presión temporal del aceite será

$$\nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) = 0$$

$$\nabla \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = - \frac{S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t) \cdot \beta}{\nabla_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_0}{2} \cdot (1 + \cos(t))}$$



Ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{C \cdot \sin(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \quad \text{donde:} \quad \begin{aligned} C &= S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \beta \\ A &= V_{\text{embolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \\ B &= \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{P_{\text{in}}}^P P = \int_{t=0}^t -\frac{C \cdot \sin(t)}{A + B \cdot \cos(t)} \longrightarrow P - P_{\text{inicial}} = \frac{C}{B} \cdot \ln(A + B \cdot \cos(t))_0^t =$$

$$= \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$

Variación temporal de la presión:

$$P = P_{\text{inicial}} + \frac{C}{B} \cdot \ln\left(\frac{A + B \cdot \cos(t)}{A + B}\right)$$

3. Puesto que ahora el émbolo superior se desplaza, de la ecuación de continuidad se obtiene

$$\nabla_{(e+p)} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) = 0$$

$$(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \nabla_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial \nabla_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$(\nabla_{\text{émbolo}} + \nabla_{\text{pistón}}) \cdot \frac{dP}{dt} \cdot \frac{\rho}{\beta} + \rho \cdot S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy}{dt} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = \left[ -S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} - S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} \right] \frac{\beta}{\left( S_{\text{émbolo}} \cdot y_{\text{émbolo}} + \frac{S_{\text{pistón}} \cdot h_o}{2} \cdot (1 + \cos(t)) \right)}$$

donde:

$$S_{\text{émbolo}} \cdot \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = \frac{\partial \nabla_{\text{émbolo}}}{\partial t}$$

Las variables para este caso son: presión aceite; presión  $N_2$ ;  $y_{\text{émbolo}}$ ;  $t$ .

Para un proceso adiabático, la relación presión-volumen del nitrógeno será

$$P_{N_2} = P_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left( \frac{V_{N_2 \text{ inicial}}}{V_{N_2}} \right)^\gamma$$

$$V_{N_2} = V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$



$$S_{\text{émbolo}} (H - y) = V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

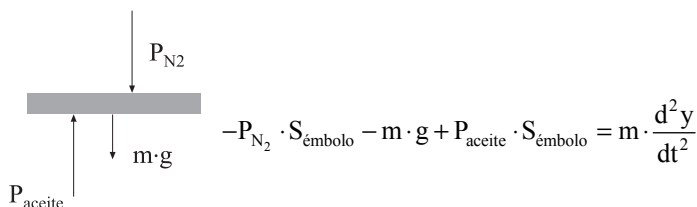
Diferenciando esta ecuación respecto al tiempo, se tiene

$$\frac{dV_{N_2}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = -V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

$$\frac{dV_{N_2}}{dt} = S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} = V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{(P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}}}{(P_{N_2})^{\frac{1}{\gamma}+1}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt}$$

El balance de fuerzas en el émbolo se enuncia del modo siguiente: considérese que el émbolo tiene una masa “m”.

Fig. 19.2  
Diagrama de  
fuerzas del  
émbolo



Sistema de ecuaciones que ha de resolverse conjuntamente y numéricamente.

4. Si el fluido se considerase incompresible:

$$\rho \cdot \frac{\partial V_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial V_{\text{pistón}}}{\partial t} = 0$$

$$\rho \cdot \frac{\partial V_{\text{émbolo}}}{\partial t} + \rho \cdot S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = 0$$

$$\rho S_{\text{émbolo}} \frac{dy}{dt} + \rho S_{\text{pistón}} K \sin t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-S_{\text{pistón}} K \sin t}{S_{\text{émbolo}}}$$

$$\int_{Y_{\text{inicial}}}^{Y_{\text{final}}} dy = \int_{t=0}^t \frac{-S_{\text{pistón}} K \sin t}{S_{\text{émbolo}}} dt$$

$$Y_{\text{final}} - Y_{\text{inicial}} = \frac{S_{\text{pistón}} K}{S_{\text{émbolo}}} [\cos t - 1]$$

Puesto que el Nitrógeno es un gas ideal se tiene:



$$\left( \frac{V_{N_2}}{V_{N_2 \text{ inicial}}} \right)^\gamma = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}}$$

$$V_{N_2} = \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_{N_2 \text{ inicial}}$$

Teniendo presente que

$$\frac{\partial V_{\text{émbolo}}}{\partial t} = - \frac{\partial V_{N_2}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_{N_2}}{dt} &= - \frac{dV_{\text{émbolo}}}{dt} = -S_{\text{émbolo}} \frac{dy_{\text{émbolo}}}{dt} = S_{\text{pistón}} \frac{dh_{\text{pistón}}}{dt} = S_{\text{pistón}} V_{\text{pistón}} = \\ &= -V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \left( \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right)} \cdot \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}}{P_{N_2}^2} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} \\ &= -V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot (P_{N_2 \text{ inicial}})^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} \cdot \frac{1}{P_{N_2}^{\left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right)}} \cdot \frac{dP_{N_2}}{dt} = S_{\text{pistón}} \cdot V_{\text{pistón}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \sin(t) \\ &= -V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot (P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \int_{P_{N_2 \text{ inicial}}}^{P_{N_2}} \frac{dP_{N_2}}{P_{N_2}^{\left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right)}} = S_{\text{pistón}} \cdot K \cdot \int_{t=0}^t \sin(t) \cdot dt \\ &= -V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot (P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \frac{P_{N_2}^{-\left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right) + 1}}{-\left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right) + 1} \right]_{P_{N_2 \text{ inicial}}}^{P_{N_2}} = S_{\text{pistón}} K [-\cos t]_0^t \\ &= -V_{N_2 \text{ inicial}} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot (P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{P_{N_2}^{-\left( \frac{1}{\gamma} \right)} - P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left( \frac{1}{\gamma} \right)}}{-\frac{1}{\gamma}} = -S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1] \\ &P_{N_2}^{-\left( \frac{1}{\gamma} \right)} = \frac{-S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]}{V_{N_2 \text{ inicial}} (P_{N_2 \text{ inicial}})^{\frac{1}{\gamma}}} + P_{N_2 \text{ inicial}}^{-\left( \frac{1}{\gamma} \right)} \end{aligned}$$

Reordenando, se obtiene

$$P_{N_2}^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} = \frac{P_{N_2 \text{ inicial}}^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)}}{1 - \frac{S_{\text{pistón}} K [\cos t - 1]}{V_{N_2 \text{ inicial}}}}$$

ecuación que relaciona la variación de la presión del nitrógeno con el tiempo.

→ 5





## Ecuaciones fundamentales. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

### 5.1 Forma integral

Esta ecuación fundamental, se obtiene combinando el teorema de transporte de Reynolds con la segunda ley del movimiento de Newton para un fluido que fluye a través de un volumen de control finito.

La propiedad genérica B que se definía en la ecuación de transporte de Reynolds es, en este caso, la cantidad de movimiento:  $B = \vec{M} = m\vec{v}$ .

Así, la variación temporal de la propiedad genérica B en el sistema de control será:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d\vec{M}_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{sis}}$$

Obsérvese que la variación temporal de la cantidad de movimiento en el sistema de control, mediante la segunda ley de Newton, da lugar a la suma de fuerzas que actúan sobre dicho sistema.

$\vec{M}_{\text{sist}}$  es la cantidad de movimiento del sistema.

$\sum \vec{F}_{\text{sis}}$  es la suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema de control, que para un tiempo t dado se confunde con el volumen de control.

Si la propiedad B se ha definido como la cantidad de movimiento  $\vec{M}$ , la propiedad por unidad de masa b será la velocidad del fluido  $\vec{V}$ .

Sustituyendo en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\sum \vec{F}_{\text{vc}} = \frac{d}{dt} \int_{\text{vc}} \rho \vec{V} dV + \oint_{\text{sc}} \rho \vec{V} \vec{V}_t d\vec{s}$$

siendo esta es la ecuación de cantidad de movimiento lineal, que se expresa del modo siguiente:



La suma de fuerzas que actúan sobre el volumen de control ha de ser igual a la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento en el volumen de control más el flujo neto de cantidad de movimiento a través de las fronteras del volumen de control.

$\sum \vec{F}$  representa la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre la masa dentro del volumen de control; en general, son las fuerzas másicas y superficiales.

Para un sistema inercial de coordenadas, las fuerzas másicas se reducen a las gravitatorias.

$$\sum \vec{F} = \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{gravedad}}}_{\vec{F}_{\text{masicas}}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{\text{presión}} + \sum \vec{F}_{\text{cortante}}}_{\vec{F}_{\text{superficiales}}}$$

de donde cada uno de los términos de fuerza se puede definir como:

$$\sum \vec{F}_{\text{gravedad}} = \int_{\text{vc}} \rho \vec{g} dV = \text{fuerza por unidad de masa.}$$

$\sum \vec{F}_{\text{presión}} + \sum \vec{F}_{\text{cortante}}$  se denominan fuerzas de superficie o fuerzas intrínsecas, puesto que actúan sobre la superficie del volumen de control.

$$\sum \vec{F}_{\text{presión}} = - \oint_{\text{sc}} P d\vec{s}$$

La dirección de la fuerza debida a la presión en un elemento diferencial de superficie es la opuesta al vector normal a la superficie.

Las fuerzas cortantes sobre el fluido se calculan como:

$$\sum \vec{F}_{\text{cortante}} = \oint_{\text{sc}} \vec{\tau}_{ij} ds$$

El signo de la fuerza lo da la dirección íesima asociada a los esfuerzos cortantes. Recuerdese que la ecuación de cantidad de movimiento tiene carácter vectorial.

Así, la ecuación integral de cantidad de movimiento, teniendo en cuenta su carácter vectorial, tomará la forma:

$$\int_{\text{vc}} \rho \vec{g} dV - \oint_{\text{sc}} P d\vec{s} + \oint_{\text{sc}} \vec{\tau}_{ij} ds = \frac{d}{dt} \int_{\text{vc}} \rho \vec{V} dV + \oint_{\text{sc}} \rho \vec{V} \vec{V}_r d\vec{s}$$

## 5.2 Forma diferencial de la ecuación de cantidad de movimiento

Un método rápido para determinar la ecuación de cantidad de movimiento en modo diferencial, es partir de la ecuación en modo integral y transformar las integrales de superficie en integrales de volumen.

La ecuación integral de cantidad de movimiento se expresa:



$$\int_{VC} \rho \vec{g} dV - \oint_{SC} p d\vec{s} + \oint_{SC} \vec{\tau}_{ij} ds = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \oint_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V}_r d\vec{s})$$

Al transformar todas las integrales de superficie de la ecuación integral de cantidad de movimiento en integrales de volumen, utilizando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$-\oint_{SC} p d\vec{s} = -\int_{VC} \nabla p dV$$

$$\oint_{SC} \vec{\tau} ds = \int_{VC} \nabla \cdot \vec{\tau} dV$$

$$\oint_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{V}_r d\vec{s} = \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}_r) dV$$

de donde, sustituyendo en la ecuación integral de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V} dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}_r) dV = -\int_{VC} \nabla p dV + \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{VC} \nabla \cdot \vec{\tau} dV$$

Diferenciando los dos términos con respecto al volumen, se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}_r) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\tau}$$

El término izquierdo de esta ecuación se puede dar:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}_r) + \rho (\vec{V}_r \nabla) \vec{V} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}_r \nabla) \vec{V} \right] + \vec{V} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}_r) \right]$$

Según la ecuación de continuidad:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}_r) = 0$

con lo que el término restante representa la derivada material del vector velocidad:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V}_r \nabla) \vec{V} = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}_r \nabla) \vec{V} \right] = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Así, la ecuación de cantidad de movimiento en modo diferencial tomará la forma:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\tau}$$

Esta es la ecuación de cantidad de movimiento en modo diferencial, ecuación aplicable a cualquier tipo de fluido. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de Cauchy*.

Para el caso de que el fluido sea ideal, es decir, sin viscosidad, se establece:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g}$$



Esta ecuación se denomina *ecuación de Euler*, y es válida tanto para fluido incompresible como para compresible.

La ecuación de Cauchy, es, tal y como se ha representado en este apartado, irresoluble, puesto que los esfuerzos cortantes son desconocidos. Con el fin de solucionar este problema, es necesario relacionar los esfuerzos viscosos con la velocidad de deformación, siendo la constante de proporcionalidad, la viscosidad del fluido.

En flujos multidimensionales y multidireccionales el esfuerzo cortante es proporcional a la velocidad de deformación angular, y el esfuerzo viscoso normal es proporcional a la velocidad de deformación normal (volumétrica).

Así, las relaciones esfuerzo-velocidad de deformación se pueden dar, (véase el tensor de deformación en el capítulo de cinemática):

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \phi = \text{deformación angular}; \quad \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 2\mu\phi = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right); \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\mu\phi = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z};$$

De hecho, los esfuerzos normales comprenden dos términos, el primero caracteriza la deformación lineal del elemento diferencial, mientras que el segundo evalúa la deformación volumétrica definida como la suma de los gradientes de velocidad a lo largo de los tres ejes coordenados, así:

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$\lambda$  recibe el nombre de segundo coeficiente de viscosidad, su valor es pequeño, siendo una buena aproximación, según Stokes,  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ .

Sustituyendo los esfuerzos normales y cortantes en el lado derecho de la ecuación de Cauchy se obtiene, caso de coordenadas cartesianas y para la dirección x:



$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Operando se llega:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

sustituyendo en las ecuaciones de Cauchy y extendiéndolo a los demás ejes coordenados se obtendrá:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x + \\ \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &+ \mu \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y + \\ \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &+ \mu \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z + \\ \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &+ \mu \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Navier-Stokes, y son válidas para fluido compresible.

En forma vectorial, estas ecuaciones se expresan:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \vec{V})$$

Recuérdese que cada término tiene unidades de fuerza por unidad de volumen.

Obsérvese por otro lado, que el término:

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] \text{ Representa la divergencia de la velocidad.}$$

Con lo que para fluido incompresible, las ecuaciones de Navier-Stokes tomarán la forma.



$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones junto con la de continuidad forman un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $u, v, w, p$ ).

Las ecuaciones de Navier-Stokes para fluido incompresible y en forma vectorial se dan como:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Es necesario tener presente que estas ecuaciones pueden darse en coordenadas cartesianas, cilíndricas o esféricas.

Con el fin de completar este apartado, se presenta a continuación las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x) = 0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}&\rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \\ &= \rho \vec{g}_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \\ &\rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) \\ &= \rho \vec{g}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \\ &\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_x}{r \partial \theta} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) = \rho \vec{g}_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right]\end{aligned}$$

Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(\rho v_\phi) = 0$$



Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas.

$$\begin{aligned}
 & \rho \left( \frac{\partial V_R}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \phi} - \frac{V_\theta^2 + V_\phi^2}{R} \right) \\
 &= \rho g_R - \frac{\partial p}{\partial R} + \mu \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V_R}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_R}{\partial \theta} \right) \right] + \\
 & \mu \left[ \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \phi^2} - \frac{2V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{2V_\theta \cot \theta}{R^2} - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right] \\
 \\
 & \rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} - \frac{V_R V_\theta}{R} - \frac{V_\phi^2 \cot \theta}{R} \right) \\
 &= \rho g_\theta - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \right] + \\
 & \mu \left[ \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \right] \\
 \\
 & \rho \left( \frac{\partial V_\phi}{\partial t} + V_R \frac{\partial V_\phi}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} + \frac{V_\phi}{R \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_\phi V_R}{R} + \frac{V_\theta V_\phi \cot \theta}{R} \right) \\
 &= \rho g_\phi - \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left[ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial V_\phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta} \right) \right] + \\
 & \mu \left[ \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{V_\phi}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_R}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right]
 \end{aligned}$$

### 5.3 Ecuación de cantidad de movimiento en forma integral y para sistemas no inerciales de coordenadas

Al analizar los flujos atmosféricos para la predicción del clima, los meteorólogos han de tener en cuenta que un volumen de control fijo a la superficie de la Tierra, tiene una aceleración pequeña con respecto a las estrellas alejadas que se pueden considerar fijas, debido a la rotación de la Tierra.

El análisis de la cantidad de movimiento del movimiento de un fluido a través de un volumen de control que se acelera, ha de tener presente que un sistema de coordenadas fijo con respecto al volumen de control no es inercial.

La figura siguiente muestra un volumen de control fijo con respecto a un marco de referencia no inercial,  $x', y', z'$ . El marco no inercial se mueve con respecto a un marco de referencia inercial  $x, y, z$ .

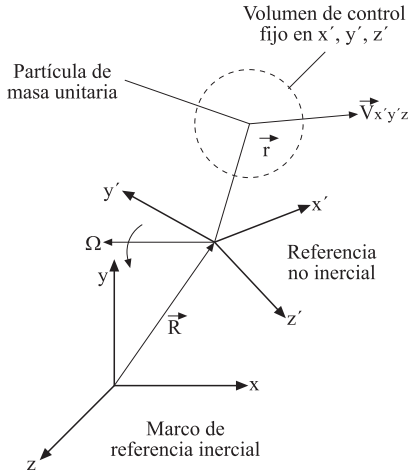


Cabe recordar que la segunda ley de Newton, solo se puede aplicar a un marco inercial  $x, y, z$ .

Para el sistema que instantáneamente ocupa el volumen de control, se tiene:

$$\frac{d}{dt}(\bar{M}_{SIST})_{xyz} = \sum \bar{F}.$$

Fig. T 5.1  
Marcos de  
referencia  
inercial y no  
inercial



Con el fin de desarrollar una expresión para la velocidad de cambio de la cantidad de movimiento del sistema, se considerará primero una partícula de masa individual dentro del volumen de control.

La cantidad de movimiento  $\bar{M}_{XYZ}$  de esta partícula se define como el producto de su masa elemental por su velocidad:

$$\delta \bar{M}_{xyz} = (\delta_m) \cdot \bar{V}_{xyz}$$

Del primer término de la ecuación de transporte de Reynolds, se tiene:

$$\sum \bar{F}_{XYZ} = \frac{dB_{sc XYZ}}{dt} = m \frac{d\bar{V}_{XYZ}}{dt} = \int_{vc} \rho \frac{d\bar{V}_{XYZ}}{dt} dV$$

La variación temporal de la velocidad para un sistema inercial de coordenadas, en función de la velocidad de la partícula en un sistema no inercial, se define:

$$\frac{d\bar{V}_{xyz}}{dt} = \frac{d\bar{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r}$$

siendo  $\bar{\Omega}$  la velocidad angular del sistema de coordenadas no inercial.

La suma de fuerzas para el sistema no inercial adopta la forma:

$$\sum \bar{F}_{XYZ} = \int_{vc} \rho \left\{ \frac{d\bar{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} \right\} dV$$





$$\sum \bar{F}_{XYZ} = \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d\bar{V}_{x'y'z'}}{dt} \right\} dV + \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} \right\} dV$$

Obsérvese que el primer sumando del segundo término caracteriza la fuerza que el fluido realiza sobre el sistema de referencia móvil, y se puede decir:

$$\sum \bar{F}_{XYZ} = \sum \bar{F}_{x'y'z'} + \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} \right\} dV$$

ecuación que, según lo establecido previamente para sistemas no inerciales de coordenadas, se puede representar:

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{XYZ} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{V}_{(i)x'y'z'} dV + \oint_{SC} \rho \bar{V}_{(i)x'y'z'} \bar{V}_{x'y'z'} d\bar{s} + \\ &\int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} \right\} dV \end{aligned}$$

de donde la segunda ley de Newton para un volumen de control que está fijo con respecto a un marco de referencia no inercial se convierte en:

$$\begin{aligned} -\oint_{SC} P d\bar{s} + \oint_{SC} \bar{\tau} d\bar{s} + \int_{VC} \rho \bar{g} dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{V}_{(i)x'y'z'} dV + \oint_{SC} \rho \bar{V}_{(i)x'y'z'} \bar{V}_{x'y'z'} d\bar{s} \\ &+ \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} + \bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} + 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} \right\} dV \end{aligned}$$

siendo:

$$\frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \text{ aceleración de un sistema de coordenadas con respecto a otro.}$$

$$\frac{d\bar{\Omega}}{dt} \wedge \bar{r} \text{ aceleración debida a la velocidad de giro variable, aceleración tangencial.}$$

$$\bar{\Omega} \wedge \bar{\Omega} \wedge \bar{r} \text{ aceleración centrípeta.}$$

$$2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_{x'y'z'} \text{ aceleración de Coriolis.}$$

## 5.4 Ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial para sistemas no inerciales

De forma análoga a la utilizada en el caso de coordenadas inerciales, para la determinación de la ecuación de cantidad de movimiento en forma diferencial y coordenadas no inerciales, se parte de la ecuación de cantidad de movimiento en modo integral y coordenadas no inerciales.



En coordenadas no inerciales, la ecuación de cantidad de movimiento se ha definido como:

$$-\oint_{SC} P d\vec{s} + \oint_{SC} \vec{\tau} ds + \int_{VC} \rho \vec{g} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{V}_{(i) x'y'z'} dV + \oint_{SC} \rho \vec{V}_{(i) x'y'z'} \cdot \vec{V}_{x'y'z'} d\vec{s} \\ + \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia o de Gauss/Ostrogradsky y diferenciando la ecuación resultante con respecto al volumen se obtiene:

$$-\nabla P + \nabla \vec{\tau} + \rho \vec{g} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}_i) + \nabla (\rho \vec{V}_i \cdot \vec{V}) + \rho \left\{ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\}$$

Los dos términos, después de la igualdad, se pueden dar como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}_i) + \nabla (\rho \vec{V}_i \cdot \vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + \vec{V}_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V}_i \nabla (\rho \vec{V}) + \rho (\vec{V} \nabla) \vec{V}_i \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}_i) + \nabla (\rho \vec{V}_i \cdot \vec{V}) = \rho \left[ \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}_i \right] + \vec{V}_i \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{V}) \right]$$

Recordando la ecuación diferencial de continuidad y el concepto de derivada material, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}_i) + \nabla (\rho \vec{V}_i \cdot \vec{V}) = \rho \left[ \frac{D\vec{V}_i}{Dt} \right]$$

Desde el punto de vista genérico, para el caso tridimensional, se puede establecer que:

$$\rho \left[ \frac{D\vec{V}_i}{Dt} \right] = \rho \left[ \frac{D\vec{V}}{Dt} \right]$$

con lo que la ecuación de cantidad de movimiento genérica, en modo diferencial y para un sistema de referencia no inercial, queda:

$$-\nabla P + \nabla \vec{\tau} + \rho \vec{g} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \rho \left\{ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\}$$

Cabe recordar que cada uno de esos términos representa fuerzas por unidad de volumen.



## Problema 20

### Enunciado

El chorro de agua que sale por una tobera es de 10 mm de diámetro y choca contra una superficie semiesférica. Halle la fuerza que hay que realizar para que la superficie semiesférica no sufra desplazamiento alguno. Aplíquelo para el caso de que el caudal volumétrico entrante sea de  $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ . Comente las hipótesis realizadas.

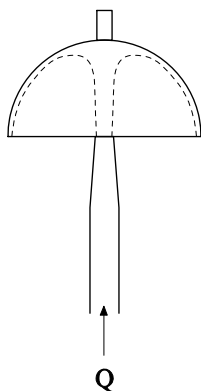
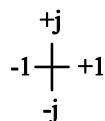


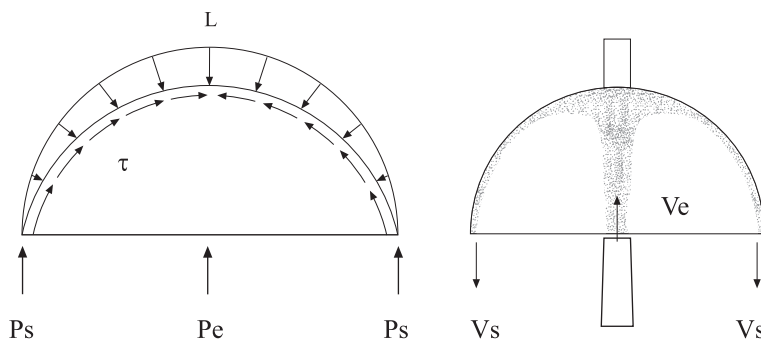
Fig. 20.1



### Resolución

El empuje que el chorro de fluido ejerce sobre la superficie semiesférica tiene la misma magnitud y sentido contrario a la fuerza que hay que ejercer para que la semiesfera no se desplace. La figura 20.2 muestra un esquema de las fuerzas actuantes sobre la semiesfera.

La ecuación de cantidad de movimiento establece:

Fig. 20.2  
Fuerzas que actúan sobre la semiesfera

$$F_y = - \int_{S_e} P d\vec{S}_j - \int_{S_s} P d\vec{S}_j + \underbrace{\int_{S_l} \bar{\tau} d\vec{S}_j - \int_{S_l} P d\vec{S}_j}_{F_{LY}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \bar{v} dV + \int_{S_c} \rho \bar{v} \bar{v} \hat{n} dS$$



trabajando en presiones relativas y régimen permanente.

$$F_{Ly} = \int_{S_e} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \int_{S_s} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = -\dot{m} (v_e + v_s)$$

Suponiendo que la velocidad de entrada y salida del agua en el volumen de control es la misma.

$$F_{Ly} = -2 \dot{m} v_e = -2 \rho Q v_e$$

Siendo esta la expresión de la fuerza de reacción en función del caudal de entrada.

Para agua y un caudal entrante de  $0,001 \text{ m}^3/\text{s}$ , la fuerza tendrá un valor de:

$$F_{Ly} = -25,46 \text{ N}$$

## Problema 21

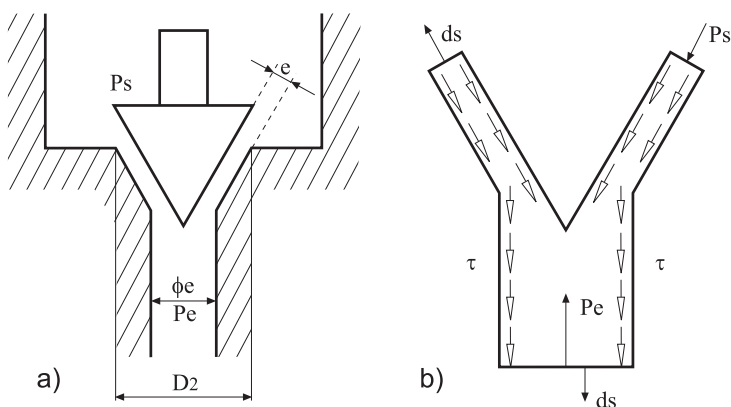
### Enunciado

Dado el esquema de la figura, que representa el flujo de un fluido, que se puede considerar incompresible, a través de una válvula de asiento cónico, y sabiendo que la relación de presiones entrada-salida es  $P_e$ - $P_s$ ; determine la fuerza debida a la cantidad de movimiento que se ejerce sobre la corredera cónica.

Denomínese el flujo volumétrico circulante  $Q$ ; la densidad del fluido  $\rho$ ; el diámetro del conducto del flujo entrante,  $D_e$ , y la distancia perpendicular entre la superficie lateral del cono y el asiento cónico  $e$ . Supóngase que el ángulo del cono es  $\alpha$ .

Fig. 21.1 a)

Fig. 21.2 b)



### Resolución

Son conocidos los siguientes datos:  $Q$ ,  $\rho$ ,  $P_e$ ,  $P_s$ ,  $D_e$  y  $D_2$



La ecuación de cantidad de movimiento en dirección y será:

$$\sum F_{ext_y} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s}$$

Desarrollando la expresión anterior, se obtiene:

$$\sum F_{ext_y} = \int_{se} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s} + \int_{ss} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v}_r \cdot d\bar{s} = -\rho \cdot v_{y_e} \cdot v_e \cdot s_e + \rho \cdot v_{y_s} \cdot v_s \cdot s_s$$

Resolviendo para el caso en estudio (v. figura 21.3):

$$\sum F_{ext_y} = -\rho \cdot v_e^2 \cdot s_e + \rho \cdot v_s^2 \cdot s_s \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

A continuación, se determinan las variables necesarias para resolver la expresión anterior:

$$v_e = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D_e^2}{4}} ; \quad v_s = \frac{Q}{s_s} ; \quad r_1 = r_2 - e \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right)$$

La superficie saliente tendrá un valor (v. figuras 21.4, 21.5 y 21.6) de:

$$ds = \int 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dl ; \quad ds = \int_{r_1}^{r_2} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{dr}{\sin \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)} ;$$

$$s_s = \frac{2 \cdot \pi}{\sin \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{2} \quad s_s = \frac{\pi \cdot (r_2^2 - r_1^2)}{\sin \left( 90 - \frac{\alpha}{2} \right)}$$

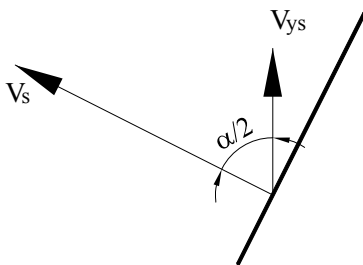


Fig. 21.3

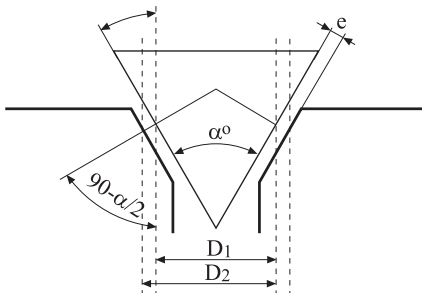


Fig. 21.4



Fig. 21.5

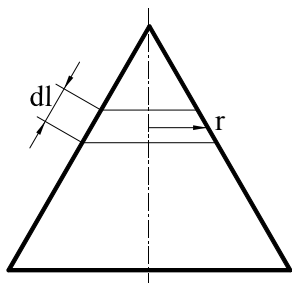
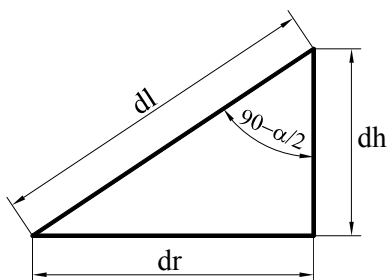


Fig. 21.6



Por otro lado, las fuerzas superficiales que actúan sobre el volumen de control se enuncian:

$$\sum F_{ext_y} = - \int_{sc} P_e \cdot \vec{n} \cdot ds - \int_{ss} P_s \cdot \vec{n} \cdot ds + \underbrace{\int_{sl} P_l \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_{sl} \vec{\tau} \cdot ds}_{\sum F_{ly}} \quad (2)$$

con lo cual, igualando las expresiones (1) y (2), se obtiene la ecuación siguiente:

$$\sum F_{ly} = \rho \cdot s_s \cdot v_s^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 + \int_{ss} P_s \cdot ds - \int_{sc} P_e \cdot ds$$

Resolviendo las integrales, se llega a:

$$\begin{aligned} \sum F_{ly} = & \rho \cdot v_s^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} (r_2^2 - r_1^2) - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 - P_e \cdot s_e + \\ & + P_s \cdot \frac{\pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} (r_2^2 - r_1^2) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

Agrupando términos, se obtiene:

$$F_{ly} = \frac{\pi}{\sin\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot (P_s + \rho \cdot v_s^2) - \rho \cdot s_e \cdot v_e^2 - P_e \cdot s_e$$



## Problema 22

### Enunciado

En la figura 22.1 se ha representado la sección recta de un azud con algunas dimensiones principales. Suponiendo que en las secciones de corriente señaladas por líneas de trazos las distribuciones de velocidad son uniformes y conocidas, se pide determinar la fuerza que la corriente realiza sobre el azud. Considérese que el azud tiene una profundidad  $L$  y que la altura del nivel del líquido es de 10 m.

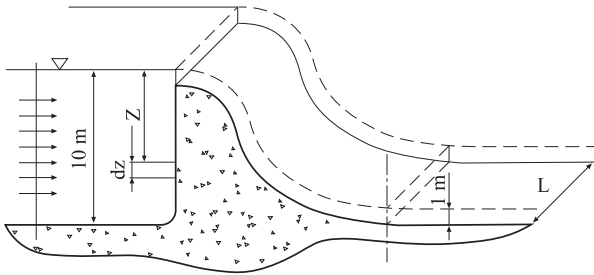


Fig. 22.1  
Sección  
transversal de  
un azud

### Resolución

Dado que el enunciado indica que las distribuciones de velocidad son uniformes, el flujo másico circulante será:

$$\dot{m} = \rho Q = \rho s v = \rho l L v = \rho L v$$

La fuerza que la corriente ejerce sobre el azud se podrá determinar aplicando el principio de conservación de cantidad de movimiento al volumen de control englobado entre las dos superficies marcadas en líneas a trazo discontinuo.

La ecuación de cantidad de movimiento en régimen permanente se establece:

$$\int_V \rho g dV + \int_{SL} \bar{\tau} d\bar{s} - \int_{SL} p d\bar{s} - \int_{SE} p d\bar{s} - \int_{SS} p d\bar{s} = \oint_{SC} \rho \bar{v}_x \bar{v} d\bar{s}$$

Las fuerzas másicas no tendrán componente respecto al eje de abscisas, con lo cual:

$$F_x = \int_{SE} p d\bar{s} + \int_{SS} p d\bar{s} + \oint_{SC} \rho \bar{v}_x \bar{v} d\bar{s}$$

Los términos que definen la fuerza debida a la distribución de presiones en la entrada y la salida son:

$$F_{SE} = - \int_{SE} p d\bar{s} = - \int_0^{10} \rho g z L dz = - \rho g L \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{10} = - \rho g L 50$$

$$F_{SS} = - \int_{SS} p d\bar{s} = \int_0^1 \rho g z L dz = \rho g L \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \rho g \frac{L}{2}$$



El flujo de cantidad de movimiento entre las secciones de entrada y salida del volumen de control es:

$$\int_{SE} \rho \vec{v}_x \cdot \vec{v} d\vec{s} = -\rho v_E Q$$

$$\int_{SS} \rho \vec{v}_x \cdot \vec{v} d\vec{s} = \rho v_S Q$$

Sustituyendo los cuatro términos en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$F_x = -\rho g L \frac{50}{2} + \rho g \frac{L}{2} - \rho v_E Q + \rho v_S Q$$

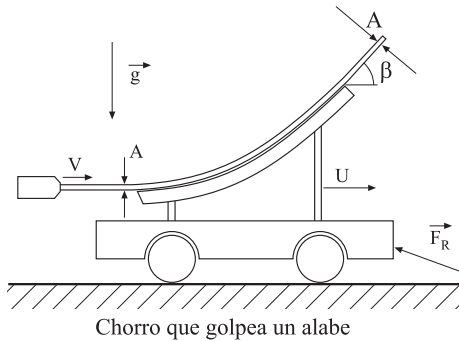
Obsérvese que la fuerza que se obtiene es la fuerza de reacción, la que ejerce el contorno sobre el fluido.

## Problema 23

### Enunciado

El álabe curvo de la figura se mueve a una velocidad constante absoluta  $U$ . Un chorro de agua fluye de la boquilla estática con una velocidad constante  $V$ , e incide sobre el álabe. Hallar el valor de la fuerza antagonista  $F_R$  que el álabe ejerce sobre el fluido. Considerar despreciables las fuerzas gravitatorias.

Fig. 23.1  
Esquema del  
chorro de fluido  
que impacta  
sobre un álabe  
móvil



### Resolución

Para resolver este problema, se debe utilizar la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, la cual se expresa del modo siguiente:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}_i (\rho \cdot dV) + \int_{SC} \vec{v}_i (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS)$$

Descomponiendo esta ecuación en sus términos direccionales X e Y,





$$\Sigma \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S});$$

$$\Sigma \vec{F}_Y = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot d\forall) + \int_{S.C} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

Véase que, para este problema, la densidad del fluido se mantendrá constante.

La fuerza buscada será  $\vec{F}_R = \vec{F}_X + \vec{F}_Y$

Recuérdese que

$v_i$  = componente  $i$ ésima de la velocidad del fluido respecto del sistema de referencia.

$v_r$  = velocidad de entrada o salida de la superficie, velocidad del fluido respecto a la superficie de estudio.

Los sistemas de referencia pueden ser móviles o fijos.

Los volúmenes de control pueden ser deformables o indeformables.

Según lo expuesto, se tienen cuatro posibilidades para resolver este problema:

- Sistema de referencia fijo, volumen de control indeformable.
- Sistema de referencia móvil, volumen de control indeformable.
- Sistema de referencia fijo, volumen de control deformable.
- Sistema de referencia móvil, volumen de control deformable.

A continuación, se expone la resolución del problema mediante los cuatro casos propuestos.

1. Sistema de referencia fijo, volumen de control indeformable.

Para este caso, el volumen de control se considera indeformable y se desplaza a la misma velocidad del álabe,  $U$ , conforme a la figura siguiente.

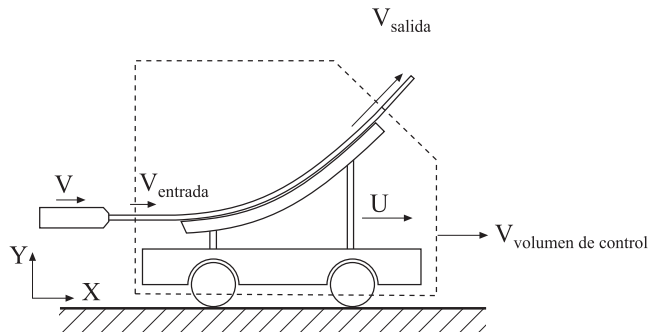


Fig. 23.2  
Esquema para  
el caso 1

En el dibujo anterior se observa:

La velocidad a la que se desplaza el volumen de control es  $V_{v.c} = U$ .

La velocidad a la que el fluido atraviesa la superficie de entrada del volumen de control es,  $V_e = (V-U)$ , velocidad medida respecto a la superficie de control elegida.



Para hallar la velocidad a la que el fluido sale del volumen de control, respecto a la velocidad a la que entra, se utilizará la ecuación de continuidad de la masa entre la entrada y la salida del volumen de control.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \cdot dV + \int_{SC} \rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}$$

puesto que, para el volumen de control elegido, no existen variaciones temporales de masa, la ecuación de continuidad tomará la forma

$$\int_{S,S} \rho \cdot \vec{v}_s \cdot d\vec{S} = \int_{S,E} \rho \cdot \vec{v}_e \cdot d\vec{S} \Rightarrow \rho \cdot v_s \cdot S_s = \rho \cdot v_e \cdot S_e$$

Dado que las secciones de paso del fluido y las densidades del mismo a la entrada y salida son iguales, queda:

$$v_s = v_e = V - U$$

De la ecuación de cantidad de movimiento en dirección X, para un volumen de control indeformable, a velocidad y densidad constantes, se tiene

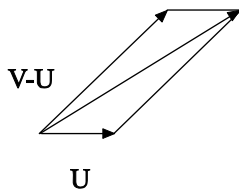
$$\sum \vec{F}_X = \int_{S,C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) \rightarrow F_X = \rho \cdot v_{isx} \cdot v_s \cdot S_s - \rho \cdot v_{iex} \cdot v_e \cdot S$$

donde:

$$V_{iex} = V;$$

$$V_{isx} = U + (V - U) \cos(\beta) \text{ véase la figura adjunta}$$

Fig. 23.3



$$F_x = \rho \cdot (U + (V - U) \cos(\beta)) \cdot (V - U) \cdot S_s - \rho \cdot V \cdot (V - U) \cdot S_e = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Operando, se obtiene

$$F_x = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Esta es la fuerza que el álabe ejerce sobre el fluido, fuerza de reacción. Para que el carrito se desplace a velocidad constante, las fuerzas sobre el mismo han de estar equilibradas y puesto que las fuerzas de rozamiento  $F_r$  son las que impiden el movimiento, la componente horizontal de dichas fuerzas tendrá un valor

$$F_r = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

La componente vertical de la fuerza actuante sobre el carrito se determina: (Véase que no existirán variaciones temporales de cantidad de movimiento en el volumen de control elegido).

$$\sum \vec{F}_Y = \int_{S,C} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$



Dado que la componente en dirección Y de la velocidad del fluido en la sección de entrada del volumen de control es nula, la ecuación se reducirá a

$$\sum \vec{F}_Y = \int_{SS} \vec{v}_{iY} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) = V_{iSY} (\rho V_r S_s) = \rho (V - U) \sin\beta (V - U) S_s$$

Puesto que se han despreciado las fuerzas másicas, esta es la ecuación que caracteriza la fuerza vertical que el carrito ejerce sobre el fluido.

2. Sistema de referencia móvil y con velocidad U, fijado al carrito.

Volumen de control indeformable, que se desplaza a velocidad U, según la figura adjunta.

Las velocidades de entrada y salida del volumen de control serán las mismas que en el apartado anterior, puesto que el volumen de control es idéntico y se mueve a la misma velocidad.

$$V_s = V_e = V - U$$

En este caso, no obstante,  $V_{iex} = V - U$  ya que es la velocidad que tiene el fluido al entrar a la superficie respecto al sistema de referencia escogido.

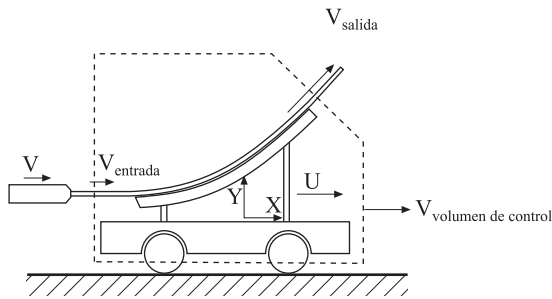


Fig. 23.4  
Esquema para  
el caso 2

Para el presente caso,  $V_{isx} = (V - U) \cdot \cos(\beta)$ , que es la velocidad de salida descompuesta en dirección x. La velocidad de salida es la velocidad relativa a la superficie de salida, que en este caso se mueve a la misma velocidad que el sistema de referencia.

Volviendo a la ecuación simplificada de cantidad de movimiento en dirección x,

$$\sum \vec{F}_X = \int_{S.C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) \rightarrow F_X = \rho \cdot v_{isx} \cdot v_s \cdot S_s - \rho \cdot v_{iex} \cdot v_e \cdot S$$

$$F_x = \rho \cdot (V - U) \cos(\beta) \cdot (V - U) \cdot S_s - \rho \cdot (V - U) \cdot (V - U) \cdot S_e = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

$$F_x = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1)$$

Se obtiene la misma solución que en el apartado anterior.

La componente de la fuerza en dirección Y se determina del mismo modo que en el apartado anterior, con lo que se obtiene

$$\sum F_Y = \rho V_{iY} V_s S_s = \rho S_s (V - U) \sin\beta (V - U)$$

resultado idéntico al hallado anteriormente.



### 3. Sistema de referencia fijo, volumen de control deformable.

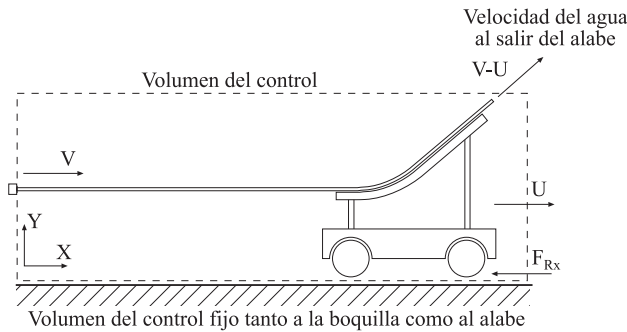
La superficie de entrada se mantiene fija  $V = 0$  y la superficie de salida es móvil y se desplaza a la velocidad del carrito  $U$ .

Para este caso, se observa que existe variación temporal del volumen de control. Las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad toman, respectivamente, las formas:

$$\Sigma \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot dV) + \int_{S.C} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_C} (\rho \cdot dV) + \int_{S.C} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

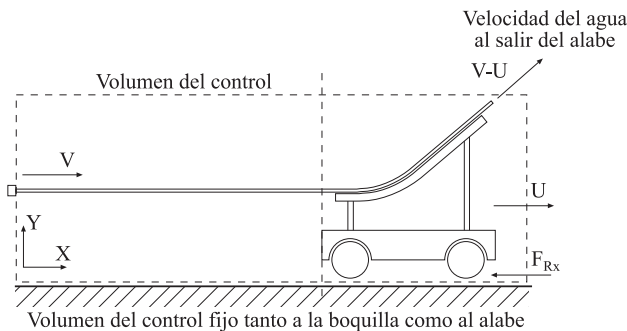
Fig.23.5  
Esquema para  
el caso 3



Para obtener la velocidad de salida del fluido del volumen de control, se utilizará la ecuación de conservación de la masa.

Con el fin de que se entienda mejor la resolución, se procede a dividir el volumen de control en dos volúmenes: las dimensiones del primero variarán temporalmente, mientras que las del segundo, el cual engloba el álabe, se mantendrán constantes a lo largo del tiempo, (véase la figura siguiente).

Fig. 23.6  
Esquema para  
el caso 3,  
donde se  
especifican los  
dos volúmenes  
de control



El volumen de control total se denomina  $\nabla_T$ , el de la izquierda  $\nabla_1$  y el de la derecha  $\nabla_2$ . La superficie que comparten  $\nabla_1$  y  $\nabla_2$  se mueve a una velocidad  $U$ .

La ecuación de conservación de la masa se expresa:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_1} (\rho \cdot dV) + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nabla_2} (\rho \cdot dV) + \int_{ST} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$



La variación temporal de la masa en el volumen de control 2 es nula, con lo que

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_2} (\rho \cdot dV)$$

Los términos restantes de la ecuación de continuidad dan lugar a

$$0 = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} (V_1) - \rho \cdot v_e \cdot S_e + \rho \cdot v_s \cdot S_s \Rightarrow 0 = \rho \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial t} (x) - \rho \cdot v_e \cdot S_e + \rho \cdot v_s \cdot S_s$$

Se observa que  $\frac{\partial}{\partial t} (x) = U$

Y se obtiene

$$0 = \rho \cdot S \cdot U - \rho \cdot v_e \cdot S_e + \rho \cdot v_s \cdot S_s$$

Puesto que las secciones y densidades a la entrada y salida son iguales, se obtiene que la velocidad a la salida será

$$V_s = V_e - U \Rightarrow V_s = V - U$$

Véase que la velocidad a la salida del volumen de control es la misma que la obtenida en los apartados anteriores.

Aplicando ahora la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, y para un sistema de referencia fijo

$$\Sigma \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot dV) + \int_{SC} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

Al igual que sucedía con la ecuación de continuidad, la variación temporal de cantidad de movimiento para el volumen de control 2 es nula, de donde

$$\Sigma \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot dV) + \int_{ST} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

$V_{iX}$  en el término temporal corresponde a la velocidad del fluido en el volumen de control referido al sistema de referencia correspondiente, para este apartado  $V_{iX} = V$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \vec{V} (\rho \cdot dV) = V \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} dV = V \rho S \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} dx = V \rho S U.$$

El término de flujo de cantidad de movimiento a través de las superficies del volumen de control quedará

$$\int_{ST} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) = \rho V_{iSX} V_S S_S - \rho V_{ieX} V_e S_e$$

donde

$$V_{iex} = V; \quad V_{isx} = U + (V-U) \cos(\beta); \quad V_e = V; \quad V_s = (V-U).$$



Sustituyendo los diversos términos en la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\sum F_X = \rho \cdot V U S + \rho \cdot V_{isx} \cdot V_s \cdot S - \rho \cdot V_{iex} \cdot V_e \cdot S$$

$$\sum F_X = \rho \cdot V U S + (U + (V-U) \cos(\beta)) \cdot (V-U) \cdot S - \rho \cdot V \cdot V \cdot S$$

de donde, operando, se obtiene

$$F_X = \rho \cdot (V-U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta)-1)$$

Obsérvese que la solución es la misma que en los casos anteriores.

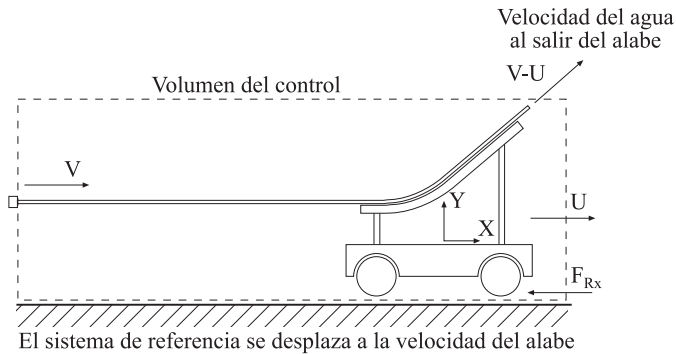
La componente de fuerza en dirección Y se obtiene de la misma forma que en los casos anteriores, dado que el volumen de control no se desplaza en dirección vertical; así:

$$\sum F_Y = \rho V_{isy} V_s S_s = \rho S_s (V-U) \sin \beta (V-U)$$

4. Sistema de referencia móvil, volumen de control deformable, que se desplaza a velocidad U.

La superficie de entrada del volumen de control se mantiene fija, mientras que la superficie de salida se desplaza a la misma velocidad que el álabe.

Fig. 23.7  
Esquema para  
el caso 4



El análisis de la ecuación de continuidad de la masa es el mismo que en el apartado anterior, ya que esta no depende del sistema de referencia.

$$V_s = V_e - U \Rightarrow V_s = V - U$$

Se observa que la velocidad de salida es la misma que en los apartados anteriores.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, y para un sistema de referencia móvil, se tiene

$$\sum \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot dV) + \int_{SC} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot dS)$$

Descomponiendo el volumen de control en uno indeformable y otro deformable, se tiene



$$\Sigma \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot dV) + \int_{ST} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S})$$

$V_{ix}$  en el término temporal corresponde a la velocidad del fluido en el volumen de control, referido al sistema de referencia correspondiente. Puesto que ahora el sistema de referencia es móvil, la velocidad del fluido en la zona deformable del volumen de control, medida respecto a un eje de coordenadas que se desplaza a velocidad  $U$ , es

$$V_{ix} = V - U$$

$$\Sigma \vec{F}_X = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} (V - U) (\rho \cdot dV) = \rho (V - U) \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} dV = \rho (V - U) S \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} dx = \rho (V - U) S U$$

Al igual que en los apartados anteriores, el término de flujo de cantidad de movimiento a través de las superficies del volumen de control se expresa del modo siguiente:

$$\int_{ST} \vec{v}_{iX} (\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{S}) = \rho V_{isX} V_S S_S - \rho V_{ieX} V_e S_e$$

Las velocidades entrantes y salientes del fluido respecto a las superficies del volumen de control y referidas al sistema de referencia móvil serán

$$V_{ex} = (V - U); \quad V_e = V; \quad V_{isX} = (V - U) \cos(\beta); \quad V_s = (V - U).$$

Agrupando todos los términos de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene

$$\Sigma F_X = \rho \cdot (V - U) U S + (V - U) \cos(\beta) \cdot (V - U) \cdot S - \rho \cdot (V - U) \cdot V \cdot S.$$

Reordenando, se obtiene

$$F_X = \rho \cdot (V - U)^2 \cdot S \cdot (\cos(\beta) - 1).$$

Que es de nuevo, la misma solución que en los apartados anteriores.

La componente de fuerza en dirección  $Y$  tendrá el mismo valor que para los casos precedentes.

## Problema 24

### Enunciado

Sea el depósito móvil de la figura, el cual a  $t = 0$  tiene una altura de líquido  $H$  y parte del reposo. Sabiendo que las fuerzas antagonistas que se oponen al movimiento son las siguientes:

Fricción de la rueda con el suelo  $F_f = K \cdot P$ , donde  $K$  es una constante conocida y  $P$  es el peso del conjunto del depósito y el fluido, se considera conocido este peso para  $t = 0$ .



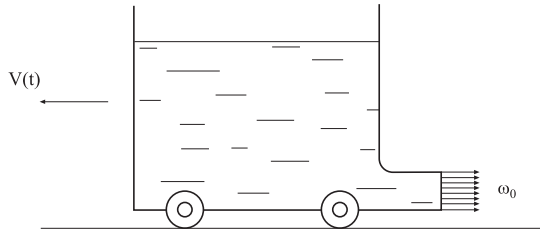
La fricción del depósito con el aire, se define por la ecuación.  $D = C_D \rho_{\text{aire}} S_{\text{proyectada}} \frac{V_{\text{movil}}^2}{2}$   
 donde  $D$  representa la fuerza que el aire opone al movimiento del móvil.  $C_D$ ,  $\rho_{\text{aire}}$  y  $S_{\text{proyectada}}$  son conocidos.

Considérense conocidas las dimensiones del depósito.

Determine:

1. La variación temporal del nivel del líquido en el depósito.
2. La ecuación diferencial que determina la velocidad del móvil en función del tiempo.

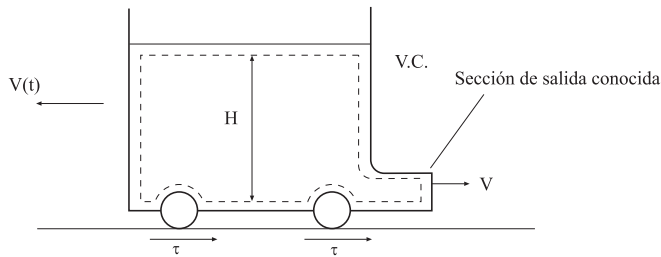
Fig. 24.1



## Resolución

Se elige el volumen de control que muestra la figura siguiente, en el cual la superficie que delimita el nivel del depósito se considera móvil, es decir, en todo momento el volumen de control abarca todo el volumen de líquido en el interior del depósito.

Fig. 24.2



$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \oint_{SC} \rho \vec{v} d\vec{S}$$

Puesto que únicamente existe flujo saliente y la densidad del líquido se puede considerar constante:

$$0 = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} S dh + \int_{SS} \rho v dS$$

$$0 = \rho S_d \frac{dh}{dt} + \rho v_s S_s$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{v_s S_s}{S_d}$$





En este punto, hay que recalcar que la velocidad de salida del líquido  $V_s$  depende de la altura de fluido en el depósito. Aplicando la ecuación de la energía entre el nivel del líquido y la sección de salida del fluido, y puesto que no existe transferencia de calor o trabajo al volumen de control, si además se supone que las pérdidas por rozamiento son despreciables y que el término de energía cinética en la superficie del depósito es mucho menor que el existente en la sección de salida del mismo se obtiene que la velocidad del fluido a la salida se puede dar:

$$V_s = \sqrt{2gh}$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\int_{h=H}^{h=h} \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = \int_{t=0}^t -\frac{S_s}{S_d} dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \left[ \frac{h^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_H^h = \frac{1}{\sqrt{2g}} * 2 \left[ h^{\frac{1}{2}} - H^{\frac{1}{2}} \right] = -\frac{S_s}{S_d} t$$

con lo que:

$$h^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t$$

Ecuación que caracteriza la altura del nivel del líquido en función del tiempo.

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control de la figura, y para un sistema inercial de coordenadas, se expresa:

$$-\int_{se} P d\vec{s} - \int_{ss} P d\vec{s} - \underbrace{\int_{sl} P d\vec{s}}_{F_i} + \int_{vc} \rho \vec{g} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \vec{v}_i dV + \oint_{sc} \rho \vec{v}_i \vec{v} d\vec{s}$$

Trabajando en presiones relativas, la fuerza en dirección X se puede dar como:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \vec{v}_x dV + \int_{ss} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s}$$

A priori, si el volumen de líquido en el depósito se considera muy grande con respecto al caudal másico saliente, cabe considerar que la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control es despreciable.

El flujo de cantidad de movimiento será:

$$\int_{ss} \rho \vec{v}_x \vec{v} d\vec{s} = \int \rho \sqrt{2gh} \sqrt{2gh} ds = \rho (2gh) S_s = \rho 2g S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2$$

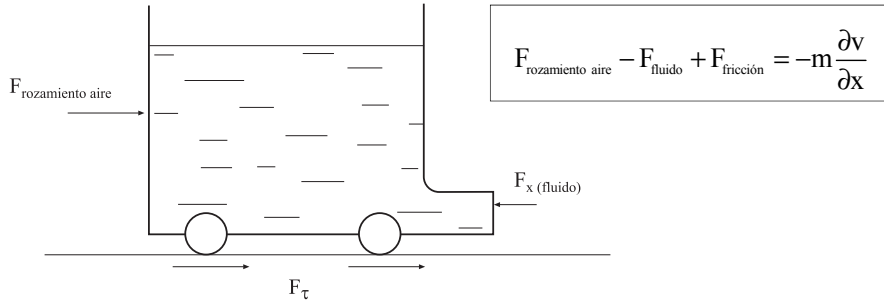
De donde la fuerza neta de cantidad de movimiento en dirección x será:



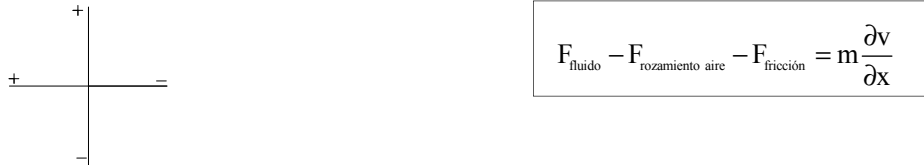
$$F_x = \rho \, 2 \, g \, S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2$$

La segunda ecuación de Newton, aplicada al depósito en movimiento, establece:

Fig. 24.3



Eligiendo el sistema de coordenadas que se muestra a continuación, la segunda ecuación de Newton queda:



Sustituyendo las diferentes ecuaciones en la segunda ecuación de Newton, se obtiene:

$$2 \, \rho \, g \, S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2 - K \cdot M_{(\text{carro} + \text{liquido})} g - C_D \rho_{\text{aire}} S \frac{v_{\text{móvil}}^2}{2} = M_{(\text{carro} + \text{liquido})} \frac{dv_{\text{móvil}}}{dt}$$

donde,

$$\begin{aligned} M_{\text{carro} + \text{liquido}} &= M_{\text{inicial}(c+1)} - \dot{m}_{\text{salida}} t = M_{\text{inicial}(c+1)} - (S_s \rho \sqrt{2gh}) t = \\ &= M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho \sqrt{2g} S_s \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right] t \end{aligned}$$

y se obtiene:

$$\begin{aligned} 2 \, \rho \, g \, S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2 - K g \left( M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right] \right) \\ - C_D \rho_{\text{aire}} S_{\text{proyectada}} \frac{v_{\text{móvil}}^2}{2} = \left\{ M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right] \right\} \frac{dv_{\text{movil}}}{dt} \end{aligned}$$



$$\frac{dv_{\text{móvil}}}{dt} = \frac{2 \rho g S_s \left( H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right)^2 - K g \left( M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right] \right)}{\left\{ M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right] \right\}} - \frac{C_D \rho_{\text{aire}} S_{\text{proyectada}} \frac{v_{\text{móvil}}^2}{2}}{\left\{ M_{\text{inicial}(c+1)} - \rho S_s t \sqrt{2g} \left[ H^{\frac{1}{2}} - \frac{S_s}{S_d} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2}} t \right] \right\}}$$

Ésta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad del móvil en función del tiempo. Cabe recordar que, en general, la fuerza debida al rozamiento entre el aire y el móvil, caracterizada por el coeficiente de arrastre, es pequeña comparada con el resto de fuerzas.

Esta ecuación se ha resuelto por el método Runge-Kutta de cuarto orden, partiendo de las siguientes condiciones iniciales:  $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_{\text{aire}} = 1.2 \text{ Kg/m}^3$ ,  $H = 1 \text{ m}$ ,  $S_s = 0.002 \text{ m}^2$ ,  $S_d = 0.5 \text{ m}^2$ ,  $S_{\text{proyectada}} = 0.7 \text{ m}^2$ ,

$$K = 0.0001, C_D = 0.005, M_{\text{inicial}(c+1)} = S_d H \rho + 100 \text{ Kg}.$$

De donde se ha obtenido la velocidad del móvil (carrito) en función del tiempo, grafica que se muestra a continuación.

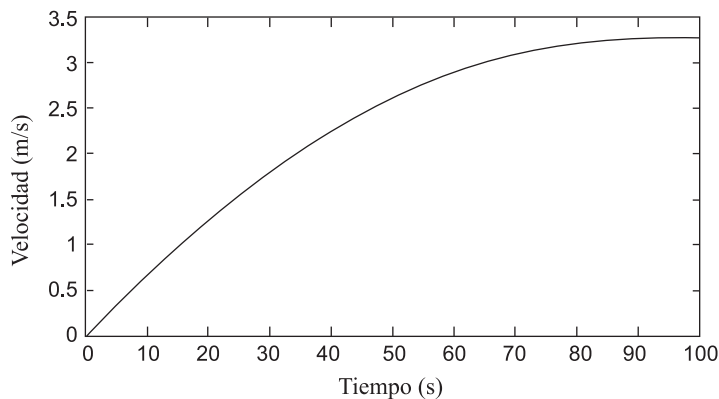


Fig. 24.4  
Variación de  
velocidad del  
móvil en  
función del  
tiempo

## Problema 25

### Enunciado

Se desea evaluar la viabilidad de creación de helicópteros personales, con fines lúdicos. Para ello, se pretende estudiar la potencia necesaria para mantener inmóvil en el aire dicho equipo en función del diámetro “D” del rotor. Se estima que el peso máximo de equipo y pasajero podría ser de unos “P” Kg. En la figura 25.1, se esquematiza el rotor



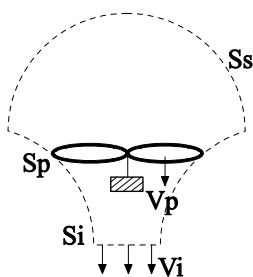
con el volumen de control alrededor del mismo y se supone que en la parte inferior del rotor todo el chorro del fluido se desplaza en sentido vertical.

Determine:

1. La potencia necesaria en función del diámetro del rotor y del peso de equipo y pasajero.
2. Para una velocidad de giro de 400 rpm, un diámetro de rotor de 2 m y un peso del conjunto de 200 kgf, determine la potencia y el par necesarios del motor.

### Resolución

Fig. 25.1  
Esquema de  
las hélices del  
rotor y el  
volumen de  
control  
considerado



1. Estableciendo el volumen de control definido en la figura 25.1, para el cual se supondrá que la parte superior del mismo está suficientemente alejada del rotor como para considerar que la velocidad de las partículas es nula, mientras que en su sección inferior el fluido fluye a una velocidad genérica,  $V_i$ . De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento se tiene:

$$F_y = \int_{sc} \rho \vec{V}_y \cdot \vec{V} d\vec{s} = \rho S_i \cdot V_i \cdot V_i = \rho S_i V_i^2$$

dónde  $S_i$  es la sección del chorro cilíndrico.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies superior e inferior del volumen de control elegido, se tiene:

$$\frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g z_s + Y = \frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g z_i$$

Asumiendo que la presión en cualquier punto de la entrada o salida se mantiene constante,  $P_i = P_s$ , y suponiendo despreciables los términos de energía potencial, se establece:

$$Y = \frac{V_i^2}{2} = \frac{\Delta P}{\rho}$$

La  $\Delta P$  se entiende entre caras del rotor.

La fuerza de sustentación producida por el rotor debería ser asimismo igual a la diferencia de presión entre ambos extremos de las palas, multiplicada por la superficie barrida, obteniendo:



$$F_y = \Delta P S_p = \rho \frac{V_i^2}{2} S_p$$

Igualando a la ecuación de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$F_y = \Delta P S_p = \rho \frac{V_i^2}{2} S_p = \rho S_i V_i^2$$

de donde:  $S_p = 2 S_i$

Suponiendo un rendimiento unitario, la potencia transmitida al fluido será la que ha de comunicar el motor.

La potencia comunicada al fluido será el producto del gradiente de presiones por el caudal circulante, o bien la energía cinética comunicada al fluido al pasar por el rotor, por el mismo caudal circulante, de donde:

$$N_a = \Delta P S_p V_p = \rho \frac{V_i^2}{2} S_i V_i = \rho \frac{V_i^2}{4} S_p V_i$$

Despejando la velocidad de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$V_i = \sqrt{\frac{F_y}{\rho S_i}} = \sqrt{\frac{2F_y}{\rho S_p}}$$

$$N_a = \rho \frac{V_i^2}{4} S_p V_i = \rho S_p \frac{1}{4} \left[ \frac{2F_y}{\rho S_p} \right]^{\frac{3}{2}} = F_y^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2\rho S_p)^{0,5}}$$

o bien:

$$N_a^2 = F_y^3 \frac{1}{2\rho S_p} = F_y^3 \frac{2}{\rho \pi D^2}$$

Expresión que relaciona la potencia de accionamiento con la fuerza de sustentación y el diámetro del rotor.

2. Para un peso de 200 Kgf, un diámetro de rotor de 2 m, y suponiendo la temperatura y la presión del aire atmosférico de 20 C y  $10^5$  Pa, se obtiene una potencia de:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100.000}{287 \cdot 293} = 1,189 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$N_a^2 = F_y^3 \frac{2}{\rho \pi D^2} = (200 \cdot 9,8)^3 \frac{2}{1,189 \pi 2^2}$$

$$N_a = 31.747,04 \text{ W}$$

Dado que el rotor se quiere que gire a 400 rpm, el par necesario deberá ser de:

$$N_a = M \omega = M \cdot 400 \frac{2\pi}{60} = 31.747,04 \text{ W}$$

$$M = 303,16 \text{ Nm}$$



## Problema 26

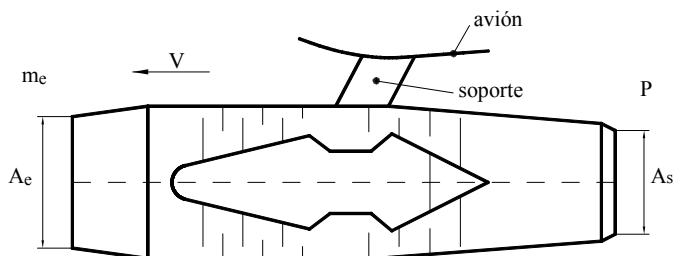
### Enunciado

Sea el turboreactor de un avión de pasajeros, el cual se desplaza a una velocidad  $V$ , (el aire atmosférico se considera sin movimiento), el flujo másico entrante al reactor es  $\dot{m}_E$ , siendo el caudal másico del combustible que entra lateralmente  $\dot{m}_{FUEL}$ . Se conoce, además, que los gases de combustión salen de la tobera a una velocidad relativa al motor  $V_r$ .

Calcule la fuerza realizada por el soporte del motor.

(Se puede considerar despreciable la cantidad de movimiento asociada al caudal másico de combustible,  $\dot{m}_{FUEL}$ .)

Fig. 26.1  
Esquema del  
motor de avión



### Resolución

La ecuación de cantidad de movimiento en régimen permanente, aplicada a la superficie que envuelve el volumen de control formado por el motor, y en dirección  $x$ , será:

$$\int_{se} \rho \vec{V}_x \cdot \vec{v} d\vec{s} + \int_{ss} \rho \vec{V}_x \cdot \vec{v} d\vec{s} = \sum \vec{F}_{ext,x}$$

Teniendo en cuenta que el término de fuerzas másicas no tiene componente en dirección  $X$ , y puesto que las fuerzas exteriores están formadas por las fuerzas de presión y los esfuerzos cortantes, que se pueden considerar concentradas en el soporte del motor, considerando que actúan en dirección positiva del eje de abscisas, se establece:

$$F_{soporte,x} = - \int_{se} \rho v_x v ds + \int_{ss} \rho v_{rx} v_r ds$$

La velocidad en la entrada será  $\frac{\dot{m}_E}{\rho_e A_e} = V$  (velocidad de vuelo del avión).

Para el caso en estudio, se establece:  $V_x = V$ ;  $v_{rx} = v_r$ . Sólo existe componente de velocidad en dirección  $x$ , Obteniéndose:

$$F_{soporte,x} = -\dot{m}_E V + (\dot{m}_E + \dot{m}_F) V_r$$

puesto que el caudal másico saliente es  $\dot{m}_E + \dot{m}_{FUEL}$ .



La fuerza que el soporte ejercerá sobre el motor se establece:

$$F_{\text{soporte}_x} = \dot{m}_E (V_r - V) + \dot{m}_F V_r$$

La fuerza, o empuje del motor, vendrá dada por:

$$F_{\text{motor}_x} = \dot{m}_E (V - V_r) - \dot{m}_F V_r$$

## Problema 27

### Enunciado

Sea un cohete que se desplaza verticalmente acelerándose desde el reposo. El consumo de combustible del mismo es de  $\dot{m}$ , siendo la velocidad de escape del fluido constante e igual a  $v_e$  (velocidad relativa a la superficie de salida del cohete). Si se puede considerar constante la densidad del fluido y despreciar la cantidad de movimiento del cohete, determine:

1. La ecuación que determina la aceleración en función del tiempo del cohete.
2. La ecuación que determina la velocidad en función del tiempo.
3. Si la fuerza antagonista que se opone al movimiento del cohete se puede dar (para flujo subsónico) como:  $D = \frac{1}{2} C_D \rho S_p V_{\text{cohete}}^2$ , asumiendo que  $C_D$  es una constante conocida y que la densidad del aire se puede considerar constante, halle la ecuación diferencial que determina el movimiento del cohete, e intégreala para hallar la velocidad del cohete en función del tiempo.

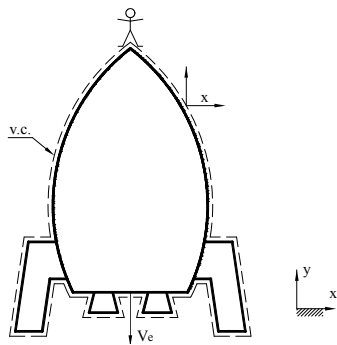


Fig. 27.1

### Resolución

1. La ecuación de cantidad de movimiento para coordenadas no inerciales, cuando se desprecian los esfuerzos por rozamiento, se puede expresar como:



$$F_{\text{másicas}} - \int_{\text{vc}} a \cdot \rho \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \vec{v}_y \cdot \rho \cdot dV + \oint_{\text{sc}} \vec{v}_y \cdot \rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{s}$$

$$F_{\text{másicas}} = -M_{\text{vc}} \cdot g \quad ; \quad M_{\text{vc}} = \text{es función del tiempo.}$$

Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control del cohete, se obtiene la expresión siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \cdot dV + \int_{\text{sc}} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \rho \cdot dV = - \int_{s_{\text{salida}}} \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\dot{m}_{\text{salida}}$$

$$\frac{dM_{\text{vc}}}{dt} = -\dot{m}_{\text{salida}} \quad ; \quad \int_{M_{\text{inicial}}}^{\text{masa cohete}} dM_{\text{vc}} = \int_0^t -\dot{m}_{\text{salida}} \cdot dt$$

$$M_{\text{cohete}} - M_{\text{inicial}} = -\dot{m}_{\text{salida}} \cdot t \quad ; \quad M_{\text{cohete}} = M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t$$

de donde:

$$F_{\text{másicas}} = -g \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t)$$

$$- \int a \cdot \rho \cdot dV = - \int a \cdot dM_{\text{vc}} = -a \cdot M_{\text{vc}} = -a \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vc}} \vec{v}_y \cdot \rho \cdot dV = 0, \text{ según el enunciado.}$$

$$\int_{\text{ss}} \vec{v}_y \cdot \underbrace{\rho \cdot \vec{v}_r \cdot d\vec{s}}_{\dot{m}_{\text{salida}}} = -v_y \cdot \dot{m}_{\text{salida}}$$

Sustituyendo en la ecuación general, se llega a:

$$-g \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t) - a \cdot (M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t) = -v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}$$

$$a = \frac{v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}}{M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t} - g$$

$$2. \quad a = \frac{dv}{dt} \quad ; \quad v = \int_0^t a \cdot dt = \left[ -\frac{v_e \cdot \dot{m}_{\text{salida}}}{\dot{m}_{\text{salida}}} \cdot \ln(M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{salida}} \cdot t) - g \cdot t \right]_0^t ;$$

$$V = -V_e \ln \left( \frac{M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t}{M_{\text{inicial}}} \right) - g t.$$

o bien:

$$V = V_e \ln \left( \frac{M_{\text{inicial}}}{M_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t} \right) - g t.$$

Obsérvese que la velocidad del cohete tiende a aumentar con el tiempo.

3. Si las fuerzas de superficie antagonistas al movimiento del cohete para flujo subsónico se pueden dar como:





$D = \frac{1}{2} C_D \rho S_{\text{proyectada}} V_{\text{cohete}}^2$ , y recordando que la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales se enunciaba:

$$-\int_{sc} P d\vec{s} + \int_{sc} \vec{\tau} ds + \int_{vc} \rho \vec{g} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \vec{V}_i dV + \oint_{sc} \rho \vec{V}_i \vec{V} d\vec{s} + \int_{vc} \rho \left( \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} \right) dV$$

Las fuerzas de presión y de esfuerzos cortantes que actúan sobre la superficie del cohete son las fuerzas antagonistas de superficie, y se evalúan por “D”. Por otro lado, y puesto que no hay giro alguno del sistema de referencia no inercial con respecto al inercial, la ecuación de cantidad de movimiento queda:

$$-D - M_{\text{cohete}} g = -\dot{m} V_{\text{fluido saliente}} + M_{\text{cohete}} a_{\text{cohete}}$$

Obsérvese que el término  $\frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho \vec{V}_i dV$  representa la variación temporal de la cantidad de movimiento en el volumen de control formado por el cohete, que sería la masa de cada elemento diferencial del cohete, por la variación temporal de la velocidad que este elemento diferencial posee respecto a un sistema de coordenadas inercial que se mueve con el cohete. Para dicho sistema de referencia, la variación temporal de cantidad de movimiento es nula.

La ecuación resultante se expresa como:

$$-C_D \frac{1}{2} \rho V_{\text{cohete}}^2 S_{\text{proyectada}} - (M_{\text{inicial cohete}} - \dot{m}t)g = -\dot{m} V_{\text{fluido saliente}} + (M_{\text{inicial cohete}} - \dot{m}t) \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt}$$

Ésta es la ecuación diferencial que caracteriza la velocidad temporal del cohete en régimen subsónico.

La resolución de esta ecuación diferencial mediante el método de Runge-Kutta 4 con las condiciones iniciales que se detallan a continuación, ha dado lugar a la grafica que se muestra seguidamente.

Condiciones iniciales:  $S_{\text{proyectada}} = 0.5 \text{ m}^2$ ;  $C_D = 0.05$ ;  $\rho = 1.2 \text{ Kg/m}^3$ ;  $M_{\text{inicial cohete}} = 2000 \text{ Kg}$ ;  $\dot{m} = 50 \text{ Kg/s}$ ;  $V_{\text{fluido saliente}} = 900 \text{ m/s}$ .

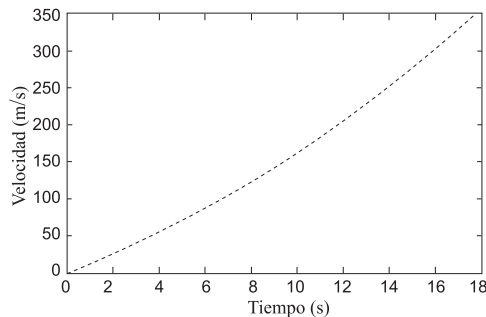


Fig. 27.2  
Velocidad del  
cohete en  
función del  
tiempo



Obsérvese que el cohete tardara unos 18 segundos en alcanzar la velocidad sónica,  $M=1$ ,  $c = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 293} = 343.1 \text{ m/s}$ . A partir de este punto, las fuerzas antagónicas sobre el cohete cambian drásticamente, puesto que deben tenerse en cuenta las fuerzas debidas a la aparición de la onda de choque en el extremo superior del cohete. Con lo que a partir de este punto la ecuación diferencial del movimiento del cohete debe ser modificada.

## Problema 28

### Enunciado

Sea un avión en vuelo ascendente con una inclinación respecto a la horizontal,  $\alpha = 22^\circ$ .

Sea  $V$  la velocidad de escape de los gases de combustión, velocidad relativa a la velocidad del avión, considérese  $V = \text{constante}$ .

Sea  $D$  la fuerza de arrastre debida a las fuerzas superficiales, que se opone al movimiento del avión,  $D = C_D \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{V_{\text{avión}}^2}{2}$

$\rho$  = densidad del aire. Considere como primera aproximación la densidad media entre las alturas de vuelo.

$S$  = superficie del avión proyectada en un plano perpendicular a la dirección del movimiento. (Es un dato del problema.)

$C_D$  = coeficiente de arrastre. (Se supone constante y conocido).

En un instante considerado, el avión vuela a una velocidad  $V_{\text{inicial}}$  y se halla a una altura  $H_{\text{inicial}}$ . Dicho avión está acelerando con el fin de obtener una velocidad  $V_{\text{final}}$  y una altura  $H_{\text{final}}$  en un tiempo  $t$ , en todo momento se mantiene la inclinación.

Determine:

1. El flujo másico que sale por los motores del avión en función del tiempo durante el periodo de aceleración considerado. Considere que la masa del avión se mantiene constante.
2. El flujo másico que sale por los motores del avión en función del tiempo durante el periodo de aceleración considerado. Considérese variable la masa del avión y téngase en cuenta que el caudal másico de combustible es el 5% del caudal entrante a los motores.
3. La altura final a la que se encontrará el avión después del periodo de aceleración  $t$  considerado. Determine la densidad media del aire atmosférico entre las alturas de vuelo consideradas, sabiendo que la temperatura en la atmósfera en función de la altura  $h$  varía según la relación:  $T = T_0 - B \cdot h$ ;  $T_0$  y  $B$  son constantes conocidas.

Datos:



$V_{\text{inicial}}$ ;  $V_{\text{final}}$ ;  $H_{\text{inicial}}$ ;  $\alpha$ ;  $V$ ;  $C_D$ ;  $S$ ;  $t$ ;  $T_0$ ;  $B$ ;  $m_{\text{inicial avión}}$ ;  $\rho$ . (Considérese  $\rho$  conocida para los apartados 1 y 2.)

## Resolución

1. Se eligen los sistemas de coordenadas  $XY$ ;  $X'Y'$ .

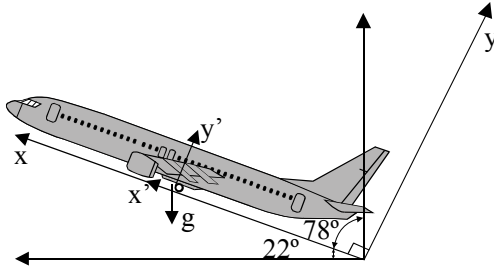


Fig. 28.1

Para el sistema de coordenadas no inercial situado en el avión, se tiene:

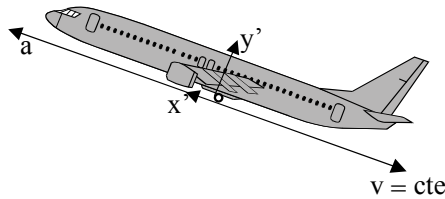


Fig. 28.2

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada a un sistema no inercial se enuncia:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} dV + \oint_{sc} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} d\vec{s} + \\ & \int_{sc} \rho \left[ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right) + (2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'}) + (\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right] dV = \\ & = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = - \int_{sc} P \hat{n} d\vec{s} + \int_{sc} \vec{\tau} d\vec{s} + \int_{V_c} \vec{g} \rho dV \end{aligned}$$

Puesto que las aceleraciones de Coriolis, centrípeta y la debida a la velocidad de giro variable no son relevantes para el caso de estudio, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} dV + \oint_{sc} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} d\vec{s} + \int_{sc} \rho \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} dV = - \int_{sc} P \hat{n} d\vec{s} + \int_{sc} \vec{\tau} d\vec{s} + \int_{V_c} \vec{g} \rho dV$$

Las fuerzas superficiales han sido dadas en función del coeficiente de arrastre:

$$D = C_D \cdot \rho \cdot S \cdot \frac{V_{\text{avión}}^2}{2}$$



Estas fuerzas tienen la dirección del eje X y se dirigen hacia la parte negativa de dicho eje.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} dV + \oint_{sc} \rho \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} d\vec{s} = -\vec{D} + \int_{V_c} \vec{g} \rho dV - \int_{V_c} \rho \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} dV$$

Eligiendo como volumen de control el avión, se tiene que únicamente existe flujo de cantidad de movimiento entrante y saliente en los motores.

$$\int_{sc} \rho \cdot \vec{V}_{x'y'} \cdot \vec{V}_{x'y'} d\vec{s} = \int_{se} \rho \cdot \vec{V}_{avión} \cdot \vec{V}_{avión} d\vec{s} + \int_{ss} \rho \cdot \vec{V}_{gases\ escape} \cdot \vec{V}_{gases\ escape} d\vec{s} =$$

$$\rho V_{avión}^2 s_{entrada} - \rho V_{gases\ escape}^2 s_{salida} = \dot{m}_{entrante} \cdot V_{avión} - \dot{m}_{saliente} \cdot V_{gases\ escape}$$

En este primer apartado, se va a despreciar la aportación del combustible al caudal másico saliente, con lo cual se tendrá:

$$\dot{m}_{entrante} = \dot{m}_{saliente}$$

En lo que a la variación temporal de cantidad de movimiento se refiere, se va a suponer que la densidad del flujo en el interior del volumen de control es constante; por otro lado, la velocidad de salida del flujo por los motores del avión se ha supuesto también constante, según el enunciado, con lo cual:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V}_{x'y'} dV = 0;$$

y se obtiene:

$$-\dot{m}_{saliente} \cdot (V_{gases\ escape} - V_{avión}) = -\vec{D} + \int_{V_c} \vec{g} \rho dV - \int_{V_c} \rho \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} dV$$

Proyectando la gravedad en la dirección del movimiento del avión

$$\int_{V_c} \vec{g} \rho dV = -\rho \cdot V \cdot g \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = -m_{avión} g \cos(90^\circ - \alpha)$$

Puesto que  $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{a}$ , aceleración del avión

$$-\dot{m}_{saliente} \cdot (V_{gases\ escape} - V_{avión}) = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{V_{avión}^2}{2} - m_{avión} g \cos(90^\circ - \alpha) - \int_{V_c} \rho \vec{a} dV$$

$$-\dot{m}_{saliente} \cdot (V_{gases\ escape} - V_{avión}) = -C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{V_{avión}^2}{2} - m_{avión} g \cos(90^\circ - \alpha) - m_{avión} a$$

$$V_{avión} = V_{inicial} + at$$

$$\dot{m}_{saliente} \cdot = \frac{C_D \cdot \rho_{aire} \cdot S \cdot \frac{(V_{inicial} + at)^2}{2} + m_{avión} g \cos(90^\circ - \alpha) + m_{avión} a}{(V_{gases\ escape} - (V_{inicial} + at))}$$



2. Si se considera que la masa del avión varía con el tiempo, se tiene, conociendo que la masa de combustible es el 5% de la masa total:

$$m_{\text{avión}} = m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{entrante}} t \cdot 0,05$$

Según la ecuación de continuidad:

$$\dot{m}_{\text{entrante}} + \dot{m}_{\text{fuel}} = \dot{m}_{\text{saliente}}.$$

$$\dot{m}_{\text{entrante}} + 0,005 \dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{saliente}}.$$

$$1,05 \dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{saliente}}.$$

con lo cual:

$$m_{\text{avión}} = m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t \cdot \frac{0,05}{1,05}$$

El flujo de cantidad de movimiento a través de los motores del avión, al considerar que el flujo másico de combustible es el 5% del flujo entrante, se establece:

$$\begin{aligned} \int_{sc} \rho \cdot \vec{V}_{x',y'} \cdot \vec{V}_{x',y'} \cdot d\vec{s} &= \dot{m}_{\text{entrante}} \cdot V_{\text{avión}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} = \\ &= \frac{\dot{m}_{\text{saliente}}}{1,05} \cdot V_{\text{avión}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} = \dot{m}_{\text{saliente}} \left( \frac{V_{\text{avión}}}{1,05} - V_{\text{gases escape}} \right) = \\ &= \dot{m}_{\text{saliente}} \left( \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} - V_{\text{gases escape}} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de cantidad de movimiento quedará:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{\text{saliente}} \left( V_{\text{gases escape}} - \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} \right) &= C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} + \\ &\left( m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t \cdot \frac{0,05}{1,05} \right) g \cos(90^\circ - \alpha) + \left( m_{\text{av.inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} t \cdot \frac{0,05}{1,05} \right) \bar{a} \\ \dot{m}_{\text{saliente}} \left( V_{\text{gases escape}} - \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} \right) &+ \dot{m}_{\text{saliente}} (g \cdot t \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + t \cdot \bar{a}) \frac{0,05}{1,05} = \\ C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} &+ m_{\text{av.inicial}} \cdot (g \cos(90^\circ - \alpha) + \bar{a}) \\ \dot{m}_{\text{saliente}} &= \frac{C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot s \cdot \frac{(V_{\text{inicial}} + at)^2}{2} + m_{\text{av.inicial}} \cdot (g \cos(90^\circ - \alpha) + \bar{a})}{\left( V_{\text{gases escape}} - \frac{V_{\text{inicial}} + at}{1,05} \right) + (g \cdot t \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + t \cdot \bar{a}) \frac{0,05}{1,05}}; \end{aligned}$$

La aceleración que experimenta el avión se halla:



$$\bar{a} = \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}}{t};$$

3. Si a la velocidad inicial le corresponde una altura inicial,  $h_i$ , al final del periodo de aceleración considerado,  $t$ , la altura del avión será:

Fig. 28.3

$$e = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_i t;$$

$$\text{sen} 22^\circ = \frac{h_f - h_i}{e};$$

$$h_f = e \cdot \text{sen} 22^\circ + h_i = \left( \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_i t \right) \text{sen} 22^\circ + h_i;$$

La densidad media del aire atmosférico entre las dos alturas de vuelo consideradas se determinará hallando la densidad del aire a cada una de estas alturas, y posteriormente obteniendo la media de dichas densidades:

$$\bar{\rho}_{\text{aire}} = \frac{\rho_{hf} + \rho_{hi}}{2};$$

$$\rho_{hf} = \frac{P_{hf}}{R \cdot T_{hf}};$$

$$\rho_{hi} = \frac{P_{hi}}{R \cdot T_{hi}};$$

Puesto que la temperatura del aire en la atmósfera terrestre viene dada por:

$$T = T_0 - B \cdot h;$$

$$T_0 = 15^\circ \text{C} \quad i \quad B = 0,0065 \frac{\text{K}}{\text{m}};$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh = -\frac{P}{R \cdot T} g \cdot dh = -\frac{P \cdot g}{R(T_0 - B \cdot h)} dh;$$

$$\int_{P=P_{\text{atm}}}^{P=P_{hf}} \frac{dP}{P} = \int_{h=0}^{h=h_f} -\frac{g \cdot dh}{R \cdot (T_0 - B \cdot h)};$$

$$\ln \left[ \frac{P_{hf}}{P_{\text{atm}}} \right] = \frac{g}{R \cdot B} \cdot \ln \left[ \frac{T_0 - B \cdot h_f}{T_0} \right];$$

$$P_{hf} = \left( \frac{T_0 - B \cdot h_f}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot B}};$$

Expresión que da la presión del aire a una altura  $h$  genérica; sustituyendo  $h$  por  $h_f$  y  $h_i$  se obtienen las presiones a las dos alturas consideradas. Dado que la temperatura también es conocida, se puede determinar la densidad del aire para estas dos alturas y, consecuentemente, la densidad media.



## Problema 29

### Enunciado

Se desea realizar un experimento en la estación espacial internacional. El experimento consiste en determinar la fuerza de reacción del contorno sobre el fluido, cuando este fluye a lo largo de un tramo de tubería recta de 1 m de longitud y 1 cm de diámetro.

El satélite donde irá montada la instalación tiene, en el momento de realizar el experimento, una aceleración respecto a un sistema de referencia inercial de:

$$\vec{a} = 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \text{ (m/s}^2\text{)}, \text{ siendo su velocidad angular } \vec{\omega} = 0,2\mathbf{i} + 0,2\mathbf{j} - 0,01\mathbf{k} \text{ (rad/s)}.$$

El tramo de tubería respecto al centro de gravedad del satélite está situado en un plano XZ, y el conducto está alineado con el eje Z. El centro de gravedad del conducto está situado en  $X = 0,5 \text{ m}$ ;  $Y = 0,5 \text{ m}$ ;  $Z = 1 \text{ m}$ . Se conoce, además, que el flujo es en sentido positivo del eje de las Z, y la presión a la entrada del tramo recto es de  $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  (presión absoluta).

Debido a que el flujo es laminar, para determinar la presión en el extremo opuesto del

conducto se utilizará la ecuación:  $\Delta P = \frac{\rho \cdot 8 \cdot v \cdot L \cdot v}{r_c^2}$ ;  $\frac{\Delta P}{\rho} = \Delta Y$

$L$  = longitud del conducto

$v$  = velocidad del fluido en el conducto, (considérese 1 m/s.)

$\rho$  = densidad del fluido =  $850 \text{ Kg/m}^3$

$\nu$  = viscosidad cinemática del fluido =  $30 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Considérese despreciable el efecto de la gravedad terrestre sobre el satélite.

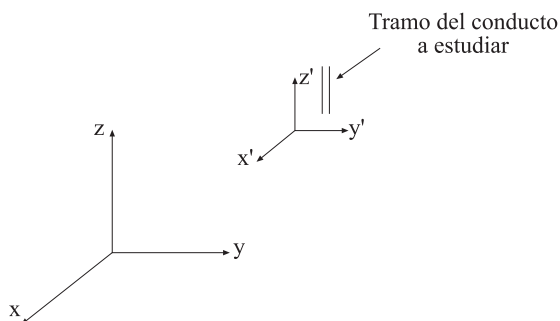


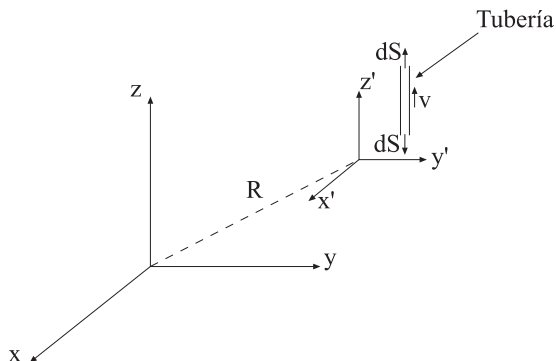
Fig. 29.1  
Esquema de la  
instalación, con  
los dos ejes  
coordenados  
utilizados

### Resolución

La ecuación de cantidad de movimiento para un sistema no inercial de coordenadas se establece (v. figura 29.2):



Fig. 29.2  
Esquema de  
los dos ejes  
coordinados  
con el vector  $R$   
que los une



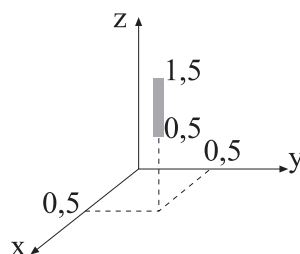
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{V} dV + \int_{se} \rho \vec{V} \vec{V} dS + \int_{ss} \rho \vec{V} \vec{V} dS + \int_{V_c} \rho \left[ \frac{d^2 R}{dt^2} + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} \right) + (2\vec{\omega} \wedge \vec{V}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right] dV \\ & = - \int_{se} p dS - \int_{ss} p dS + F_{(ijk)} + \int_{V_c} \rho g dV \\ & - \dot{m} V_e \hat{k} + \dot{m} V_s \hat{k} + \int_{V_c} \rho \left[ \frac{d^2 R}{dt^2} + (2\vec{\omega} \wedge \vec{V}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \right] dV + \int_{se} p dS + \int_{ss} p dS = F_{(i,j,k)} \end{aligned}$$

El radio  $\vec{r}$  en un elemento diferencial de tubo será de la forma:

Fig. 29.3

$$r = 0,5 \hat{i} + 0,5 \hat{j} + Z \hat{k}$$

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 10\hat{j} + 10\hat{k}$$



$$(2\vec{\omega} \wedge \vec{V}) = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2[0,2\hat{i} - 0,2\hat{j}] = 0,4\hat{i} - 0,4\hat{j}$$

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}) &= \vec{\omega} \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ 0,5 & 0,5 & Z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\omega} \wedge [0,2Z\hat{i} - 0,5\hat{j} + 0,2\hat{k} - (0,2\hat{i} - 0,5\hat{j} + 0,2Z\hat{k})] = \\ &= \vec{\omega} \wedge [(0,005 + 0,2Z)\hat{i} - (0,005 + 0,2Z)\hat{j}]; \end{aligned}$$





$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,2 & 0,2 & -0,01 \\ (0,005+0,2Z) & -(0,005+0,2Z) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -0,01(0,005+0,2Z)\hat{j} + 0,2[-(0,005+0,2Z)]\hat{k} \\ - \left[ 0,2(0,005+0,2Z)\hat{k} - 0,01(-(0,005))\hat{i} \right]$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r} = -(5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3}Z)\hat{i} - (5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3}Z)\hat{j} - (10^{-3} + 4 \cdot 10^{-2}Z)2\hat{k}$$

La presión a la salida del conducto respecto a la entrada del mismo será:

$$\frac{P_e}{\rho_e} + \frac{V_e^2}{2} + gZ_e = \frac{P_s}{\rho_s} + \frac{V_s^2}{2} + gZ_s + \frac{8vLV}{r_c^2}$$

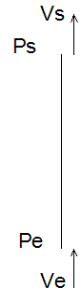


Fig. 29.4

Las fuerzas másicas se consideran despreciables.

$$P_s = P_e - \frac{\rho 8vLV}{r_c^2}$$

$$P_s = 2 \cdot 10^5 - 8160 = 1,9184 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\int_{0,5}^{1,5} \rho S_{\text{tubo}} \left[ 10\hat{j} + 10\hat{k} + 0,4\hat{i} - 0,4\hat{j} - (5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3}Z)\hat{i} - (5 \cdot 10^{-5} + 2 \cdot 10^{-3}Z)\hat{j} \right. \\ \left. - (2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2}Z)\hat{k} \right] \cdot dZ$$

$$-8.160 \cdot S_{\text{tubo}} \cdot \hat{k} = F_{(i,j,k)}$$

$$\rho S_{\text{tubo}} \left[ 10\hat{j} + 10\hat{k} + 0,4\hat{i} - 0,4\hat{j} - 5 \cdot 10^{-5}\hat{i} - 5 \cdot 10^{-5}\hat{j} - 2 \cdot 10^{-3}\hat{k} \right. \\ \left. - 2 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{Z^2}{2} \right]_{0,5}^{1,5} \hat{i} - 2 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{Z^2}{2} \right]_{0,5}^{1,5} \hat{j} - 8 \cdot 10^{-2} \left[ \frac{Z^2}{2} \right]_{0,5}^{1,5} \hat{k} \right] +$$

$$-8.160 \cdot S_{\text{tubo}} \cdot \hat{k} = F_{(i,j,k)}$$

$$850 \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} \left[ 0,39995\hat{i} + 9,5995\hat{j} + 9,998\hat{k} - 2 \cdot 10^{-3}\hat{i} - 2 \cdot 10^{-3}\hat{j} - 8 \cdot 10^{-3}\hat{k} \right]$$

$$-8.160 \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} \cdot \hat{k} = F_{(i,j,k)}$$

$$F_{(i,j,k)} = 2,65667 \cdot 10^{-2} \hat{i} + 6,40748 \cdot 10^{-1} \hat{j} + 2,12293 \cdot 10^{-2} \hat{k}$$



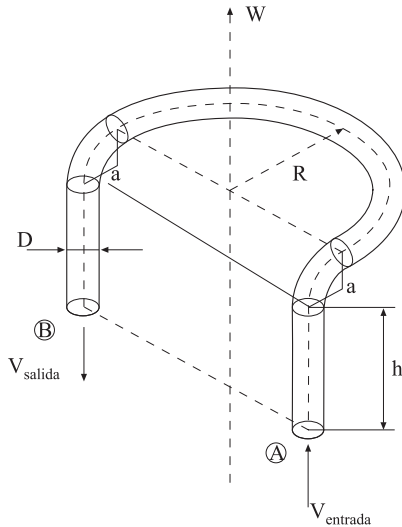
## Problema 30

### Enunciado

Sea un fluido de viscosidad dinámica  $\mu$  y densidad  $\rho$  que circula por una tubería de diámetro  $D$ . Sabiendo que el caudal circulante es  $Q$  y que la presión en la entrada del conducto es  $P$ , determine la expresión que caracteriza la fuerza de reacción del contorno sobre el fluido, cuando el sistema está inmóvil y cuando el sistema gira respecto a su eje central vertical a una velocidad angular  $\omega$ . Considere que la tubería es lisa.

Las dimensiones principales del conducto se esquematizan en la figura 30.1.

Fig. 30.1  
Esquema de la instalación



Nota. A los efectos de pérdida de carga, los codos y los tramos curvados de la tubería se considerarán como pérdidas lineales, con una longitud igual a la de su desarrollo.

### Resolución

1. La fuerza de reacción que el conducto realiza sobre el fluido será debida al balance de cantidad de movimiento entre la entrada y la salida del sistema. En este primer apartado, y dado que no existe giro alguno, la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas inerciales se enuncia:

$$-\int_{SA} p \, d\vec{s} - \int_{SB} p \, d\vec{s} - \int_{SL} p \, d\vec{s} + \int_{SL} \bar{\tau} \, ds + \int_{VC} \rho \bar{g} \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \bar{v} \, dV + \int_{SC} \rho \bar{v} \, d\vec{s}$$

de donde las fuerzas de reacción (contorno sobre el fluido) y para régimen permanente se definen:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{CF} = & \int_{SC} \rho \bar{v} \, d\vec{s} - \int_{VC} \rho \bar{g} \, dV + \int_{SA} p \, d\vec{s} + \int_{SB} p \, d\vec{s} = \int_{SA} \rho \bar{v} \, d\vec{s} + \\ & + \int_{SB} \rho \bar{v} \, d\vec{s} - \int_{VC} \rho \bar{g} \, dV + \int_{SA} p \, d\vec{s} + \int_{SB} p \, d\vec{s} \end{aligned}$$



Una vez realizada la integración, se obtiene:

$$\vec{F}_{CF} = -2\dot{m} v \hat{k} - s(p_A + p_B) \hat{k} + \rho g L s \hat{k}$$

de donde:

$v$  = velocidad de circulación del fluido, que se calcula mediante la ecuación de continuidad

$\dot{m}$  = caudal másico

$P_A$  = presión en la entrada del conducto, punto A. (dato del problema)

$P_B$  = presión en la salida del conducto, punto B (se determina mediante la ecuación de Bernoulli)

$L_{total}$  = longitud desarrollada del conducto. Según la figura 30.1, valdrá:

$$L_{total} = 2h + \pi a + \pi R$$

La presión a la salida del conducto, punto B, se hallará:

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{V^2}{2} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$$

Así:

$$P_B = \left( \frac{P_A}{\rho} - f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} \right) \rho$$

El factor de fricción se determinará a partir del diagrama de Moody, mediante la determinación previa del número de Reynolds y asumiendo, según el enunciado que la tubería es lisa.

2. En el segundo apartado, cuando todo el sistema gira a una velocidad  $\Omega$  respecto al eje Z, se deberá utilizar la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales, que se enuncia:

$$\begin{aligned} -\int_{SA} p d\vec{s} - \int_{SB} p d\vec{s} - \int_{SL} p d\vec{s} + \int_{SL} \vec{\tau} ds + \int_{VC} \rho \vec{g} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v} dV + \int_{SC} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} \\ + \int_{VC} \rho \left[ \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right] dV \end{aligned}$$

Puesto que para el caso en estudio únicamente aparecen las aceleraciones centrípeta y de Coriolis, y dado que se tiene régimen permanente, la ecuación anterior queda:

$$\begin{aligned} -\int_{SA} p d\vec{s} - \int_{SB} p d\vec{s} + F_{CF} + \int_{VC} \rho \vec{g} dV = \int_{SA} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} + \int_{SB} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} + \\ + \int_{VC} \rho \left[ 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \right] dV \end{aligned}$$



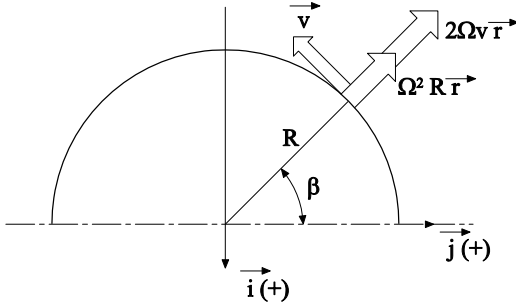
de donde:

$$F_{CF} = -\dot{m}[2 V_Y] \hat{k} + \int_{SA} p d\vec{s} + \int_{SB} p d\vec{s} - \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \int_{VC} \rho [2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}] dV$$

$$F_{CF} = -\dot{m}[2 V_Y] \hat{k} - P_A S \hat{k} - P_B S \hat{k} + \rho g L_{total} S \hat{k} + \int_{VC} \rho [2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}] dV$$

Las aceleraciones centrípeta y de Coriolis se calculan (v. figura 30.2):

Fig. 30.2  
Representación  
direccional de  
las  
aceleraciones



a) En la curva principal

Coriolis:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -v \cos \beta & -v \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = (-\Omega V \cos \beta \hat{j} + \Omega V \sin \beta \hat{i}) 2$$

Centrípeta:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -R \sin \beta & R \cos \beta & 0 \end{vmatrix} = \Omega \wedge [-\Omega R \sin \beta \hat{j} - \Omega R \cos \beta \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R \cos \beta & -\Omega R \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R \cos \beta \hat{j} + \Omega^2 R \sin \beta \hat{i} \end{aligned}$$

La fuerza sobre la curva principal debida a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta será:

$$F_{CF(a)} = \int_0^\pi \rho [-\Omega V \sin \beta \hat{i} - \Omega V \cos \beta \hat{j} + \Omega^2 R \sin \beta \hat{i} - \Omega^2 R \cos \beta \hat{j}] dV$$

puesto que

$$dV = SR d\beta$$

después de la integración se tiene:



$$F_{CF(a)} = +2\rho S R \Omega V \hat{i} + 2\rho S R^2 \Omega^2 \hat{i} = 2 \rho S R \Omega (R \Omega + V) \hat{i}$$

b) Las aceleraciones centrípeta y de Coriolis en los dos codos se obtienen (v. figura 30.3):

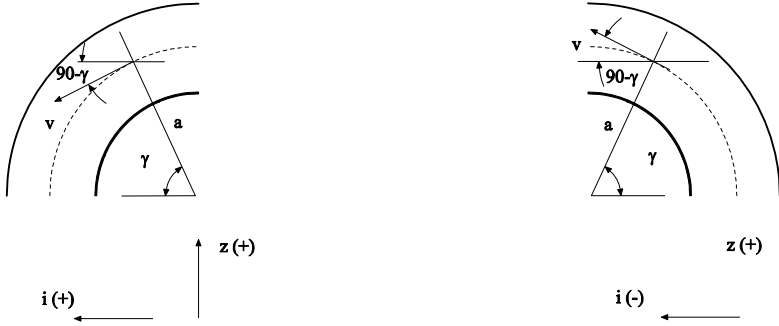


Fig. 30.3  
Esquema de los dos codos con el vector velocidad de fluido asociado

Coriolis, codo 1:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -v \cos(90-\gamma) & 0 & v \sin(90-\gamma) \end{vmatrix} = 2(-v \cos(90-\gamma) \Omega \hat{j})$$

Coriolis, codo 2:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ v \cos(90-\gamma) & 0 & -v \sin(90-\gamma) \end{vmatrix} = 2(v \cos(90-\gamma) \Omega \hat{j})$$

Obsérvese que la fuerza resultante de Coriolis que actúa sobre los codos 1 y 2 es nula.

Los radios desde el centro de coordenadas hasta un elemento diferencial genérico en los codos 1 y 2 se definen en la figura 30.4:

$$\vec{R}_1' = a \cos \gamma \hat{i} + R \hat{j} - (a - a \sin \gamma) \hat{k}$$

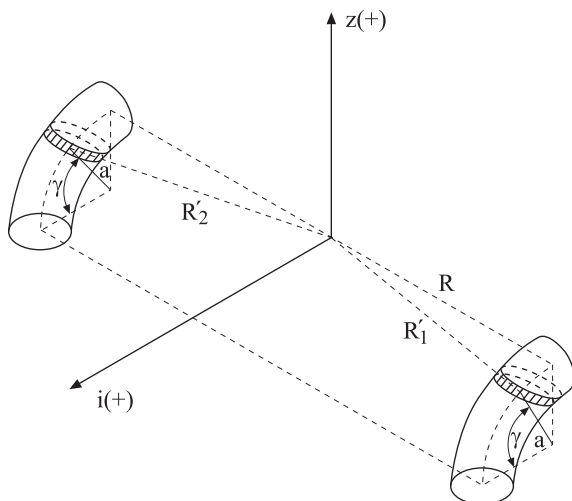
$$\vec{R}_2' = a \cos \gamma \hat{i} - R \hat{j} - (a - a \sin \gamma) \hat{k}$$

con lo cual la aceleración centrípeta para el codo 1 será:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a \cos \gamma & R & -a(1-\sin \gamma) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \cos \gamma \hat{j} - \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & \Omega a \cos \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \cos \gamma \hat{i} \end{aligned}$$



Fig. 30.4  
Esquema de  
los elementos  
diferenciales  
de radio



y para el codo 2 se tendrá:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a \cos \gamma & -R & -a(1 - \sin \gamma) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \cos \gamma \hat{j} + \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ \Omega R & \Omega a \cos \gamma & 0 \end{vmatrix} = \Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \cos \gamma \hat{i}\end{aligned}$$

La fuerza debida a la aceleración centrípeta para los codos 1 y 2 será:

$$F_{CF(b1,2)} = \int_{\forall C(\text{codos } 1,2)} \rho [2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}] dV$$

El diferencial de volumen vendrá dado por:

$$dV = S a d\gamma, \text{ de donde:}$$

$$F_{CB(b1,2)} = \int_0^{\pi/2} \rho [-\Omega^2 a \cos \gamma \hat{i} - \Omega^2 R \hat{j} + \Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \cos \gamma \hat{i}] S a d\gamma$$

$$F_{CB(b1,2)} = -2\rho S a^2 \Omega^2 \hat{i}$$

c) Fuerzas debidas a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta en los tramos rectos.

El radio genérico de un elemento diferencial de tubería al eje de coordenadas se define en la figura 30.5, de donde:

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k}$$

por lo que sus componentes para los tramos rectos conectados a los codos 1 y 2 serán:



Tramo unido al codo 1

$$R_x = a$$

$$R_y = R$$

$$R_z = -(a+z)$$

Tramo unido al codo 2

$$R_x = a$$

$$R_y = -R$$

$$R_z = -(a+z)$$

La aceleración de Coriolis en los tramos rectos será:

Tramo recto unido al codo 1:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & V_z \end{vmatrix} = 0$$

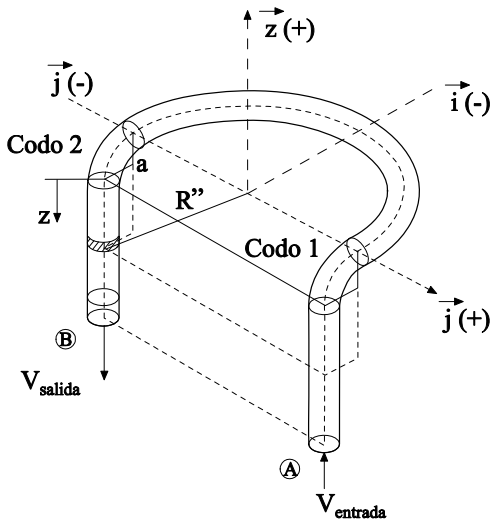


Fig. 30.5  
Esquema de un  
elemento  
diferencial de  
conducto

Tramo recto unido al codo 2:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = 2 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & -V_z \end{vmatrix} = 0$$

La aceleración centrípeta será:

Tramo recto unido al codo 1:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a & R & -(a+z) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \hat{j} - \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ -\Omega R & \Omega a & 0 \end{vmatrix} = -\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i} \end{aligned}$$



Tramo recto unido al codo 2:

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{R} &= \Omega \wedge \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ a & -R & -(a+z) \end{vmatrix} = \Omega \wedge [\Omega a \hat{j} + \Omega R \hat{i}] = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \Omega \\ \Omega R & \Omega a & 0 \end{vmatrix} = \Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}\end{aligned}$$

Al sumar las fuerzas debidas a las aceleraciones de Coriolis y centrípeta en los tramos rectos del conducto, únicamente aparece:

$$\begin{aligned}F_{\text{tubo-recto } 1} &= \int_{-(a+z)}^{-a} \rho(-\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) S dz = \rho S z (-\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) \\ F_{\text{tubo-recto } 2} &= \int_{-a}^{-(a+z)} \rho(\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) S dz = \rho S (\Omega^2 R \hat{j} - \Omega^2 a \hat{i}) (-z)\end{aligned}$$

Si se denomina  $L$  a la longitud del tramo recto, la fuerza actuante sobre los dos tramos rectos será:

$$F_{\text{tubo-recto}} = -\rho S \Omega^2 R L \hat{j}$$

La fuerza resultante sobre todos los diversos tramos del conducto se expresará:

$$\begin{aligned}F_{CF} &= -\dot{m}[2 V_Y] \hat{k} - P_A S \hat{k} - P_B S \hat{k} + \rho g L_{\text{total}} S \hat{k} + \\ &+ [2 \rho S R \Omega (V + \Omega R) \hat{i}] - 2 \rho S a^2 \Omega^2 \hat{i} - \rho S R \Omega^2 L \hat{j}\end{aligned}$$

Obsérvese que la fuerza resultante tiene componentes en las tres direcciones.

## Problema 31

### Enunciado

En la figura siguiente, se muestran dos configuraciones de una válvula para dirigir aceite hidráulico, denominada “servoválvula”. Obsérvese que el fluido se dirige a través de unas toberas hacia unas placas planas, denominadas *paletas*.

Se presentan dos configuraciones de conexión diferentes. Ambas constan de cuatro toberas y dos paletas y, en ambos casos, las dos paletas están unidas mediante una armadura y se mueven solidariamente.

Obsérvese que, en ambas configuraciones, dos de las toberas tienen flujo saliente, mientras que en las otras dos el flujo es entrante.

Sabiendo que la distancia entre cada tobera y paleta cuando las paletas están centradas es  $X_0$ , que el diámetro de las toberas es  $D$  y que se cumple que  $X_0 \ll D$ , determine:





1. La fuerza neta actuante sobre las dos paletas, para una posición genérica de las mismas y en función de los parámetros  $X_0$ ;  $D$ ;  $P_P$ ;  $P_A$ ;  $P_B$ ;  $P_T$ ;  $X$ ; se cumple que  $P_P > P_A$  &  $P_B > P_T$ .

$X$  es el desplazamiento de la paleta respecto a su posición central  $X_0$ .  $-X_0 \leq X \leq X_0$

Determine dicha fuerza neta actuante para las dos configuraciones de flujo, detalladas en los esquemas de las figuras siguientes, y comente las diferencias entre los resultados obtenidos.

Recuerde que la relación entre el caudal real que fluye por una obstrucción y el caudal teórico se da por el coeficiente de descarga  $C_d$ :  $C_d = \frac{Q_{\text{real}}}{Q_{\text{teórico}}}$ . Considere  $C_d$  conocido.

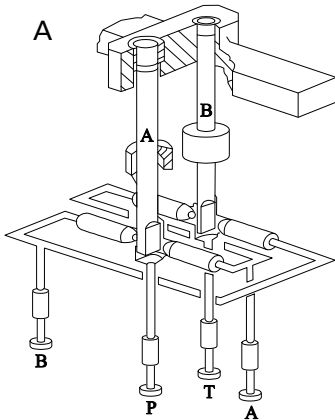


Fig. 31.1  
Configuración A

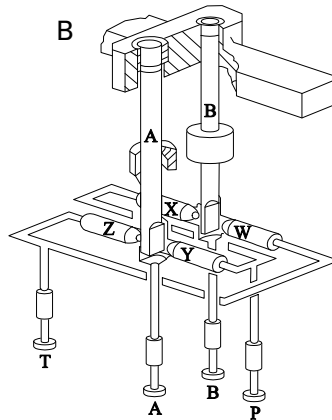


Fig. 31.2  
Configuración B

## Resolución

Las dos configuraciones se pueden representar del modo siguiente

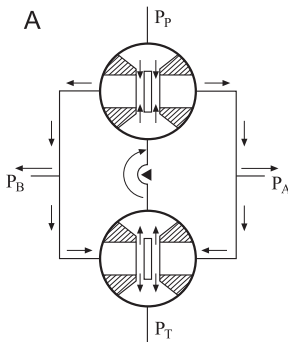


Fig. 31.3  
Configuración A

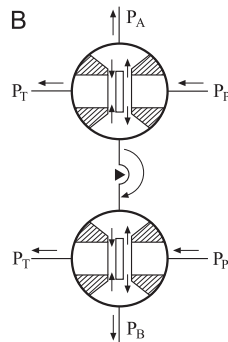


Fig. 31.4  
Configuración B

Para determinar la fuerza que el fluido ejerce sobre las paletas, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento.

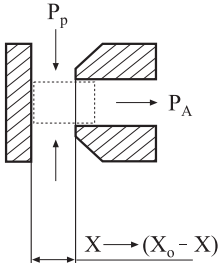
$$-\int_{SE} P \cdot d\vec{S} - \int_{SS} P \cdot d\vec{S} - \int_{SL} P \cdot d\vec{S} + \int_{SL} \vec{\tau} \cdot d\vec{S} + \int_{V_c} \rho \cdot \vec{g} \cdot dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \cdot \vec{V}_i \cdot dV + \oint_{sc} \rho \cdot \vec{V}_i \cdot \vec{V}_r \cdot d\vec{S}$$



De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento a cada una de las diversas toberas, se obtiene lo siguiente.

Configuración A. (Obsérvese que el análisis se realiza en régimen permanente y se desprecian las fuerzas másicas).

Fig. 31.5  
Tobera 1,  
configuración A



$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_{A1} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dPT} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

Recuérdese que la magnitud X se entiende como el desplazamiento de la paleta respecto a su posición inicial.

$$v_{A1} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = \frac{4 \cdot C_{dPT} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

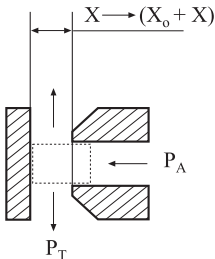
$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dPT}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

siendo esta la fuerza de reacción, fuerza que la paleta ejerce en dirección X, sobre el fluido.

Configuración A, tobera 2, flujo de la tobera hacia la paleta.

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control de la figura 31.6 se obtiene:

Fig. 31.6  
Tobera 2,  
configuración A





$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_{A_2} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$v_{A_2} = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

siendo esta la fuerza de reacción que la paleta ejerce sobre el fluido.

Configuración A, tobera 3, flujo de la tobera hacia la paleta.

Realizando los mismos pasos que en los apartados anteriores, ahora sobre el volumen de control de la figura 31.7, se obtiene:

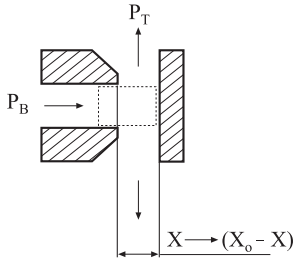


Fig. 31.7  
Tobera 3,  
configuración A

$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_{B1} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$v_{B1} = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Fuerza de reacción que la paleta ejerce sobre el fluido para este caso.

Configuración A, tobera 4, flujo de la paleta hacia la tobera.

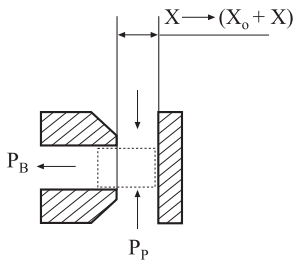


Fig. 31.8  
Tobera 4,  
configuración A



$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_{B_2} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho}}$$

$$v_{B_2} = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

La fuerza neta que las dos paletas de la configuración A ejercen sobre el fluido, fuerza de reacción, será

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} + \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} + P_A \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{TP}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$- \rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho} - P_B \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Obsérvese que, si la  $P_A \neq P_B$ , el sistema tiende a desequilibrarse, debido a que las presiones estáticas actuantes sobre las paletas crean una fuerza resultante que tiende a desplazar las paletas de su posición original, incluso en el caso en que  $X = 0$  (paleta centrada).

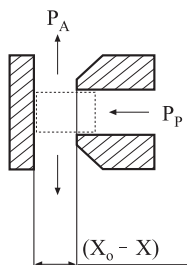
El par sobre la armadura sería esta fuerza por la distancia del eje de las toberas al eje de la armadura.

Para la segunda de las configuraciones, configuración B, se establece lo siguiente:

Configuración B, tobera 1, flujo de la tobera hacia la paleta.

Al igual que en los casos precedentes, se aplica la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control del caso bajo consideración. Para el presente caso, el volumen de control queda definido en la figura 31.9.

Fig. 31.9  
Tobera 1,  
configuración B





$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_p + P_p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

$$v_p = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_A)}{\rho} + P_p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

ecuación que establece la fuerza de reacción de la paleta sobre el contorno para el caso objeto de estudio.

Configuración B, tobera 2, flujo paleta-tobera.

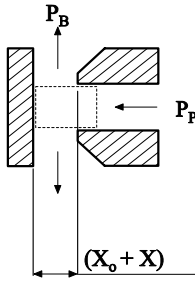


Fig. 31.10  
Tobera 2,  
configuración B

$$F_x = \rho \cdot Q \cdot v_T + P_p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{dTP} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho}}$$

$$v_T = \frac{4 \cdot C_{dTP} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho}}$$

$$F_x = \rho \cdot 4 \cdot C_{dTP}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_p - P_B)}{\rho} + P_p \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Configuración B, tobera 3, flujo tobera-paleta.

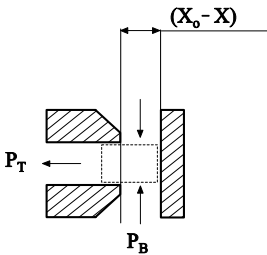


Fig. 31.11  
Tobera 3,  
configuración B



$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_p - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o - x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

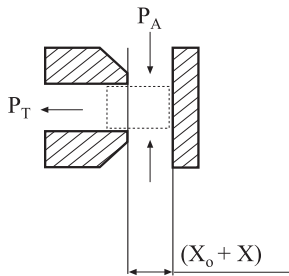
$$v_p = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o - x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o - x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_B - P_T)}{\rho} - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Al igual que en los casos anteriores, esta es la fuerza de reacción.

Configuración B, tobera 4, flujo de la paleta hacia la tobera.

Fig. 31.12  
Tobera 4,  
configuración B



$$F_x = -\rho \cdot Q \cdot v_T - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$Q = C_{d_{PT}} \cdot \pi \cdot D \cdot (x_o + x) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$v_T = \frac{4 \cdot C_{d_{PT}} \cdot (x_o + x)}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho}}$$

$$F_x = -\rho \cdot 4 \cdot C_{d_{PT}}^2 \cdot \pi \cdot (x_o + x)^2 \cdot \frac{2 \cdot (P_A - P_T)}{\rho} - P_T \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

La suma de fuerzas de reacción que las paletas ejercen sobre el fluido, para esta segunda configuración es:

$$\begin{aligned} F_x = & \rho \times 4 \times C_{d_{TP}}^2 \times \pi \times (x_o - x)^2 \times \frac{2 \times (P_p - P_A)}{\rho} + P_p \times \frac{\pi \times D^2}{4} + \rho \times 4 \times C_{d_{TP}}^2 \times \pi \times (x_o + x)^2 \\ & \times \frac{2 \times (P_p - P_B)}{\rho} + P_p \times \frac{\pi \times D^2}{4} - \rho \times 4 \times C_{d_{PT}}^2 \times \pi \times (x_o - x)^2 \times \frac{2 \times (P_B - P_T)}{\rho} - P_T \times \frac{\pi \times D^2}{4} \\ & - \rho \times 4 \times C_{d_{PT}}^2 \times \pi \times (x_o + x)^2 \times \frac{2 \times (P_A - P_T)}{\rho} - P_T \times \frac{\pi \times D^2}{4} \end{aligned}$$



Véase que, en esta segunda configuración, la presión que multiplica a la sección de la tobera, es la de alimentación, que es constante, con lo que a priori, independientemente de que las presiones  $P_A$  y  $P_B$  sean o no iguales, la fuerza debida a las presiones estáticas siempre estará en equilibrio. Así, para esta segunda configuración, si existe una fuerza resultante que tiende a desequilibrar la posición de las paletas, esta será debida al flujo de cantidad de movimiento, no a las presiones estáticas; en consecuencia, se puede considerar esta segunda configuración más estable que la primera.

→6





## Ecuaciones fundamentales

### Ecuación del momento de la cantidad de movimiento, momento cinético

#### 6.1 Ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas

La ecuación de transporte de Reynolds se estableció como:

$$\frac{dB_{sc}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho b dV + \oint_{SC} \rho b \vec{V}_r d\vec{s}$$

La propiedad genérica por unidad de masa “b” para el presente caso se define como:

$$b = \vec{r} \wedge \vec{v}; \quad \text{con lo que} \quad B = \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) dV$$

Así, el primer término de la ecuación de transporte de Reynolds queda:

$$\begin{aligned} \frac{dB_{sc}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) dV = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge m \vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m \vec{v} + \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = m (\vec{v} \wedge \vec{v}) + \\ \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge m \vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0 \end{aligned}$$

Un modo conceptual de ver el momento creado por una partícula de fluido que se desplaza con una velocidad  $\vec{V}$  con respecto a un sistema coordenado fijo sería mediante la aplicación de la segunda ecuación de Newton.

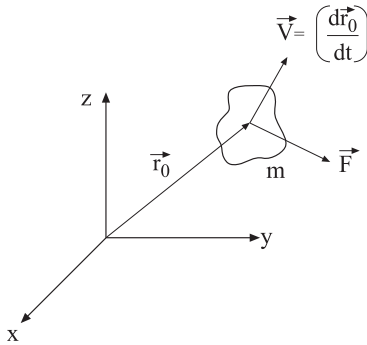
El concepto de fuerza se puede definir según la segunda ley de Newton como:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$$

Sea una partícula de masa m, que se mueve a una velocidad  $\vec{V}_1$ , siendo  $\vec{F}$  la fuerza neta que actúa sobre ella.



Fig. T 6.1  
Desplazamiento  
de una partícula  
respecto a un  
sistema no inercial



El momento que crea esta partícula con respecto a un sistema de coordenadas fijo se define como:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \frac{d}{dt}(m_p \cdot \vec{V})$$

Obsérvese que el resultado coincide con el obtenido anteriormente.

Sustituyendo los términos acabados de hallar en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) dV + \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v}_r d\vec{s}$$

siendo esta expresión la ecuación de momento de la cantidad de movimiento. El primer término después de la igualdad indica la variación temporal del momento cinético en el interior del volumen de control, mientras que el segundo término estudia el flujo de momento cinético a través de las superficies de control. Esta ecuación es de carácter vectorial, en realidad, son tres ecuaciones con las que se puede obtener el momento sobre cada uno de los tres ejes coordenados.

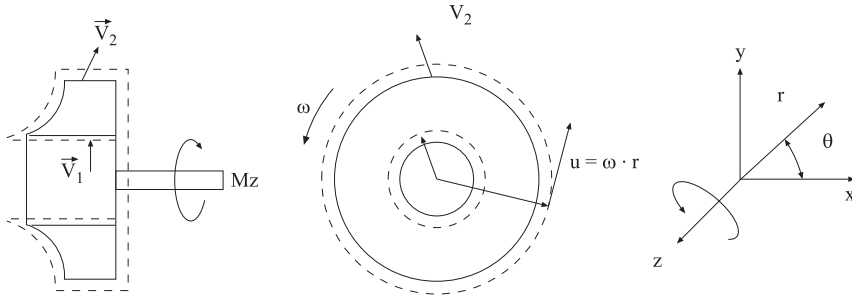
Recordando lo establecido en la ecuación de cantidad de movimiento, donde se detallaba que las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido se descomponen en fuerzas másicas y superficiales, para el presente caso se deberán considerar los momentos generados por dichas fuerzas; así, la ecuación resultante tomará la forma.

$$\vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \vec{g} dV + \vec{r} \wedge - \oint_{SC} p d\vec{s} + \vec{r} \wedge \oint_{SC} \vec{\tau} d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) dV + \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v}_r d\vec{s}$$

ecuación que puede considerarse como la forma explícita de la ecuación del momento cinético para sistemas inerciales de coordenadas.

## 6.2 Aplicación de la ecuación del momento cinético a turbomáquinas

Sea el volumen de control siguiente (líneas a trazos), que representa el rodete de una turbomáquina. Se va a proceder al cálculo del momento con respecto al eje z.


 Fig. T 6.2  
Esquema del  
rodete de una  
turbomáquina

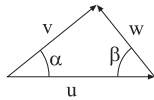
La ecuación del momento cinético con respecto a dicho eje z se expresa:

$$\sum M_z = \left[ \frac{d}{dt} \int_{V_{vc}} \rho (\vec{r} \times \vec{V}) dV \right] \cdot \vec{k} + \left[ \oint_{SC} \rho (\vec{r} \times \vec{V}) (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) ds \right] \vec{k}$$

Hipótesis simplificadoras:

- Se considera que solo hay momento, respecto al eje z.
- No hay acumulación de momento angular en el volumen de control.
- El flujo de fluido a la entrada y a la salida del volumen de control es uniforme.

Considerando un sistema de referencia Euleriano, fijo, tanto a la entrada como a la salida del volumen de control, se pueden definir los siguientes triángulos de velocidades:



u = velocidad de arrastre o tangencial  
v = velocidad absoluta  
w = velocidad relativa

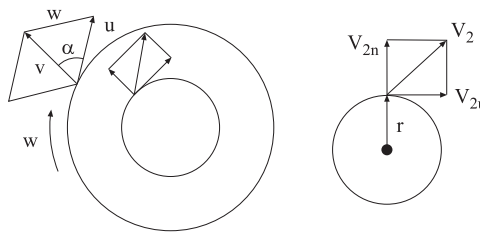


Fig. T 6.3

Obsérvese que la velocidad absoluta se puede descomponer en sus componentes normal y tangencial.

Según estos considerándolos, la ecuación queda:

$$\sum M_z = \oint_{SC} \rho (\vec{r}_0 \times \vec{V}) (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) ds$$

Extendida a la superficie entrante y saliente del volumen de control, se obtiene:

$$\sum M_z = \oint_{SS} \rho (\vec{r}_2 \times \vec{V}_2) (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) ds \hat{k} + \int_{SE} \rho (\vec{r}_1 \times \vec{V}_1) (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) ds \hat{k}$$

El producto vectorial de los dos vectores definidos en el problema se puede dar como:

$$\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{V}_{2n} + \vec{r}_2 \times \vec{V}_{2u} = r_2 V_{2n} \sin(r_2 V_{2n}) + r_2 V_{2u} \sin(r_2 V_{2u}) = r_2 V_{2u} \sin(r_2 V_{2u})$$



de donde:

$$\sum M_z = \oint_{SS} \rho (\vec{r}_2 \times \vec{V}_{2u}) (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) ds + \int_{SE} \rho (\vec{r}_1 \times \vec{V}_{1u}) (\vec{V}_r \cdot \hat{n}) ds$$

El producto escalar restante se define como:

$$\vec{V}_r \cdot \hat{n} = V_{ru} \cdot n \cos(\vec{V}_{ru} \hat{n}) + V_{rn} \cdot n \cos(\vec{V}_{rn} \hat{n}) = V_{rn} \cdot n \cos(\vec{V}_{rn} \hat{n})$$

Sustituyendo en la ecuación del momento cinético, queda:

$$\sum M_z = \oint_{SS} \rho (\vec{r}_2 \times \vec{V}_{2u}) (\vec{V}_{rn} \cdot \hat{n}) ds + \int_{SE} \rho (\vec{r}_1 \times \vec{V}_{1u}) (\vec{V}_{rn} \cdot \hat{n}) ds$$

de donde finalmente se obtiene:

$$\sum M_z = |r_2 V_{2u} \dot{m}|_{SS} - |r_1 V_{1u} \dot{m}|_{SE} = \dot{m} (r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u})$$

El momento con respecto al eje z es el que el motor eléctrico transmite a la bomba. Recordando que la potencia transmitida es el producto del par por la velocidad de giro  $\dot{W} = M_z \cdot \omega$ , se obtiene:

$$-\dot{W}_{\text{aje}} = M_z \cdot \omega = \dot{m} \cdot \omega (r_2 V_{2u} - r_1 V_{1u})$$

$$-\dot{W}_{\text{aje}} = \dot{m} (u_2 V_{2u} - u_1 V_{1u})$$

$$-\frac{\dot{W}_{\text{aje}}}{\dot{m}} = -Y = (u_2 V_{2u} - u_1 V_{1u})$$

El signo (-) indica que la potencia es comunicada hacia el volumen de control (transferida al fluido), según el convenio de signos establecido en termodinámica.

Para turbinas:  $u_2 V_{2u} < u_1 V_{1u} \rightarrow \dot{W}_{\text{aje}} > 0$

Para bombas:  $u_2 V_{2u} > u_1 V_{1u} \rightarrow \dot{W}_{\text{aje}} < 0$

### 6.3 Ecuación de momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas

El momento de la cantidad de movimiento para un sistema inercial de coordenadas se ha establecido:

$$\sum \vec{M}_0 = \frac{d\vec{B}_{SC}}{dt} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} dV$$

La aceleración de una partícula referida a un sistema inercial se puede dar como:



$$\frac{d\vec{V}_{XYZ}}{dt} = \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'}$$

Sustituyendo en la ecuación del momento cinético, se obtiene:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} dV$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt} + \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} dV$$

Obsérvese que el primer término después de la igualdad caracteriza el momento cinético de la partícula de fluido con respecto a un sistema de referencia móvil.

$$\vec{M}_{0\ x'y'z'} = \vec{r} \wedge m \frac{d\vec{V}_{x'y'z'}}{dt}$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_{x'y'z'}) dV + \oint_{SC} \rho (\vec{r} \wedge \vec{V}_{x'y'z'}) \vec{V}_{x'y'z'} \cdot d\vec{s} \\ &+ \vec{r} \wedge \int_{VC} \rho \left\{ \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_{x'y'z'} \right\} dV \end{aligned}$$

ecuación que representa el momento cinético para sistemas no inerciales de coordenadas.



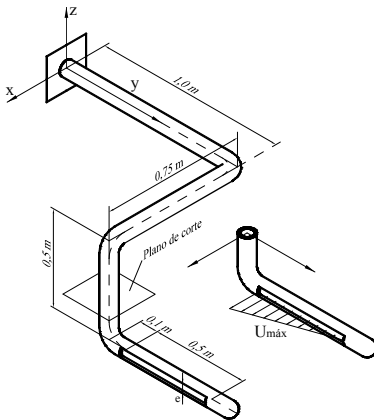
## Problema 32

### Enunciado

En el conducto de la figura, el fluido sale de la ranura con una velocidad uniforme que varía linealmente con la distancia  $Y$ , tal como se muestra en la figura adjunta. Si el caudal volumétrico que entra por el conducto es  $Q$ , determine:

1. El valor de la velocidad máxima.
2. Los momentos que el fluido crea sobre el anclaje.
3. Si la parte inferior del conducto pudiese girar respecto al eje  $z$  (plano de corte) y sabiendo que el par antagonista al giro está dado por  $M = K\omega$ , siendo  $K = \text{cte}$ ;  $\omega = \text{vel de giro (rad/s)}$ , halle la velocidad de giro.

Fig. 32.1



### Resolución

1. Según la ecuación de continuidad en régimen permanente:

$$0 = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Para las secciones de entrada y salida:

$$\dot{m}_e = \int_{ss} \rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

o bien:

$$Q_e = \int_{ss} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

La ecuación que determina la distribución de velocidades en función de la distancia será:

$$a = \frac{u_{\text{máx}}}{0,6 - 0,1}$$



$$v = v_0 - ay$$

$$v = v_0 - \frac{u_{\text{máx}}}{0,6 - 0,1} y$$

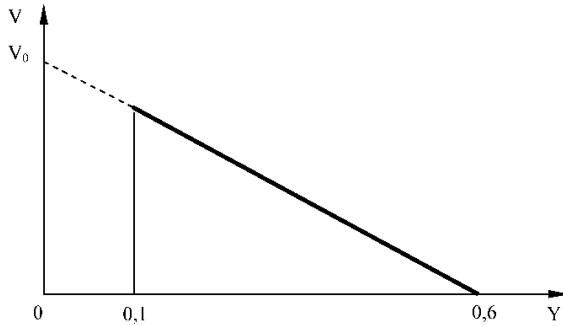


Fig. 32.2

Siendo la velocidad en el origen de coordenadas,  $V_0$ .

$$\frac{u_{\text{máx}}}{0,5} = \frac{V_0}{0,6}$$

$$V_0 = \frac{0,6u_{\text{máx}}}{0,5}$$

de donde la ecuación que determina la velocidad será:

$$v = \frac{0,6u_{\text{máx}}}{0,5} - \frac{u_{\text{máx}}}{0,6 - 0,1} y$$

o bien:

$$v = \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} [0,6 - y]$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$Q_e = \int_{0,1}^{0,6} u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6 - Y}{0,5} \right) e \, dy = \frac{u_{\text{máx}}}{0,5} e \left[ 0,6Y - \frac{Y^2}{2} \right]_{0,1}^{0,6} = u_{\text{máx}} e 0,25$$

2. La ecuación de momento cinético en régimen permanente se enuncia:

$$\bar{M}_0 = \int_{se} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v} d\vec{s} + \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v} d\vec{s}$$

Puesto que el flujo entrante no causa momento respecto a ningún eje, se tiene:

$$\bar{M}_0 = \int_{ss} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v} d\vec{s}$$



el término  $\int \rho \vec{v} d\vec{s}$  representa el flujo másico saliente, que se puede dar como:  $\rho Q = \rho u_{\text{máx}} e 0,25$ , aunque en este caso, puesto que la  $V$  depende del  $ds$ , es necesario hacer la integración.

El término  $(\vec{r} \wedge \vec{v})$  se representa como:

$$(\vec{r} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0,75 & (1+Y) & -0,5 \\ v & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0,5v \hat{j} - (1+Y)v \hat{k}$$

Sustituyendo en la ecuación de cantidad de movimiento, y sustituyendo asimismo la velocidad por su valor, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= \int e \rho \left[ -0,5 u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6-Y}{0,5} \right) \hat{j} - (1+Y) u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6-Y}{0,5} \right) \hat{k} \right] u_{\text{máx}} \left( \frac{0,6-Y}{0,5} \right) dy = \\ &= \int_{0,1}^{0,6} -e \rho u_{\text{máx}}^2 0,5 \left( \frac{0,6-Y}{0,5} \right)^2 \hat{j} dy - \int_{0,1}^{0,6} (1+Y) e \rho u_{\text{máx}}^2 \left( \frac{0,6-Y}{0,5} \right)^2 \hat{k} dy = \\ &= -e \rho u_{\text{máx}}^2 \frac{1}{0,5} \left[ 0,6^2 Y - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right]_{0,1}^{0,6} \hat{j} \\ &\quad - e \rho u_{\text{máx}}^2 \frac{1}{0,25} \left[ 0,6^2 Y - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{Y^2}{2} + \frac{Y^3}{3} \right]_{0,1}^{0,6} \hat{k} + \\ &\quad - e \rho u_{\text{máx}}^2 \frac{1}{0,25} \left[ 0,6^2 \frac{Y^2}{2} - 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{Y^3}{3} + \frac{Y^4}{4} \right]_{0,1}^{0,6} \hat{k} \end{aligned}$$

de donde los momentos sobre el anclaje vendrán dados por:

$$\vec{M}_0 = -e \rho u_{\text{máx}}^2 0,0833 \hat{j} - e \rho u_{\text{máx}}^2 0,312 \hat{k}$$

3. Aplicando la ecuación de momento cinético respecto del eje  $z$ , situado perpendicular a la sección A-A, y considerando régimen permanente (velocidad de giro constante), se tiene (únicamente la sección saliente causa momento):

$$\vec{M}_z = \int_{ss} \rho (\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{v} d\vec{s}$$

Para ese caso, considerando únicamente el par que provoca un giro sobre el aspersor, se tiene:

$$M_z = - \int_{ss} \rho y (v - \omega y) \vec{v} ds = - \int_{ss} \rho y (v - \omega y) v ds$$

La velocidad  $v$  es la velocidad con que el fluido sale por la sección de salida del conducto (velocidad absoluta del fluido), de donde:





$$\begin{aligned}
 M_z &= - \int_{ss} \rho y \left( u_{\max} \left( \frac{0,6-y}{0,5} \right) - \omega y \right) u_{\max} \left( \frac{0,6-y}{0,5} \right) e dy = \\
 &= - \int_{0,1}^{0,6} \frac{u_{\max}}{0,5} \rho e y \left[ u_{\max} \frac{(0,6-y)^2}{0,5} - \omega y (0,6-y) \right] dy = \\
 &= - \frac{u_{\max} \rho e}{0,5} \int_{0,1}^{0,6} \left[ \frac{u_{\max}}{0,5} (0,6^2 - 2 \cdot 0,6 y + y^2) y - \omega y^2 (0,6-y) \right] dy = \\
 &= - \frac{u_{\max} \rho e}{0,5} \left[ \frac{u_{\max}}{0,5} \left( 0,6^2 \frac{y^2}{2} - 2 \cdot 0,6 \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) - \omega \left( 0,6 \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \right]_{0,1}^{0,6} = \\
 &= - \frac{u_{\max} \rho e}{0,5} \left[ \frac{u_{\max}}{0,5} \left( \frac{0,6^2}{2} (0,6^2 - 0,1^2) - \frac{2 \cdot 0,6}{3} (0,6^3 - 0,1^3) + \frac{0,6^4 - 0,1^4}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \omega \left( \frac{0,6}{3} (0,6^3 - 0,1^3) - \frac{0,6^4 - 0,1^4}{4} \right) \right] \\
 &= - \frac{u_{\max}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375 + \omega 0,010625 \frac{u_{\max} \rho e}{0,5}
 \end{aligned}$$

Puesto que el par antagonista es  $k \omega$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 k \omega &= - \frac{u_{\max}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375 + \omega 0,010625 \frac{u_{\max} \rho e}{0,5} \\
 \omega \left( -k + 0,010625 \frac{u_{\max} \rho e}{0,5} \right) &= \frac{u_{\max}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375; \\
 \omega &= \frac{u_{\max}^2 \rho e}{0,5^2} 0,009375 \frac{1}{-k + 0,010625 \frac{u_{\max} \rho e}{0,5}}
 \end{aligned}$$

### Problema 33

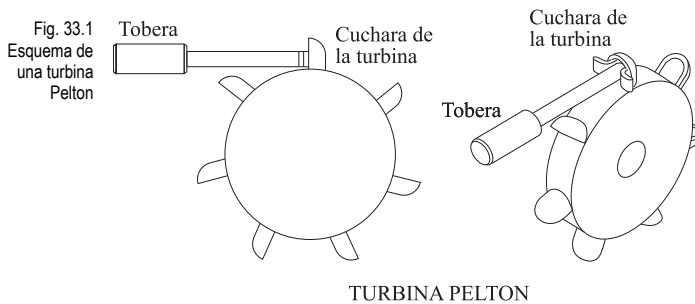
#### Enunciado

Sea la turbina Pelton, esquematizada en la figura 33.1. Si se supone que el agua sale de la tobera a una velocidad  $V$  constante, que la velocidad de giro de la turbina es  $\omega$ , también constante, y que el fluido sale de los álabes de la turbina con un ángulo  $\alpha$ , determine:



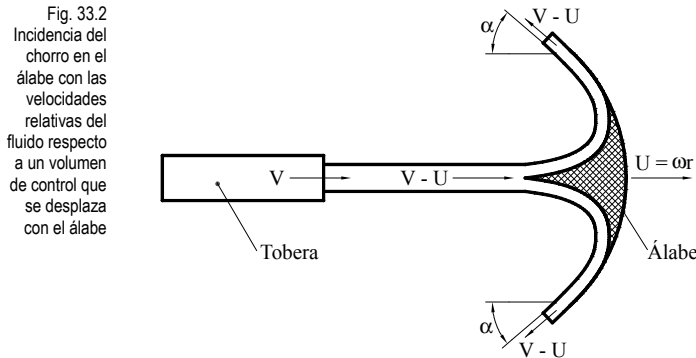
1. La potencia comunicada al eje de la turbina. Considere  $r$  el radio de la turbina.
2. Cuál sería la velocidad de giro de la turbina si el par antagonista se estima que está determinado por:  $M = a + b \omega$ , siendo  $a$  y  $b$  dos constantes conocidas y  $\omega$  la velocidad de giro de la turbina.
3. Determine la ecuación del rendimiento de la turbina. ¿Qué consideraciones se pueden realizar para una turbina de  $\infty$  álabes?

Datos:  $V$ ,  $\omega$ ,  $r$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $b$ , ( $\omega$  ha de ser determinada en el apartado 2);  $\phi$  = diámetro del jet



## Resolución

1. Utilizando un volumen de control que se desplace con el álabe de la turbina, y aplicando la ecuación de continuidad entre la entrada y, salida de dicho volumen de control, se desprende que la velocidad relativa del líquido a la entrada y a la salida es la misma.



Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al mismo volumen de control móvil en régimen permanente se establece:

$$\sum F_{\text{ext } x} = - \int_{\text{vc}} P \bar{n} \, ds + \oint_{\text{sc}} \bar{\tau} \, ds + m \bar{g} = \oint_{\text{sc}} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} = \int_{\text{ssc}_1} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} + \int_{\text{ssc}_2} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s}$$

despreciando los efectos de las fuerzas másicas:

$$\sum F_{\text{x superficiales}} = \int_{\text{se}} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} + \int_{\text{ss}} \rho \bar{V}_x \bar{V} \, d\bar{s} \cdot 2$$

$\begin{matrix} (+) & (-) \end{matrix}$ 
 $\begin{matrix} (-) & (+) \end{matrix}$



$$F_{x \text{ sup}} = -\rho (v - \omega r)^2 S_e - \rho (v - \omega r)^2 \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot S_s$$

$$= -\rho (v - \omega r)^2 [S_e + 2 S_s \cdot \cos \alpha]$$

y, aplicando la ecuación de continuidad entre la entrada y las salidas del volumen de control, se obtiene:

$$S_e V_e = S_s V_s \cdot 2$$

$$V_e = V_s = V - \omega r$$

$$S_e = 2 S_s = S$$

$$F_{x \text{ superficiales}} = -\rho (v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha)$$

Ésta es la fuerza que el contorno realiza sobre el fluido la fuerza que el fluido causa sobre el alabe es:

$$F_x = \rho (v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha)$$

El par creado sobre el eje de giro debido a la fuerza hallada será:

$$M_o = F_x \wedge r = F_x \cdot r \hat{k} = \rho (v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot r \hat{k}$$

La potencia comunicada será:

$$N_a = M_o \cdot \omega = \rho \left( v - \overbrace{\omega r}^u \right)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot \overbrace{r \cdot \omega}^u$$

Para este volumen de control móvil, el caudal entrante al volumen de control será:

$$(v - \omega r) \cdot S = Q_E$$

de donde:

$$N_a = \rho (v - \omega r) \cdot Q_E \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot \omega r$$

2. Si el par antagonista es del tipo:

$M = A + B \omega$ , donde A y B son constantes, y  $\omega$  es la velocidad de giro en rad/s.

Igualando el par creado por el fluido al par antagonista, se tiene:

$$M_o = \rho (v - \omega r)^2 \cdot S \cdot (1 + \cos \alpha) \cdot r = A + B \omega$$



ecuación de segundo grado; de aquí se despeja  $\omega$ :

$$\begin{aligned}
 v^2 - 2v \cdot \omega r + \omega^2 r^2 &= [A + B\omega] \frac{1}{\rho S r (1 + \cos \alpha)}; \\
 -2v \cdot \omega r + \omega^2 r^2 - \omega \frac{B}{\rho S r (1 + \cos \alpha)} + v^2 - \frac{A}{\rho S r (1 + \cos \alpha)} &= 0; \\
 \omega^2 - 2v \frac{\omega}{r} - \omega \frac{B}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)} + \frac{v^2}{r^2} - \frac{A}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)} &= 0; \\
 \omega^2 - \omega \left[ \underbrace{\frac{2v}{r} + \frac{B}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)}}_R \right] + \underbrace{\frac{v^2}{r^2} - \frac{A}{\rho S r^3 (1 + \cos \alpha)}}_S &= 0; \\
 \omega^2 - \omega R + S &= 0 \\
 \omega &= \frac{R \pm \sqrt{R^2 - 4S}}{2}
 \end{aligned}$$

3. Determinación del rendimiento de la turbina:

Considerando que el nivel libre del agua en la presa de aguas arriba de la turbina, respecto a ésta, es  $H$ , y despreciando las pérdidas en el conducto de la alimentación, se tiene que la potencia teórica a la entrada de la turbina es:

$$N_o = \rho g H Q = \rho g H v \cdot S = \frac{2}{2} \rho g H v \cdot S$$

puesto que  $v = \sqrt{2gH}$

$$N_o = \frac{1}{2} \rho S v^3$$

con lo cual el rendimiento se puede establecer como:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{N_a}{N_o} = \frac{\rho (v - \omega r)^2 \cdot S (1 + \cos \alpha) \cdot \omega r}{\frac{1}{2} \rho S v^3} = \\
 \eta &= \frac{(v - \omega r)^2 \cdot \omega r \cdot (1 + \cos \alpha)}{\frac{1}{2} v^3}
 \end{aligned}$$

El rendimiento máximo de la turbina se obtendrá para un valor del ángulo  $\alpha$  de 0 grados. Para este considerando se tiene:

$$\eta = \frac{(v - \omega r)^2 \cdot \omega r \cdot 2}{\frac{1}{2} v^3} = \frac{(v - u)^2 \cdot 4u}{v^3} = 4 \frac{u}{v} \left[ \frac{v - u}{v} \right]^2$$



$$\eta = 4 \frac{u}{v} \left[ \frac{v-u}{v} \right]^2$$

Derivando el  $\eta$  respecto a  $\frac{u}{v}$  se obtendrá el valor de  $\frac{u}{v}$  para el cual la función será máxima:

$$\frac{d\eta}{d\left(\frac{u}{v}\right)} = 4 \left[ 1 - 4 \frac{u}{v} + 3 \left( \frac{u}{v} \right)^2 \right] = 0;$$

$$\left( \frac{u}{v} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \frac{u}{v} \right) + \frac{1}{3} = 0;$$

De los dos resultados posibles, el único que tiene sentido físico es:  $\frac{u}{v} = \frac{1}{3}$ ;

con lo cual el rendimiento máximo se obtendrá cuando la relación entre la velocidad de salida del fluido por la tobera y la velocidad tangencial de la turbina sean:

$$\frac{u}{v} = \frac{\omega r}{v} = \frac{1}{3}$$

por otro lado, se observa que todo el proceso se ha realizado partiendo de la fuerza que el líquido ejerce sobre un álabe en solitario; puesto que la turbina tiene un número elevado de álabes que se suceden, se puede considerar que, en promedio, todo el caudal incidente realiza un trabajo; así, la fuerza media que actúa sobre los álabes se puede expresar (para  $\alpha=0$  grados):

$$F_{\text{media}} = 2 \rho S \cdot v (v - \omega r)$$

Véase que ahora se considera que todo el caudal que sale por la tobera actúa sobre los álabes.

La potencia media será  $N_{\text{media}} = 2 \rho S v (v - \omega r) \omega r$

El rendimiento se obtendrá

$$\eta = \frac{2 \rho S v (v - \omega r) \omega r}{\frac{1}{2} \rho S v^3} = \frac{4 (v - \omega r) \omega r}{v^2}$$

$$\eta = 4 \frac{u}{v} \left( 1 - \frac{u}{v} \right);$$

$$\frac{d\eta}{d\left(\frac{u}{v}\right)} = 4 \left( 1 - 2 \frac{u}{v} \right) = 0$$



$$\frac{u}{v} = \frac{1}{2}$$

Siendo ésta la relación de velocidades más apropiada para una turbina Pelton real.

## Problema 34

### Enunciado

Sea un sistema de aspersión tal como el que se ilustra en la figura 34.1. Los brazos que unen las dos toberas tienen forma de perfil aerodinámico Göttinguen 682, con una anchura y un ángulo de ataque constantes. Los coeficientes de arrastre y sustentación del perfil aerodinámico están dados por:

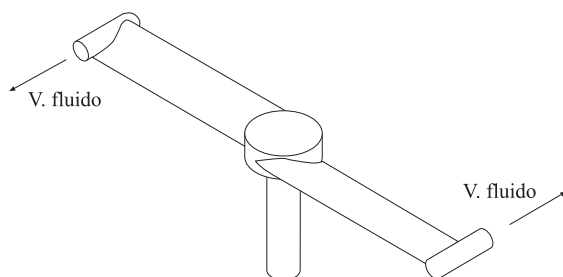
$$C_L = \frac{L}{\rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2 S_{\text{proyectada}}}$$

$$C_D = \frac{D}{\rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2 S_{\text{proyectada}}}$$

Considerar que la sección proyectada es la perpendicular al movimiento en cada caso.

El valor de los mismos se puede determinar partiendo de la curva polar adjunta, conocido el ángulo de ataque  $\alpha = 3^\circ$  figuras 34.2 y 34.3.

Fig. 34.1  
Esquema del  
sistema de  
aspersión  
considerado



Halle:

1. El par que crean los chorros de fluido, en función de la velocidad de salida del líquido por las toberas.
2. El par que se crea en el eje central, debido a la fuerza de arrastre.
3. Si el peso del conjunto es de 1.000 N y ha de ser soportado por el efecto de sustentación de los álabes, determine: la velocidad de giro necesaria para producir la sustentación requerida. ¿Cuál es el caudal requerido para que dicha sustentación exista?  
Radio del aspersor:  $R = 0,5$  m.

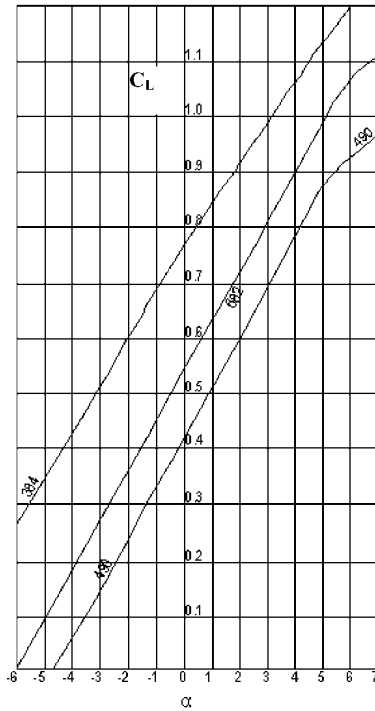


Fig. 34.2  
Coeficiente de sustentación  $C_L$ , en función del ángulo de ataque  $\alpha$

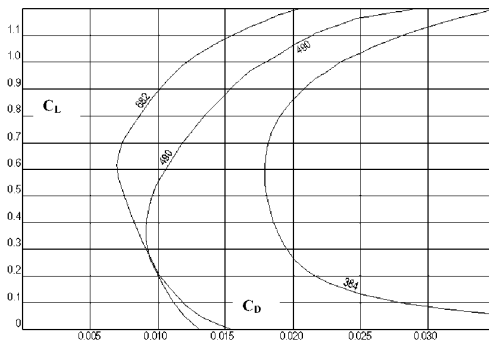


Fig. 34.3  
Curvas polares correspondientes a un colectivo de perfiles Göttingen

## Resolución

1. La ecuación del momento de la cantidad de movimiento se expresa:

$$\vec{M}_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) dV + \oint_{SC} \rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{V} d\vec{s}$$

Aplicada al conjunto aspersor, teniendo en cuenta la simetría del mismo y que el flujo entrante no causa momento, se obtiene:

$$\vec{M}_0 = \int_{S_{salida}} 2\rho(\vec{r} \wedge \vec{v}) \vec{V} d\vec{s} = 2\rho r (V_{fluido} - \omega r) Q_{un\ aspersor} = \rho r (V_{fluido} - \omega r) Q_{entrante}$$



2. El momento resistente establecido para un diferencial de superficie del álabe vendrá dado por:

$$D = C_D \rho \frac{1}{2} V_\infty^2 S_{PD} \Rightarrow dD = C_D \rho \frac{1}{2} V_\infty^2 b \sin \alpha dr \Rightarrow dD = C_D \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \sin \alpha dr$$

$b$  = anchura del álabe.  $dS_{PD} = b \sin \alpha dr$  ;

De la figura 34.2 entrando para un  $\alpha$  de  $3^\circ$  se obtiene un valor del coeficiente de sustentación de  $C_L=0,82$ ; con dicho valor del coeficiente de sustentación y para el perfil aerodinámico Göttinguen 682, a partir de la figura 34.3 se obtiene un valor del coeficiente de arrastre de  $C_D = 0,0088$ .

El momento producido por este diferencial de fuerza será:

$$dM = r dD = \frac{1}{2} C_D \rho r \omega^2 b \sin \alpha dr$$

de donde el momento que se opone al movimiento vendrá dado, teniendo en cuenta que existen dos álabes.

$$M = \int_0^R 2 \frac{1}{2} C_D \rho b \sin \alpha r^3 \omega^2 dr = C_D \rho b \sin \alpha \int_0^R r (\omega^2 r^2) dr$$

$$M = C_D \rho b \sin \alpha \omega^2 \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{4} C_D \rho b \sin \alpha \omega^2 R^4$$

Igualando los pares de arrastre y de momento cinético, se obtiene:

$$\frac{1}{4} C_D \rho b \sin \alpha \omega^2 R^4 = 2 \rho r (V_{flu} - \omega r) Q_{un\ aspersor} = \rho r (V_{flu} - \omega r) Q_{entrante}$$

Para  $r = R$ , que es la distancia de los chorros de salida al eje de giro, queda:

$$\frac{1}{4} C_D b \sin \alpha \omega^2 R^3 = (V_{flu} - \omega R) Q_{entrante}$$

En función de la sección proyectada de uno de los brazos del aspersor  $S_{PD} = R b \sin \alpha$ , se tiene:

$$\frac{1}{4} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 = (V_{flu} - \omega R) Q_{entrante}$$

3. La fuerza de sustentación viene dada por:

$$L = \rho C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S_{PL}$$





Para un diferencial de superficie, se tiene:

$$dL = \rho C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 b \cos \alpha dr$$

$$dL = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \cos \alpha dr$$

$$\int_0^L dL = \int_0^R \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \cos \alpha dr$$

de donde la fuerza de sustentación para los dos brazos del aspersor será:

$$L = 2 \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R b \cos \alpha$$

$$L = \rho C_L \frac{\omega^2 R^2 b \cos \alpha R}{3} = \rho C_L \frac{1}{3} S_{PL} \omega^2 R^2; \quad S_{PL} = R b \cos \alpha;$$

Puesto que  $L = 1.000 \text{ N}; \quad \rho C_L \frac{1}{3} S_{PL} \omega^2 R^2 = 1.000 = L$

Con lo cual la velocidad de giro será:

$$\omega = \sqrt{\frac{L}{\rho C_L \frac{1}{3} S_{PL} R^2}}$$

Una vez determinado  $\omega$  para hallar el caudal circulante, se utilizará la ecuación hallada en el apartado 2:

$$\frac{1}{4} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 = (V_{flu} - \omega R) Q_{entrante} = 2 (V_{flu} - \omega R) Q_{un aspersor}$$

$$V_{flu} = \frac{Q_{un aspersor}}{S_{conductor aspersor}}; \quad \frac{1}{4} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 = 2 \left( \frac{Q_{un aspersor}}{S_{conductor aspersor}} - \omega R \right) Q_{un aspersor}$$

$$\frac{Q_{un aspersor}^2}{S_{conductor}} - \omega R Q_{un aspersor} = \frac{1}{8} C_D S_{PD} \omega^2 R^2$$

$$Q_{un aspersor}^2 - \omega R S_{conductor} Q_{un aspersor} - \frac{1}{8} C_D S_{PD} \omega^2 R^2 S_{conductor} = 0$$

Ecuación de segundo grado de la cual se obtendrá el caudal saliente en una de las toberas.



## Problema 35

### Enunciado

Se desea realizar los cálculos preliminares para el estudio de un helicóptero. A priori, se estima que la masa del helicóptero será  $m$ , el rotor principal tendrá tres palas y el de la cola, cuatro. Las dimensiones principales del rotor principal y el de la cola se establecen en el dibujo adjunto. (Figura 35.1).

Si el ángulo de ataque de los álabes de ambos rotores se quiere a priori mantener constante igual a 4 grados, y para el perfil aerodinámico elegido se conoce que los coeficientes de sustentación y arrastre, tanto para el rotor principal como el de la cola, son:  $C_L = 0,8$ ;  $C_D = 0,0135$ , se pide:

1. Hallar la velocidad de giro del rotor principal  $\omega$  para que el helicóptero de masa  $m$  se mantenga en suspensión.
2. Determinar la ecuación de la velocidad de giro del rotor principal en función de la altura a la que se encuentre el helicóptero. Téngase en cuenta que la variación de la temperatura del aire con la altura de la atmósfera terrestre es  $T = T_0 - Kh$ .
3. Hallar la potencia del motor del rotor principal cuando el helicóptero se encuentra al nivel del mar.
4. Determinar el radio  $r_4$  para que el rotor de cola compense el par creado por el rotor principal. Considerar que el rotor de cola gira a una velocidad angular constante  $\Omega$ .

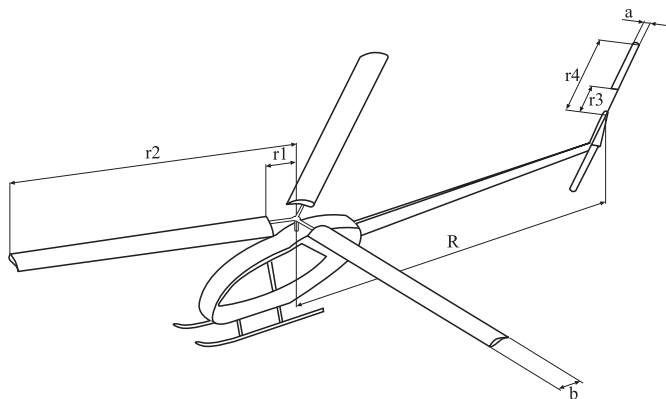
Recuérdese que:

$$\text{Fuerza de sustentación} = L = \rho C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S; \quad \text{fuerza de arrastre} = D = \rho C_D \frac{1}{2} V_\infty^2 S;$$

$V_\infty$  = velocidad del fluido sobre cada elemento diferencial de superficie del álabes.

$S$  = superficie proyectada, en planta, del álabes.

Fig. 35.1  
Esquema del helicóptero. Por razones de nitidez, se ha realizado el dibujo con únicamente dos palas en el rotor de cola. No obstante, en los cálculos se consideraran cuatro palas, puesto que así lo indica el enunciado.





## Resolución

1. Velocidad de giro para que el helicóptero de masa  $m$  se mantenga en suspensión.

Se conocen los siguientes datos: Ángulo de ataque  $\alpha = 4^\circ$ ;  $C_L = 0,8$ ;  $C_D = 0,0135$

El balance ha de ser tal que la fuerza de sustentación sea igual al peso del helicóptero.  
La fuerza de sustentación viene dada por:

$$L = \rho_{\text{aire}} C_L \frac{1}{2} V_\infty^2 S$$

$S$  = superficie proyectada del álabes

$V_\infty$  = velocidad del fluido

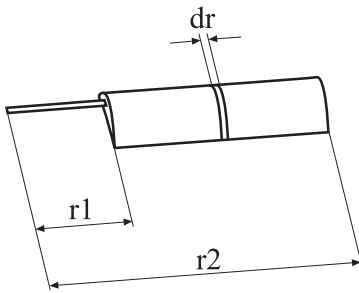


Fig. 35.2

$$\int_0^L dL_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho C_L \frac{1}{2} (\omega r)^2 b \cos \alpha dr$$

$$L_1 = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos \alpha \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$L_1 = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos \alpha \frac{r_2^3 - r_1^3}{3};$$

Esta es la fuerza de sustentación que crea un álabes; puesto que hay tres, la fuerza de sustentación será

$$L_{\text{rotor principal}} = \rho C_L \frac{1}{2} \omega^2 b \cos \alpha (r_2^3 - r_1^3) = \text{masa del helicóptero} \cdot g$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{heli}} \cdot g}{\rho C_L \frac{1}{2} b \cos \alpha (r_2^3 - r_1^3)}}$$

2. Para hallar la velocidad de giro en función de la altura a la que se encuentra el helicóptero respecto al nivel del mar, es necesario determinar la densidad del aire en función de dicha altura: considerando el aire como fluido ideal:

$$\rho = \frac{P}{RT}; \quad dp = -\rho g dh$$



$$T = T_0 - kh; \quad T_0 = \text{temperatura a nivel del mar}$$

$k$  = constante conocida

La presión del aire en función de la altura será

$$\int_{P_{\text{atm}}}^P \frac{dP}{P} = \int_0^h -\frac{g}{R(T_0 - kh)} dh$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_{\text{atm}}}\right) = \frac{g}{kR} \ln\left[\frac{T_0 - kh}{T_0}\right]$$

$$P = P_{\text{atm}} \left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR}}$$

Esta ecuación proporciona la variación de la presión del aire con la altura.

La velocidad de giro del rotor en función de la altura a la que se encuentra el helicóptero vendrá dada:

La densidad del aire en función de la altura es

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{P}{R(T_0 - kh)} = \frac{1}{R(T_0 - kh)} \cdot P_{\text{atm}} \cdot \left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR}} = \frac{P_{\text{atm}}}{R T_0} \left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{kR} - 1\right)}$$

Con lo que:

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\text{heli}} \cdot g}{C_L \frac{1}{2} b \cos \alpha (r_2^3 - r_1^3) \cdot \frac{P_{\text{atm}}}{R T_0} \left(\frac{T_0 - kh}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{kR} - 1\right)}}$$

Esta ecuación da la velocidad de giro del rotor principal en función de la altura a la que esté situado el helicóptero.

3. La potencia del rotor principal será la que se requiera para vencer el par generado por dicho rotor. El par creado por una de las palas del rotor principal será

$$D = C_D \rho \frac{1}{2} v_{\infty}^2 s$$

$$dD = C_D \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 b \sin \alpha dr$$

$$\int_0^M dM = dD \cdot r = \int_{r_1}^{r_2} C_D \rho \frac{1}{2} \omega^2 r^2 r \cdot b \sin \alpha dr$$

$$M_1 = C_D \rho \frac{1}{2} \omega^2 b \sin \alpha \frac{(r_2^4 - r_1^4)}{4}$$



El par creado por las tres palas es

$$M_{\text{total}} = 3 \cdot C_d \rho \frac{1}{8} \omega^2 b \sin \alpha (r_2^4 - r_1^4)$$

La potencia del motor será  $N_{\text{motor}} = M_{\text{total}} \cdot \omega$

4. Para hallar el par que sobre el eje principal crea el rotor de cola, se determinará la fuerza que en sentido horizontal crean las cuatro palas del rotor de cola. Dicha fuerza por la distancia entre los dos ejes  $R$  será el par que el rotor de cola crea sobre el eje principal.

La fuerza en sentido horizontal creada por una de las palas se determina:

Sea  $\beta$  el ángulo de ataque de las palas del rotor de cola. La velocidad de giro del rotor de cola es  $\Omega$ .

$$\int_0^L dL = \int_{r_3}^{r_4} \rho C_L \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 a \cos \beta dr$$

$$L_1 = C_L \rho \frac{1}{2} \Omega^2 a \cos \beta \frac{(r_4^3 - r_3^3)}{3}$$

La fuerza creada por las cuatro palas del rotor de cola es

$$L_{\text{cola}} = \frac{2}{3} C_L \rho \Omega^2 a \cos \beta (r_4^3 - r_3^3)$$

El par sobre el eje del rotor principal creado por el rotor de cola será

$$M_{\text{cola}} = \frac{2}{3} C_L \rho \Omega^2 a \cos \beta (r_4^3 - r_3^3) \cdot R$$

Obsérvese que el parámetro  $R$  caracteriza la distancia perpendicular entre el eje de giro del rotor principal y el eje de giro del rotor de cola.

Este par es el que ha de compensar el par creado por el rotor principal, con lo cual

$$3 C_D \frac{1}{8} \omega^2 b \sin \alpha (r_2^4 - r_1^4) = \frac{2}{3} C_L \Omega^2 a \cos \beta R (r_4^3 - r_3^3)$$

$$r_4 = \sqrt[3]{\frac{C_D \frac{3}{8} \omega^2 b \sin \alpha (r_2^4 - r_1^4)}{\frac{2}{3} C_L \Omega^2 a \cos \beta R} + r_3^3}$$

ecuación que caracteriza el radio del rotor de cola para compensar el par de giro creado por el rotor principal.



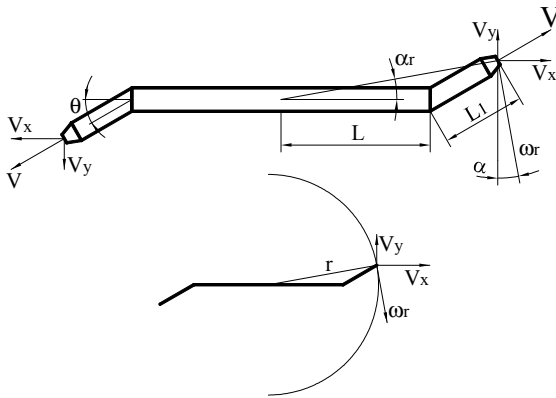
## Problema 36

### Enunciado

Sea el aspersor esquematizado de la figura 36.1, conocidos el diámetro de las toberas de salida, las longitudes  $L$  y  $L_1$  de los brazos del aspersor, el ángulo  $\theta$ , el caudal másico entrante  $\dot{m}$ , la densidad del fluido  $\rho$  y el par antagonista  $M_0 = k \omega$ , siendo  $k =$  constante, y  $\omega$  la velocidad de giro en rad/s. Para la realización de este problema, no es necesario que se consideren en los diversos tramos del conducto, las aceleraciones centrípeta y coriolis.

Se pide hallar la ecuación que determina la velocidad de giro del aspersor.

Fig. 36.1  
Esquema del  
aspersor, con  
sus parámetros  
físicos  
fundamentales



### Resolución

La ecuación de momento cinético para sistemas inerciales se enuncia:

$$\Sigma M_0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \rho dV + \int_{sc} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \rho \vec{v} d\vec{s}$$

En régimen permanente, para los dos brazos:

$$\Sigma M_0 = 2 \int_{ss} (\vec{r} \wedge \vec{v}) \rho \vec{v} d\vec{s}$$

Datos:

$$\begin{aligned} r_x &= L + L_1 \cos \theta \\ r_y &= L_1 \sin \theta \\ \alpha &= \arctg \frac{L_1 \sin \theta}{L + L_1 \cos \theta} \\ r &= \frac{r_x}{\cos \alpha} = \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

$$v_x = v \cos \theta + \omega r \sin \alpha = v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha$$

$$v_y = v \sin \theta - \omega r \cos \alpha = v \sin \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)$$



$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = r_x v_y \hat{k} - r_y v_x \hat{k} ;$$

$$\vec{r} \wedge \vec{v} = (L + L_1 \cos \theta) \cdot [v \sin \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)] \hat{k} \\ - L_1 \sin \theta \left[ v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha \right] \hat{k}$$

$$\Sigma M_0 = 2 \int_{sc} \rho \begin{bmatrix} (L + L_1 \cos \theta) \cdot [v \sin \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)] \hat{k} \\ - L_1 \sin \theta \left[ v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha \right] \hat{k} \end{bmatrix} \cdot \vec{v} ds$$

$$\Sigma M_0 = k \cdot \omega = \dot{m} \begin{bmatrix} (L + L_1 \cos \theta) \cdot [v \sin \theta - \omega (L + L_1 \cos \theta)] \\ - L_1 \sin \theta \left[ v \cos \theta + \omega \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha \right] \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \omega = \dot{m} \begin{bmatrix} (L + L_1 \cos \theta)^2 \cdot [-\omega] + [(L + L_1 \cos \theta)] v \sin \theta \\ - L_1 v \sin \theta \cos \theta - \omega L_1 \sin \theta \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\frac{k \cdot \omega}{\dot{m}} + \omega (L + L_1 \cos \theta)^2 + \omega L_1 \sin \theta \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha = \\ = (L + L_1 \cos \theta) v \sin \theta - L_1 v \sin \theta \cos \theta$$

$$\omega = \frac{(L + L_1 \cos \theta) v \sin \theta - L_1 v \sin \theta \cos \theta}{\frac{k}{\dot{m}} + (L + L_1 \cos \theta)^2 + L_1 \sin \theta \frac{L + L_1 \cos \theta}{\cos \alpha} \sin \alpha}$$

→7





## Ecuaciones fundamentales

### Ecuación de conservación de la energía

#### 7.1 Introducción

En un volumen de control genérico, y de la forma más genérica posible, se pueden diferenciar cinco formas de energía intrínseca al sistema englobado por dicho volumen:

- Energía cinética. Asociada al movimiento de la partícula.  $E_c = \frac{V^2}{2}$
- Energía potencial. Asociada a la posición de la partícula.  $E_p = g z$
- Energía interna. Asociada a la estructura y movimiento moleculares.
- Energía química. Asociada a la disposición de átomos en moléculas y a las reacciones químicas.
- Energía nuclear. Asociada a la estructura interna de los átomos. Se libera mediante fisión o fusión nuclear.

En el estudio de un primer curso de Mecánica de Fluidos convencional, en general las reacciones químicas y nucleares están ausentes.

Por otro lado, las diferentes formas de energía se pueden clasificar en térmicas o mecánicas. Las térmicas se asocian a la temperatura, la estructura molecular y el transporte de calor, mientras que las mecánicas se asocian a la fuerza y el movimiento.

Una posible clasificación de las energías mecánicas y térmicas sería:

Energía mecánica: energía cinética, energía potencial, trabajo.

Energía térmica: energía Interna, calor.

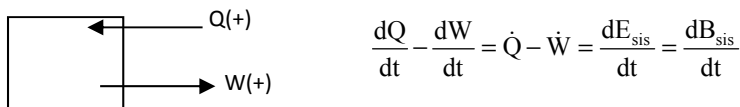
Dado un sistema de control genérico, el balance de energía se puede expresar en que la velocidad de variación de energía intrínseca del sistema ha de ser igual a la velocidad



de transferencia de calor al sistema, más la velocidad de transferencia de trabajo realizado sobre el sistema.

Utilizando el convenio de signos de termodinámica, el cual considera el flujo de calor entrante al sistema como positivo y el trabajo entrante como negativo, se tiene:

Fig. T 7.1



Recordando la ecuación de transporte de Reynolds, donde se estudiaba la variación temporal de una propiedad genérica B, y definiendo para el presente caso dicha propiedad como la energía asociada al sistema, se tiene:

$$B_{\text{sis}} = E_{\text{sis}} = \int_{V_{\text{sis}}} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV$$

Así, la energía por unidad de masa será:

$$b = \frac{B}{m} = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de transporte de Reynolds, se obtiene:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_C} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \vec{V}_r d\vec{s}$$

Cabe recordar lo siguiente:

$\dot{W} = \frac{dW}{dt}$  potencia mecánica transmitida o cedida al sistema definido por el volumen de control considerado.

$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$  potencia calorífica transferida al sistema o cedida por el mismo.

## 7.2 Composición del término trabajo

Se pueden distinguir tres diferentes tipos de trabajo que actúan sobre el sistema objeto de estudio:  $W = W_{\text{eje}} + W_{\tau} + W_p$

El trabajo en el eje ( $W_{\text{eje}}$ ), se realiza debido a los esfuerzos cortantes existentes entre los álabes de la máquina y el fluido.

El trabajo realizado por esfuerzos cortantes ( $W_{\tau}$ ) es debido a los esfuerzos cortantes existentes en el fluido que actúa sobre las fronteras del volumen de control.



El trabajo de presión ( $\dot{W}_p$ ) es debido a la acción de la presión del fluido que actúa sobre las fronteras del volumen de control.

La potencia asociada a cada uno de estos términos será  $\dot{W} = \dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_\tau + \dot{W}_p$

La ecuación que rige cada uno de estos términos se define como:

a) Potencia debida a los esfuerzos cortantes.

$$\dot{W}_{\text{cor}} = \oint_{A_{\text{VC}}} \vec{V} \cdot d\vec{F}_{\text{cor}} = \oint_{A_{\text{VC}}} \vec{V} \cdot (\vec{\tau} ds)$$

$F_{\text{cor}}$  = fuerza debida a los esfuerzos cortantes

Esta potencia ha de entenderse como energía mecánica disipada por las fuerzas de viscosidad.

En las superficies frontera con el sólido, donde la velocidad del fluido es nula, existen esfuerzos cortantes, pero la potencia asociada es nula, al serlo la velocidad.

b) Potencia asociada a un eje mecánico.

$$\dot{W}_{\text{eje}} = M \cdot \omega = \omega \int_{S_{\text{eje}}} \vec{\tau} \vec{r} ds$$

El par de torsión se calcula integrando el esfuerzo cortante sobre la sección transversal del eje (en definitiva, sobre la sección de cada trozo de álabe en contacto con el fluido).

Es usual denominar como  $\dot{W}_s$  al trabajo realizado sobre el fluido dentro del volumen de control por fuerzas diferentes de las que provienen de la presión:  $\dot{W}_s = \dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_\tau$

c) Potencia asociada a fuerzas de presión.

En este apartado se distingue entre la potencia debida a las fuerzas de presión asociadas al flujo y la potencia asociada a la posible deformación del volumen de control (esta sólo existirá cuando el volumen de control se deforme bajo la acción de las fuerzas de presión).

El signo de la potencia asociada a la presión del fluido que atraviesa las fronteras del volumen de control, viene dado por el producto escalar del vector velocidad por el vector diferencial de superficie.

$$d\dot{W}_{p \text{ flujo}} = P \vec{V}_n \cdot d\vec{s} = P \cdot \vec{V} \cdot \hat{n} ds = P \cdot V \cos \theta ds = P \vec{V}_r \cdot d\vec{s}$$

$V_r$  es la velocidad relativa a la superficie de control.

Integrando a lo largo de toda la superficie se obtiene:  $\dot{W}_{p \text{ flujo}} = \oint_{SC} P \vec{V}_r \cdot d\vec{s}$



Por lo que hace referencia a la potencia debida a la posible deformación del volumen de control, bajo la acción de las fuerzas de presión,  $\dot{W}_{P D}$ , es el producto de la presión que actúa sobre la superficie de control y la velocidad de deformación de la misma. Si el volumen de control es indeformable, este término desaparece.

$$\dot{W}_{P D} = \oint_{SC} \bar{V}_C d\bar{F}_p = \oint_{SC} \bar{V}_C P \cdot \hat{n} ds = \oint_{SC} P \bar{V}_C \cdot d\bar{s}$$

$\bar{V}_C$  velocidad de deformación de la superficie de control.

La potencia asociada a las fuerzas de presión quedará:

$$\dot{W}_p = \dot{W}_{flujos} + \dot{W}_{P D} = \oint_{SC} P \bar{V}_r \cdot \hat{n} ds + \oint_{SC} P \bar{V}_C \cdot \hat{n} ds$$

de donde la potencia total será  $\dot{W} = \dot{W}_{eje} + \dot{W}_\tau + \dot{W}_{P flujos} + \dot{W}_{P D}$

La ecuación general de la energía tomará la forma:

$$\begin{aligned} \dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau - \oint_{SC} P \bar{V}_r \cdot \hat{n} ds - \oint_{SC} P \bar{V}_C \cdot \hat{n} ds &= \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \\ &\oint_{SC} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) (\bar{V}_r \cdot \hat{n}) ds \end{aligned}$$

Es asimismo común representar esta ecuación como:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau - \oint_{SC} P \bar{V}_c \cdot \hat{n} ds = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \bar{V}_r \cdot d\bar{s}$$

Cabe recordar que la entalpía asociada al fluido se define  $u + \frac{P}{\rho} = h$ .

Obsérvese que, para un volumen de control fijo y rígido, en régimen estacionario, fluido incompresible, cuando no existe aporte o sustracción de calor o trabajo al volumen de control, y no se considera la potencia debida a los esfuerzos cortantes, la ecuación de la energía se reduce a la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{P_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2$$

Esta ecuación es equivalente al primer principio de la termodinámica.

### 7.3 Ecuación de la energía para turbomáquinas, caso máquinas térmicas e hidráulicas

Sea el sistema definido por la figura siguiente y que caracteriza una turbomáquina. A través del sistema, fluye un fluido cuyas características a la entrada y a la salida son conocidas. Además, un eje atraviesa la frontera del sistema, con lo que se puede comunicar o extraer energía del fluido.

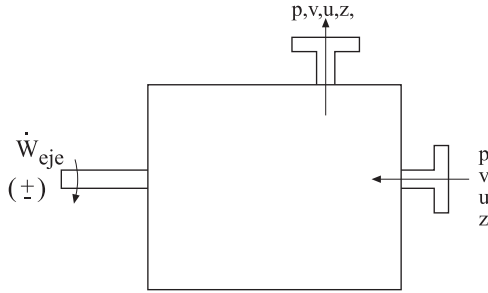


Fig. T 7.2  
Esquema de  
una  
turbomáquina

Considerando un volumen de control fijo y rígido, la ecuación de la energía da lugar a:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Considerando el funcionamiento en régimen permanente:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau = \int_{SE} \rho \left( h + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{s} + \int_{SS} \rho \left( h + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

ecuación utilizada en máquinas térmicas, donde la potencia generada depende básicamente del salto entálpico del fluido entre la entrada y la salida.

Para máquinas hidráulicas, se establece:

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau = \int_{SE} \rho \left( \frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{s} + \int_{SS} \rho \left( \frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Si la densidad del fluido se considera variable:

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau = \int_{SE} -\frac{P}{\rho} d\dot{m} + \int_{SS} \frac{P}{\rho} d\dot{m} + \dot{m} \left( \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right)$$

Para fluido de densidad constante.

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W}_\tau = \dot{m} \left( \frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right)$$

Los términos:

$\frac{\dot{W}_{eje}}{\dot{m}} = Y$ ; energía por unidad de masa cedida o absorbida del fluido.

$\frac{\dot{W}_\tau}{\dot{m}} = \Delta y$ ; pérdidas de energía por esfuerzos cortantes en el interior de la máquina.

$$-Y - \Delta y = \left( \frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right)$$



Cabe denotar que las pérdidas de energía por esfuerzos cortantes se crean en el interior del volumen de control y es una energía que el fluido pierde transformándose en calor, el cual se distribuye entre el propio fluido y el contorno sólido que lo contiene. Así, según el convenio de signos establecido, se trata de una energía positiva (el fluido la pierde); en consecuencia:

$$-Y + \Delta y = \left( \frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right)$$

La energía neta transmitida al fluido, en caso de bomba centrífuga o similar, sería:

$$Y_{\text{real}} = Y - \Delta y$$

$$-Y_{\text{real}} = \left( \frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right)$$

de donde el rendimiento total de la bomba, siempre y cuando se considere que el rendimiento mecánico es la unidad, se define:

$$\eta_T = \frac{\rho Y_{\text{real}} Q_{\text{real}}}{\dot{W}_{\text{eje}}}$$

siendo el rendimiento hidráulico para bombas:

$$\eta_H = \frac{Y_{\text{real}}}{Y} = \frac{Y - \Delta y}{Y} = \frac{\dot{W}_{\text{eje}} - \dot{W}_\tau}{\dot{W}_{\text{eje}}} = \frac{\dot{W}_{\text{eje}} - \sum \text{Pérdidas}}{\dot{W}_{\text{eje}}}$$

de donde la relación entre el rendimiento hidráulico y el rendimiento total será:

$$\eta_T = \frac{\rho(Y - \Delta y)Q_{\text{real}}}{\dot{W}_{\text{eje}}} = \frac{\rho(Y - \Delta y)Q_{\text{real}}}{\rho Y Q} = \eta_H \frac{Q_{\text{real}}}{Q} = \eta_H \eta_V$$

la relación  $\eta_V = \frac{Q_{\text{real}}}{Q}$  se define como el rendimiento volumétrico de la bomba.

Obsérvese que  $Q_{\text{real}} < Q$ .

Para el caso de turbinas, el rendimiento total sería:

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\rho Y_{\text{real}} Q_{\text{real}}}$$

El rendimiento hidráulico se define:

$$\eta_H = \frac{Y}{Y_{\text{real}}} = \frac{Y}{Y + \Delta y} = \frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_\tau} = \frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\dot{W}_{\text{eje}} + \sum \text{pérdidas}}$$



Obsérvese que, para las turbinas:

$$Y_{\text{real}} = Y + \Delta y$$

lo cual significa que, de acuerdo con el convenio de signos establecido, tanto las pérdidas por fricción como la potencia transmitida al eje son energías que se extraen del fluido. La ecuación de la energía para el caso de las turbinas hidráulicas se establece:

$$Y_{\text{real}} = \left( \frac{P_S}{\rho} - \frac{P_E}{\rho} + \frac{V_S^2}{2} - \frac{V_E^2}{2} + g(z_S - z_E) \right)$$

de donde la relación entre el rendimiento total y el hidráulico para las turbinas se define:

$$\eta_T = \frac{\dot{W}_{\text{eje}}}{\rho Y_{\text{real}} Q_{\text{real}}} = \frac{\rho Y Q}{\rho (Y + \Delta y) Q_{\text{real}}} = \eta_H \frac{Q}{Q_{\text{real}}} = \eta_H \eta_V$$

la expresión  $\eta_V = \frac{Q}{Q_{\text{real}}}$  define el rendimiento volumétrico de la turbina. Obsérvese que

ahora el  $Q_{\text{real}}$  representa el caudal entrante a la máquina, mientras que  $Q$  representa el caudal utilizado para transmitir una potencia al eje. En turbinas, se ha de entender que  $Q_{\text{real}} > Q$ .

## 7.4 Forma diferencial de la ecuación de la energía

Siguiendo el procedimiento utilizado previamente para la obtención de las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos en forma diferencial, ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, se determinará ahora la forma diferencial de la ecuación de la energía, partiendo de la ecuación de la energía en forma integral, y transformando las integrales de superficie en integrales de volumen. Se aplica posteriormente, el resultado a un volumen de control diferencial.

En forma integral, la ecuación de la energía se definía:

$$-(\dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_{\tau}) + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \int_{\text{SC}} \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \right] d\vec{s}$$

Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradsky la integral de superficie se puede dar como:

$$-(\dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_{\tau}) + \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{VC}} \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) dV + \int_{\text{VC}} \nabla \cdot \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \right] dV$$



Diferenciando con respecto al volumen, se tiene:

$$\frac{d}{dV} \left[ -(\dot{W}_{\text{eje}} + \dot{W}_{\text{cor tan te}}) + \dot{Q} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] + \nabla \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \right]$$

ecuación que se puede dar como:

$$-(\delta \dot{W}_{\text{eje}} + \delta \dot{W}_{\text{cor tan te}}) + \delta \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] + \nabla \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \right]$$

Cada uno de los términos de esta ecuación representa una potencia por unidad de volumen.

El primer sumando del segundo término de la ecuación se puede expresar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} [\rho (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v})] - \frac{\partial}{\partial t} [\rho (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v})]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} [\rho (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v})]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} P$$

de donde, sustituyendo en la ecuación origen:

$$-(\delta \dot{W}_{\text{eje}} + \delta \dot{W}_{\text{cor tan te}}) + \delta \dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \right] + \nabla \left[ \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \right] - \frac{\partial}{\partial t} P$$

El segundo término de esta ecuación se puede descomponer en:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \cdot \nabla (\rho \vec{V}) \\ & + \rho (\vec{V} \nabla) \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial}{\partial t} P \end{aligned}$$

Agrupando términos, se tiene:

$$\left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{V}) \right) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \rho (\vec{V} \nabla) \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial}{\partial t} P$$





Recordando la ecuación de continuidad, se observa que el primer término es cero, de donde:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial P}{\partial t}$$

Mediante el concepto de derivada material los dos primeros sumandos se pueden agrupar en:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial P}{\partial t}$$

con lo cual la ecuación de la energía quedará:

$$-(\delta \dot{W}_{\text{eje}} + \delta \dot{W}_{\text{corriente}}) + \delta \dot{Q} = \rho \frac{D}{Dt} \left( h + \frac{V^2}{2} + gz \right) - \frac{\partial P}{\partial t}$$

Esta ecuación es una de las formas de representar la ecuación diferencial de la energía;

las unidades de cada término son  $\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{s}}$ , potencia por unidad de volumen.



## Problema 37

### Enunciado

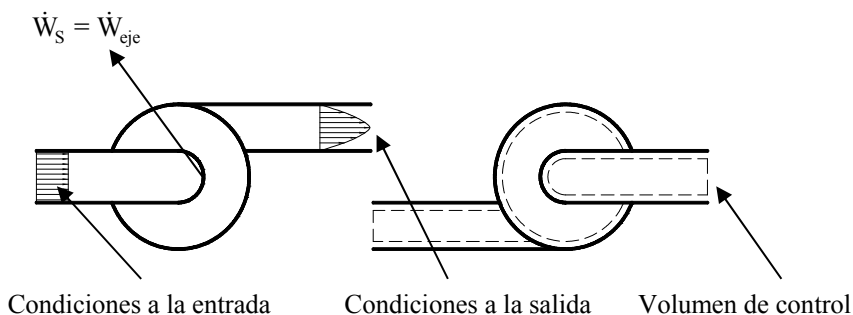
El compresor de la figura adjunta comprime 5 kg/s de aire; las condiciones termodinámicas a la entrada del compresor son:  $T_1 = 297$  K y  $P_1 = 92.000$  Pa (presión absoluta); las condiciones del fluido a la salida son:  $T_2 = 380$  K y  $P_2 = 300.000$  Pa (presión absoluta). El perfil de velocidades del fluido a la entrada se considera uniforme, mientras que a la salida se considera parabólico, y está definido por la ecuación:

$$U = U_{\text{máx}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

Si se considera que el flujo es estacionario y la transferencia de calor es despreciable, determine la potencia requerida para accionar el compresor.

Capacidad calorífica a volumen constante del aire  $C_v = 720 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$

Fig. 37.1



Datos:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= 5 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ T_1 &= 297 \text{ K} \\ P_1 &= 92.000 \text{ Pa} \\ R_1 &= 0,2 \text{ m} \\ T_2 &= 380 \text{ K} \\ P_2 &= 300.000 \text{ Pa} \\ R_2 &= 0,2 \text{ m} \end{aligned}$$

### Resolución

La ecuación de la energía para régimen permanente y volumen de control fijo y rígido se enuncia:



$$\dot{Q} - \dot{W}_S = \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= 0 \\ \dot{W}_S &= \dot{W}_{eje} + \dot{W}_t; \quad \text{se considera} \quad \dot{W}_t = 0 \quad (\text{no hay pérdidas}) \\ Z_1 &= Z_2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} -\dot{W}_{eje} &= \oint_{SC} \rho \left( u + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \\ -\dot{W}_{eje} &= \dot{m} \left[ (u_2 - u_1) + \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) \right] + \int_{S.salida} \rho_2 \frac{\bar{v}^2}{2} \vec{v} \cdot d\vec{s} - \dot{m} \frac{v_1^2}{2} \\ \int_{S.salida} \rho_2 \frac{v^3}{2} ds &= \int_0^{R_2} \rho_2 u_{\max}^3 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]^3 \frac{2\pi r}{2} dr = \frac{\pi \rho_2 u_{\max}^3 R_2^2}{8} \end{aligned}$$

para determinar la relación entre la velocidad media y la velocidad máxima:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho_2 \bar{v}_2 S_2 = \int_0^{R_2} \rho_2 u_2 2\pi r dr = \int_0^{R_2} \rho_2 u_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) 2\pi r dr \\ \rho_2 \bar{v}_2 \pi R_2^2 &= \rho_2 u_{\max} 2\pi \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^{R_2} \\ \rho_2 \bar{v}_2 \pi R_2^2 &= \rho_2 u_{\max} 2\pi \frac{R_2^2}{4} \\ u_{\max} &= \bar{v}_2 2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\int_{S.salida} \rho_2 \frac{v^3}{2} ds = \frac{\pi \rho_2 u_{\max}^3 R_2^2}{8} = \frac{\pi \rho_2 \bar{v}_2^3 8 R_2^2}{8} = \dot{m} \bar{v}_2^2$$

Recordando que la ley de los gases perfectos es:  $\frac{P}{\rho} = RT$  ;

sustituyendo en la ecuación de energía queda:

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m} (C_v (T_2 - T_1)) + \dot{m} R (T_2 - T_1) + \dot{m} \left( \bar{v}_2^2 - \frac{v_1^2}{2} \right)$$



$$\bar{v}_2 = \frac{\dot{m}}{\rho_2 S_2} = \frac{\dot{m} R T_2}{P_2 S_2} = 14,46 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \bar{v}_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 S_1} = \frac{\dot{m} R T_1}{P_1 S_1} = 36,86 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$-\dot{W}_{\text{ejc}} = 5 \times 720 \times (380 - 297) + 5 \times 287 \times (380 - 297) + 6 \times \left( 14,46^2 - \frac{36,86^2}{2} \right)$$

$-\dot{W}_{\text{ejc}} = 415.553 \text{ W}$  El signo indica que se trata de energía que se comunica al volumen de control.

## Problema 38

### Enunciado

Sea un tanque de almacenamiento de combustible de grandes dimensiones. El nivel del combustible y la presión del mismo se pueden considerar constantes. El combustible es bombeado fuera del tanque mediante una bomba volumétrica, y a la salida de la misma se encuentra un intercambiador de calor que tiene como función incrementar la temperatura del fluido. Conociendo que la temperatura en el tanque es de  $5^\circ \text{C}$ , que el intercambiador de calor aporta una energía al fluido de  $10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$ , que el caudal

circulante es de  $0,004 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$  y que la longitud de la tubería es de 100 m, determine:

1. La potencia requerida en la bomba.
2. La temperatura a la salida del conducto.

Considere el sistema térmicamente aislado y que la densidad ( $\rho$ ) se mantiene constante.

Datos:

Rendimiento hidráulico de la bomba:  $\eta_H = 90\%$

Factor de fricción del conducto:  $f_{\text{conducto}} = 0,022$

$$\Delta Y_{\text{intercambiador}} = 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2, \text{ donde: } \Delta Y \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]; Q \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

$$\rho = 875 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$P_{\text{salida del conducto (punto D)}} = 4 \cdot 10^5 P_a$$



$$c_{\text{vfuel}} = 2.000 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\phi_{\text{conducto}} = 0,05\text{m}$$

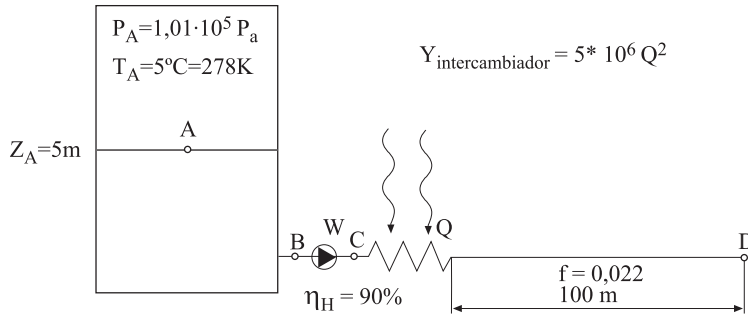


Fig. 38.1

### Resolución

1. Aplicando la ecuación de la energía entre A y D, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{bomba}} = \int_{SA} \rho \left( \frac{P}{\rho} + u + \frac{v^2}{2} + gz \right) V dS + \int_{SD} \rho \left( \frac{P}{\rho} + u + \frac{v^2}{2} + gz \right) V dS + \dot{W}_\tau$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{bomba}} = \dot{m} \left( \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) \right) + \dot{W}_\tau$$

Se ha de entender que la potencia que la bomba comunica al fluido se utiliza para variar su energía cinética y potencial, y vencer los esfuerzos cortantes que impiden el movimiento del fluido. Que el fluido se caliente o enfríe, implica que su viscosidad variara y por tanto también variarían los esfuerzos cortantes. No obstante para este primer apartado se considerará que la viscosidad del fluido se mantiene constante en todo el dominio. Que es lo mismo que suponer que no existe transferencia de calor y, por tanto, no habrá gradiente térmico.

La potencia que la bomba comunica al fluido será:

$$-\dot{W}_{\text{fluido}} = \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) + \Delta Y_{\text{intercambiador}} + \Delta Y_{\text{conducto}}$$

$$-\dot{W}_{\text{fluido}} = \frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2 - 0 + g(0 - 5) + 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2 +$$

$$+ \frac{0,022}{2} \cdot \frac{100}{0,05} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2$$



$$-W_{\text{fluido}} = 457,14 - 120 + 2,075 - 49 + 80 + 91,3$$

$$W_{\text{fluido}} = -461,51 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Según el convenio de signos de termodinámica, el signo negativo indica que se trata de energía comunicada al fluido.

Dado que el rendimiento hidráulico es del 90%, la energía por unidad de masa es:

$$W_{\text{aje}} = W_{\text{fluido}} \cdot \frac{1}{0,9} = 512,79 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]$$

$$\dot{W}_{\text{aje}} = 512,79 \cdot 875 \cdot 0,004 = 1.794,78 \left[ \frac{\text{J}}{\text{s}} \right]$$

El calor que la bomba transfiere al fluido es el 10% de esta energía.

2. La temperatura del fuel a la salida del conducto, punto D, será debida al incremento de temperatura producido por el intercambio de calor y las pérdidas de energía en la bomba y los conductos, que se transforman en calor comunicado al fluido.

Aplicando de nuevo la ecuación de la energía entre A y D: (Obsérvese que no se incluyen las pérdidas de carga por rozamiento entre fluido y conducto).

$$\dot{Q} - \dot{W}_{\text{aje}} = m \left( \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A) \right)$$

$$Q - W_{\text{aje}} = \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + u_D - u_A + \frac{v_D^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + g(z_D - z_A)$$

de donde:

$$T_D - T_A = \frac{Q - W_{\text{aje}} - \left[ \frac{P_D}{\rho} - \frac{P_A}{\rho} + \frac{V_D^2}{2} - \frac{V_A^2}{2} + g(Z_D - Z_A) \right]}{c_v}$$

Véase que  $W_{\text{aje}}$  engloba los términos de energía cinética y potencial, así como las pérdidas por fricción entre los puntos A y D, teniendo en cuenta, además, el rendimiento hidráulico de la máquina.

Sustituyendo los valores:

Este término engloba el 10% de la energía generada por la bomba, más las pérdidas por fricción en los conductos.

$$T_D - T_A = \frac{10^5 + 512,79 - \left[ \frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2} \left( \frac{0,004}{\pi \cdot 0,05^2} \right)^2 - 0 + 9,8 \cdot (0 - 5) \right]}{2.000}$$

(II)



$$T_D = 50,02 + 278 = 328,02\text{K}$$

Como conclusión de este apartado, cabe decir que el aumento de temperatura del fluido es debido a:

- a.- El calor transferido al sistema.  $10^5 \text{ J/Kg}$ .
- b.- El 10% de la energía que la bomba necesita.

$$0,1^* \left\{ \begin{aligned} & \frac{4 \cdot 10^5}{875} - \frac{1,01 \cdot 10^5}{875} + \frac{1}{2} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2 - 0 + g(0-5) + 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2 + \\ & + \frac{0,022}{2} \cdot \frac{100}{0,05} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

- c.- Las pérdidas por fricción en los conductos.

$$\left\{ 5 \cdot 10^6 \cdot Q^2 + \frac{0,022}{2} \cdot \frac{100}{0,05} \left( \frac{0,004}{\frac{\pi \cdot 0,05^2}{4}} \right)^2 \right\}$$

Estos tres términos son los que forman el numerador de la ecuación (II) de donde se obtiene el aumento de temperatura del fluido.

## Problema 39

### Enunciado

Estudiando los diferentes diseños de hovercraft, se pretende hacer ensayos con un modelo cuya sección transversal se muestra en la figura. Sabiendo que existen 100 toberas de descarga en la base del cojín, cuyo diámetro unitario es  $d_T$ , que el diámetro de la boca de entrada del ventilador es  $D_e$  ( $D_e \gg d_T$ ), y que se puede considerar que la presión en el depósito (cojín de aire anular) se mantiene constante, pudiéndose despreciar el término de energía cinética en el depósito determine:

1. La ecuación que define el flujo volumétrico que fluye por cada tobera, en función de la presión en el depósito superior (cojín). Considere que las pérdidas de energía en cada tobera dadas en  $[\text{J/Kg}]$  son:

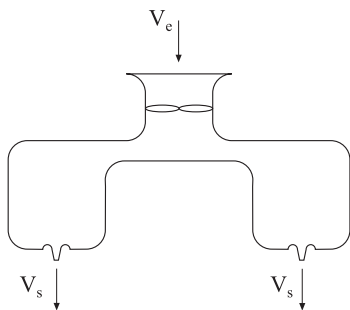
$$\Delta Y = K_T \cdot Q_{\text{tobera}}^2$$



2. La ecuación que determina la fuerza de sustentación en función de la presión en el interior del hovercraft, si se considera que dicha fuerza es únicamente producida por el flujo saliente por las toberas.
3. La potencia por unidad de masa que hay que comunicar al ventilador (dar la potencia en función de la presión interna del hovercraft). Se sabe que las pérdidas de energía por unidad de masa entre el ventilador y el cojín de aire interno son del tipo  $\Delta Y = K_{\text{int}} \cdot Q^2_{\text{entrante ventilador}}$ .
4. Considerando el sistema térmicamente aislado, y sabiendo que el rendimiento del ventilador es del 96%, halle el incremento de temperatura del aire entre la entrada y el cojín de aire interno. Considere las pérdidas definidas en el apartado 3.
5. Si alrededor del hovercraft se coloca una falda de un material semirrígido, tal que el flujo de fluido desde la parte interior del hovercraft hacia el exterior está regido por la ecuación  $\Delta Y = K_{\text{ext}} Q^2_{\text{saliente hovercraft}}$ , determine como varia la sustentación de dicho hovercraft.

Realice las hipótesis oportunas en cada caso.

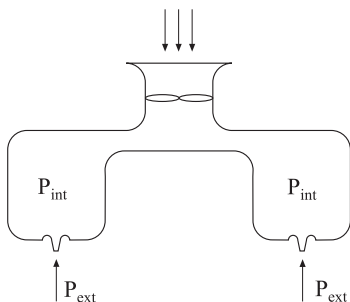
Fig. 39.1  
Sección del  
hovercraft



## Resolución

1. De la aplicación de la ecuación de la energía entre el interior y el exterior del cojín de aire a través de la tobera (una de ellas) se obtiene:

Fig. 39.2



$$\frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} + g z_{\text{int}} + \frac{v_{\text{int}}^2}{2} = \frac{P_{\text{ext}}}{\rho_{\text{ext}}} + g z_{\text{ext}} + \frac{v_{\text{ext}}^2}{2} + K_T Q^2_{\text{tobera}}$$





$$\frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{P_{\text{ext}}}{\rho_{\text{ext}}} = \frac{Q_{\text{tobera}}^2}{S_{\text{tobera}}^2} + K_T Q_{\text{tobera}}^2$$

$$Q_{\text{tobera}}^2 = \left( \frac{P_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{P_{\text{ext}}}{\rho_{\text{ext}}} \right) \frac{1}{\frac{1}{S_{\text{tobera}}^2} + K_T}$$

Caudal saliente total

$$Q_{TT} = 100 * Q_T$$

2. Fuerza ascensorial debida a la variación de la cantidad de movimiento. Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento entre la entrada del ventilador y la salida de las toberas, se establece:

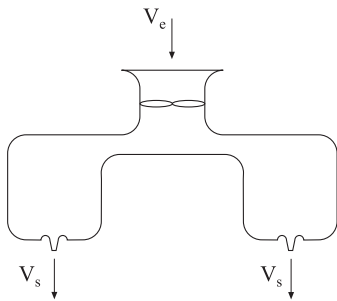


Fig. 39.3

$$-\int_{se} P_e d\vec{s} - \int_{ss} P_s d\vec{s} + \int_{sl} \bar{\tau} d\vec{s} + \int_{sl} P d\vec{s} = \oint_{sc} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s}$$

Trabajando en presiones relativas, el empuje debido a la variación de cantidad de movimiento será:

$$F_Y = \int_{se} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} + \int_{ss \text{ tobera } 1} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s} + \dots + \int_{ss \text{ tobera } n} \rho \vec{v} \vec{v} d\vec{s}$$

$$F_Y = \dot{m} (v_e - v_s) = \dot{m} \left( \frac{Q_e}{S_e} - \frac{Q_{tobera}}{S_{tobera}} \right)$$

$$F_Y = \dot{m} Q_{tobera} \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{tobera}} \right)$$

$$F_Y = \rho_{\text{entrada}} Q_e Q_{tobera} \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{tobera}} \right)$$

La ecuación de continuidad aplicada entre la entrada y la salida dirá:  $Q_e = 100 Q_{tobera}$

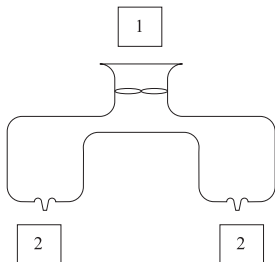
$$F_Y = \rho_{\text{entrada}} 100 Q_{tobera}^2 \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{tobera}} \right)$$



### 3. Potencia del ventilador

Aplicando la ecuación de la energía en régimen permanente entre los puntos 1 y 2 (entrada y salida del hovercraft), se obtiene:

Fig. 39.4



$$\dot{Q} - \dot{W} = \oint_{sc} \rho \left( \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \cdot z + u \right) \cdot \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

puesto que  $\dot{Q} = 0$ ; por tanto, la ecuación queda:

$$-\dot{W}_{eje} - \dot{W} = \oint_{se} \rho \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right) \vec{v} \cdot d\vec{s} + \oint_{ss} \rho \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right) \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$-Y_{eje} = \frac{-\dot{W}_{eje}}{\dot{m}} = \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right)_{ss} - \left( \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z + u \right)_{se} + K_T Q_{tobera}^2 + K_{int} Q_{ent}^2$$

Trabajando en presiones relativas, ó para variaciones de presión despreciables:

$$-Y_{eje} = g(z_s - z_e) + \frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + \frac{K_T}{100^2} Q_{total salida}^2 + K_{int} Q_{ent}^2$$

Asumiendo que la potencia comunicada al ventilador es positiva y despreciando las variaciones de energía potencial:

$$W_{eje} = Y_{eje} = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_{tobera}^2}{s_{tobera}^2} - \frac{Q_{entrada}^2}{s_{entrada}^2} \right] + \frac{K_T}{100^2} Q_{total salida}^2 + K_{int} Q_{ent}^2$$

$$Y_{eje ventilador} = Q_{total salida}^2 \left[ \frac{1}{2 s_{tobera}^2} \frac{1}{100^2} - \frac{1}{2 s_{entrada}^2} \right] + \frac{K_T}{100^2} + K_{int}$$

Recuérdese que  $Q_{TT} = 100 \cdot Q_T$

La potencia comunicada al fluido será:  $N_{fluido} = \rho Y_{eje} Q_{Total}$

Nota: En realidad, la potencia necesaria en el ventilador será un 4% mayor que la potencia establecida aquí.



4. El incremento de temperatura que experimentará el fluido desde la entrada hasta la zona de remanso será debido al calor transferido en el ventilador (que equivale al 4% de su potencia), más la energía perdida por fricción entre la entrada y la zona de remanso, y que se convertirá en calor. Así pues,

$$C_v (T_3 - T_1) = 0,04 Y_{\text{ej ventilador}} + K_{\text{int}} Q_{\text{ent}}^2$$

La expresión obtenida para el incremento de temperatura es:

$$(T_3 - T_1) = \frac{0,04 Y_{\text{ej ventilador}} + K_{\text{int}} 100^2 Q_{\text{tobera}}^2}{C_v}$$

5. Al utilizar la falda exterior, la presión debajo del hovercraft será ligeramente mayor que la presión atmosférica. El cálculo analítico para la obtención de dicha presión es:

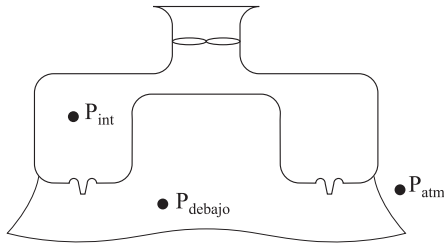


Fig. 39.5

$$\frac{P_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} + g z_{\text{debajo}} + \frac{v_{\text{debajo}}^2}{2} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}} + g z_{\text{atm}} + \frac{v_{\text{atm}}^2}{2} + K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$$

$$\frac{P_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}} + K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2$$

Recuérdese que:

$$\dot{m}_{\text{entrante}} = \dot{m}_{\text{total toberas}} = \dot{m}_{\text{saliente}}$$

Considerando la densidad del aire prácticamente constante a la entrada y a la salida, queda :

$$Q_{\text{entrante}} = Q_{\text{total toberas}} = Q_{\text{saliente}}$$

Y en presiones relativas:

$$P_{\text{debajo}} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho_{\text{atm}}} \rho_{\text{debajo}} + K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2 \rho_{\text{debajo}}$$

$$P_{\text{debajo}} = K_{\text{ext}} Q_{\text{saliente hovercraft}}^2 \rho$$



El caudal que fluye por las toberas quedará modificado, puesto que la presión en el exterior es ahora ligeramente mayor que la atmosférica.

$$Q_{\text{tobera } 2}^2 = \left[ \left( \frac{p_{\text{int}}}{\rho_{\text{int}}} - \frac{p_{\text{debajo}}}{\rho_{\text{debajo}}} \right) + g(z_{\text{int}} - z_{\text{debajo}}) \right] \frac{1}{\frac{1}{2 S_{\text{tobera}}^2} + K_T}$$

Suponiendo que el caudal que suministra el ventilador es el requerido en este apartado, la fuerza de sustentación tendrá la misma forma que en el apartado 2. Únicamente quedará modificado el caudal de la tobera:

$$F_Y = \rho_{\text{entrada}} 100 Q_{\text{tobera } 2}^2 \left( \frac{100}{S_e} - \frac{1}{S_{\text{tobera}}} \right)$$

Además, en este apartado, la presión debajo del hovercraft crea una fuerza de sustentación adicional:

$$F_{\text{adicional}} = P_{\text{debajo}} S_{\text{hovercraft proyectada}}$$

$$F_{Y_{\text{total}}} = F_Y + F_{\text{adicional}}$$

## Problema 40

### Enunciado

Sea una turbina axial como la esquematizada en la figura 40.1, la cual consiste en un conjunto de alabes fijos o directrices (estator) y un rotor. La longitud de los alabes, tanto en el estator como en el rotor, se considerará muy pequeña, comparada con el radio medio del rotor  $R_M$ , con lo cual se podrán considerar uniformes las propiedades a lo largo del alabe.

La velocidad del fluido a la entrada del estator (punto 1), la cual tiene únicamente componente axial, tiene un valor conocido  $C_1$ . A la salida del rotor, el fluido tiene así mismo únicamente componente axial. El valor de la componente axial se mantendrá a lo largo de la máquina.

Los triángulos de velocidades para un radio medio  $R_M$ , tanto a la entrada como a la salida del rotor, se detallan en la figura 40.1.

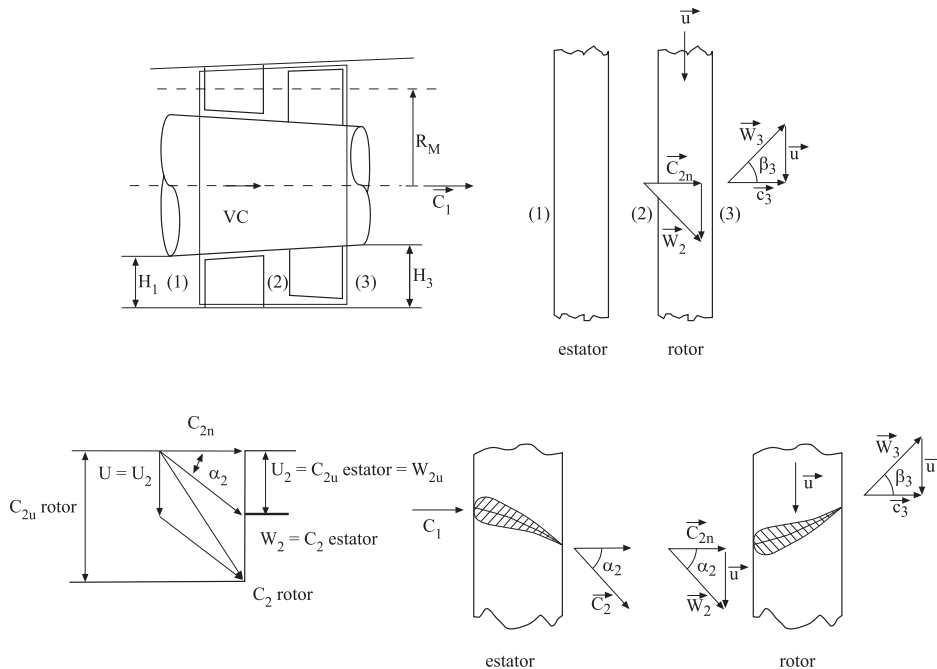
Considérense conocidos los valores siguientes:

- Constantes termodinámicas del gas que fluye por la turbina:  $R$ ,  $C_v$ ,  $C_p$ ,  $\gamma$
- Radio medio en el centro de los alabes:  $R_M$
- Altura del alabe del estator:  $H_1$
- Velocidad del fluido a la entrada del estator:  $C_1$



- Presión a la entrada del estator:  $P_1$
- Temperatura a la entrada del estator:  $T_1$
- Ángulo formado por la velocidad relativa y el eje de la turbina:  $\alpha_2$
- Considerar que para el presente caso y para el radio medio de la turbina,  $U_2$  coincide en módulo con  $W_{2u}$

Fig. 40.1  
Esquema de una  
turbina axial



Determine:

1. Suponiendo que los triángulos de velocidades son los esquematizados en la figura, halle la velocidad de giro del rotor. Determine también el caudal másico circulante.
2. La energía por unidad de masa que la turbina absorbe del fluido, el par generado por la turbina y la potencia comunicada al eje.
3. La temperatura del fluido a la salida de la turbina, asumiendo que no existe calor transferido al contorno sólido. Indique que mediciones de los parámetros del fluido se deberían realizar para determinar la altura de los alabes en los puntos 2 y 3.

Indique las hipótesis que se van realizando en cada caso.

## Resolución

1. Puesto que se dice que la componente axial se mantendrá a lo largo del rodete, se cumple que:



$C_1 = C_{2n} = C_3$  ;  $C_{2n}$  = Componente normal de la velocidad absoluta a la entrada del rotor.

Con lo que la velocidad de giro del rotor se puede determinar para el presente caso particular, como:

$$\text{Tg } \alpha_2 = \frac{U_2}{C_{2n}} = \frac{U_2}{C_1} = \frac{\omega R_M}{C_1}$$

$$\omega = \frac{\text{Tg } \alpha_2 C_1}{R_M}$$

El caudal másico que fluye por la máquina será, entonces:

$$\dot{m} = \int \rho \vec{V} d\vec{S} = - \int \rho C_1 d\vec{S} = -\rho C_1 \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2)$$

Puesto que los diámetros exterior e inferior en el estator no son conocidos, la sección de paso se aproximará por:

$$\frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) \approx 2\pi R_M H_1$$

con lo cual:

$$\dot{m} = -\rho C_1 2\pi R_M H_1$$

La densidad a la entrada de la turbina se hallará:

$$\rho = \frac{P_e}{R T_e} = \frac{P_1}{R T_1} ;$$

Así pues, el caudal másico circulante será:

$$\dot{m} = -\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M H_1$$

Nota. El signo ( - ) indica que es flujo entrante al sistema.

2. La ecuación de Euler de las turbomáquinas, aplicada a la turbina en estudio, dice:

$$Y_{t\infty} = U_3 C_{3u} - U_2 C_{2u}$$

Puesto que todos los parámetros se definen para el radio  $R_M$ , se tiene que  $U_2 = U_3 = U$  Por otro lado, del triángulo de velocidades a la salida del rotor se deduce que la componente tangencial de la velocidad absoluta es  $C_{3u} = 0$ .



Así, la energía que el fluido transmite al rotor será:

$$Y_{\tau_{\infty}} = -U_2 C_{2u} = -\omega R_M C_{2u}$$

Observe que  $C_{2u}$  es la componente tangencial del fluido en el punto 2. Del triángulo de velocidades en este punto se deduce que:  $C_{2u} = U + W_2 \sin \alpha_2$ ; de donde se obtiene:

$Y_{\tau_{\infty}} = -\omega R_M (U + W_2 \sin \alpha_2)$ ;  $\left[ \frac{J}{Kg} \right]$ ; el signo ( - ) indica que se trata de energía transmitida a la máquina.

De la ecuación del momento cinético aplicada a una turbomáquina, para el caso en estudio se obtiene:

$$\sum M_{eje} = \dot{m} (R_{M3} C_{3u} - R_{M2} C_{2u})$$

Como  $R_{M3} = R_{M2} = R_M$  y  $C_{3u} = 0$ , se dirá que el par generado por la turbina valdrá:

$$M_{eje} = -\dot{m} R_M C_{2u} = -\dot{m} R_M (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

$$M_{eje} = -\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M^2 H_1 (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

Asimismo, la potencia transmitida al eje será:

$$\dot{W}_{eje} = M_{eje} \omega = -\dot{m} R_M \omega (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

$$\dot{W}_{eje} = -\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M^2 H_1 \omega (U + W_2 \sin \alpha_2)$$

3. Finalmente, la temperatura del fluido a la turbina, asumiendo que no existe calor transferido hacia o por el sistema, se determinará partiendo de la ecuación de la energía aplicada entre la entrada y la salida de la turbina. En régimen permanente, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W}_{eje} = \int_{S1} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} d\vec{s} + \int_{S3} \rho \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} d\vec{s}$$

Siendo  $\dot{Q} = 0$ , se obtiene que:

$$-\dot{W}_{eje} = \dot{m} \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right)_{S1} + \dot{m} \left( u + \frac{v^2}{2} + g z + \frac{P}{\rho} \right)_{S3}$$



Obsérvese que las pérdidas de energía por esfuerzos cortantes no se han considerado porque no pueden ser evaluadas. Entonces:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left[ u_3 - u_1 + \frac{v_3^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g(z_3 - z_1) + \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_1}{\rho_1} \right]$$

Dado que la cota del punto 3 y 1 es la misma, y que las velocidades absolutas en dichos puntos son iguales, según enunciado  $v_3 = C_3$ ;  $v_1 = C_1$ ;  $C_3 = C_1$  y queda que:

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} \left[ u_3 - u_1 + \frac{P_3}{\rho_3} - \frac{P_1}{\rho_1} \right] = \dot{m} \left[ u_3 + \frac{P_3}{\rho_3} - u_1 - \frac{P_1}{\rho_1} \right]$$

$$-\dot{W}_{\text{eje}} = \dot{m} [h_3 - h_1] = \dot{m} C_p [T_3 - T_1]$$

$$T_3 = \frac{-\dot{W}_{\text{eje}}}{\dot{m} C_p} + T_1$$

Como la potencia en el eje de la turbina se ha hallado en el apartado 2, se tiene:

$$T_3 = \frac{\frac{P_1}{R T_1} C_1 2\pi R_M^2 H_1 \omega (U + W_2 \sin \alpha_2)}{\dot{m} C_p} + T_1$$

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre los puntos 1, 2 y 3, se puede decir:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

$$Q_1 \rho_1 = Q_2 \rho_2 = Q_3 \rho_3$$

$$S_1 C_1 \rho_1 = S_2 C_{2n} \rho_2 = S_3 C_3 \rho_3$$

Según el enunciado,  $C_1 = C_{2n} = C_3$ , y sabiendo que  $\rho_i = \frac{P_i}{R T_i}$  y  $S_i = 2\pi R_B H_i$ , se tiene:

$$2\pi R_M H_1 C_1 \frac{P_1}{R T_1} = 2\pi R_M H_2 C_1 \frac{P_2}{R T_2} = 2\pi R_M H_3 C_1 \frac{P_3}{R T_3};$$

$$H_1 \frac{P_1}{T_1} = H_2 \frac{P_2}{T_2} = H_3 \frac{P_3}{T_3};$$

La altura de los alabes en los puntos 2 y 3 se podría determinar una vez conocidas la presión y la temperatura en dichos puntos. Experimentalmente, se podría realizar introduciendo sendos sensores de presión y temperatura en dichas zonas. Hay que observar que  $P_2$  y  $T_2$  serán muy similares a  $P_1$  y  $T_1$ .









## Flujo con viscosidad dominante

Bajo viscosidad dominante, se entiende que las fuerzas de inercia asociadas a la partícula de fluido juegan un papel irrelevante, con lo que el movimiento del fluido viene dominado por las fuerzas viscosas. En este capítulo se estudiarán diferentes tipos de flujo, definiendo para cada caso, las ecuaciones características del flujo considerado.

### 8.1 Flujo entre dos placas paralelas

Sean dos placas paralelas de longitud y profundidad infinitas, cuyo esquema se muestra en la figura adjunta. Una de las placas se desplaza a una velocidad  $U$  y entre los extremos de las mismas, puede existir un gradiente de presión. Se desea determinar la distribución de velocidades entre las dos placas.

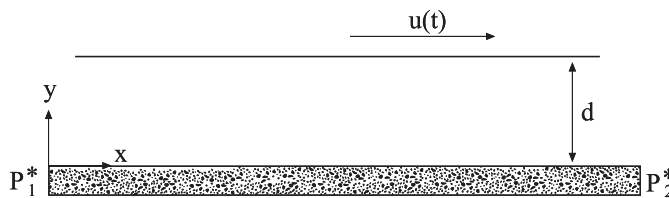


Fig. T 8.1  
Esquema del flujo  
de Couette-  
Poiseuille plano

Las hipótesis de trabajo que se utilizarán en este primer caso son:

- El fluido se considera incompresible.
- Las placas se consideran infinitas.
- La placa superior se desplaza a una velocidad  $U$  en dirección  $x$  (esta velocidad puede, a priori, depender del tiempo).
- Se supondrá movimiento unidireccional y bidimensional.
- Puede existir gradiente de presiones entre extremos de las placas.



- La velocidad del fluido en un punto genérico será  $\mathbf{V} = U\hat{\mathbf{i}}$ , donde  $U = U(x, y, t)$
- Condiciones de contorno:  $U(x, 0, t) = 0$ ;  $U(x, d, t) = U(t)$

Las ecuaciones de Navier-Stokes para fluido incompresible tridimensional y en coordenadas cartesianas se expresan:

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

En forma vectorial, sería:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

La ecuación de continuidad se expresa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0$$

Puesto que  $\rho$  es constante, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\nabla \vec{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Puesto que el flujo es unidireccional, la ecuación de continuidad se reducirá a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

lo que implica que la velocidad del fluido dependerá de  $U = (y, t)$

Las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso objeto de estudio quedarán:

$$\begin{aligned}\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \vec{g}_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \vec{g}_y\end{aligned}$$

No hay componente en dirección  $z$ , puesto que se trata de un flujo bidimensional.

Estas ecuaciones pueden simplificarse combinando las fuerzas gravitacionales con las fuerzas debidas a la presión.



Se define una distancia  $h$  respecto al origen de coordenadas  $h=h(x,y,z)$ , se elegirá  $h$  en dirección  $y$ ;  $h=h(y)$ .

Para un campo conservativo y con densidad constante, se establece:

$$\vec{g} = -\nabla \Pi = -\left( \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial x}}_{\vec{g}_x} \mathbf{i} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial y}}_{\vec{g}_y} \mathbf{j} + \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial z}}_{\vec{g}_z} \mathbf{k} \right)$$

donde  $\Pi$  es un potencial escalar de fuerzas másicas, en el campo gravitatorio terrestre,

$$\Pi = g h$$

y sustituyendo en las ecuaciones de Navier-Stokes, se obtiene:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \frac{\partial h}{\partial y} \end{cases}$$

Definiendo el concepto de presión reducida como  $p^* = p + \rho g h$ , los términos de la ecuación de Navier-Stokes quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p^*}{\partial y} \end{aligned}$$

La segunda de estas ecuaciones indica que en dirección  $y$  regirá la ecuación de la estática de fluidos.

Despejando el término de  $p^*$  en la primera de las ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

Obsérvese que la parte izquierda de esta ecuación depende de  $x$ ; la parte derecha depende de  $y$ , y ambas partes dependen del tiempo, con lo cual  $\frac{\partial p^*}{\partial x} = F(t)$ .

La variación de presión a lo largo del eje  $x$  se debe asumir constante, con lo que

$$\frac{\partial p^*(t)}{\partial x} = -\frac{\Delta p^*}{\Delta L} = \frac{(p + \rho U)_1 - (p + \rho U)_2}{L}$$

ecuación que indica la variación temporal de presión reducida entre dos puntos separados una distancia  $L$ . Recuérdese que, en general, la presión disminuye al aumentar  $x$ , lo cual explica el signo.



La ecuación de Navier-Stokes en forma vectorial, para fluido incompresible, expresada en función de la presión reducida, se define:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

## 8.2 Flujos independientes del tiempo

### 8.2.1 Flujo de Couette - Poiseuille plano

Considérese el flujo del ejemplo anterior entre dos placas infinitas y paralelas, la placa superior puede desplazarse a una velocidad  $U$  independiente del tiempo, existe gradientes de presiones entre los extremos de las placas. Figura T 8.1.

Se establecen las siguientes hipótesis:

- Movimiento unidireccional, bidimensional  $w = v = 0$
- Flujo incompresible  $\rho = \text{cte}$
- Régimen estacionario  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$

De las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad, se obtiene:

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Ecuación de Navier-Stokes:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = \frac{\partial p^*}{\partial y} \rightarrow p^* \Big|_y = \text{cte}$$

Integrando la ecuación de Navier-Stokes en dirección  $x$  para  $\frac{\partial p^*}{\partial x} = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} = \text{cte}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p^*}{\Delta x} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} y + C_1$$

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$



Las constantes de integración se obtendrán mediante las siguientes condiciones de contorno:

$$y = 0 \quad u = 0$$

$y = d \quad u = U$ , o bien  $U = 0$ , para el caso en que las dos placas fuesen estáticas.

de donde se llega a:

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{U}{d} - \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{d}{2\mu}$$

así, la ecuación que proporciona la distribución de velocidades en función de la altura genérica y el gradiente de presiones reducidas, tomara la forma:

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{y^2}{2\mu} - \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{dy}{2\mu} + \frac{U \cdot y}{d} = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{y}{2\mu} [y - d] + \frac{U \cdot y}{d}$$

Esta ecuación proporciona la distribución de velocidades del fluido que fluye entre dos placas planas paralelas cuando, una de las placas se desplaza paralela a la otra y existe además un gradiente de presiones entre extremos de las mismas.

### 8.2.2 Flujo de Couette.

Para la determinación de dicho flujo, se considera que el gradiente de presión reducida es igual a cero:

$$\frac{\Delta p^*}{\Delta x} = 0$$

con lo que el movimiento del fluido entre las dos placas será únicamente debido al desplazamiento de la placa superior.

La distribución de velocidades resultante será:

$$u = \frac{U y}{d}$$

La fuerza por unidad de superficie que se opone al movimiento se define:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U}{d}$$

de donde la potencia disipada por unidad de superficie de la placa será  $\dot{W} = \tau u = \mu \frac{U^2}{d}$



### 8.2.3 Flujo de Hagen-Poiseulle o Poiseulle plano

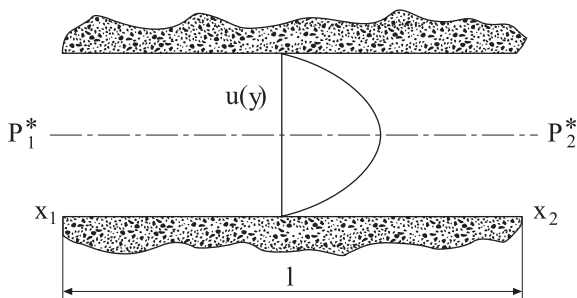
Para este caso se considera que la velocidad de la placa superior es cero ( $U = 0$ ), con lo cual el desplazamiento del fluido será debido únicamente al gradiente de presiones.

La distribución de velocidades para este caso será:

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{y}{2\mu} (y - d)$$

ecuación que define una distribución de velocidades parabólica.

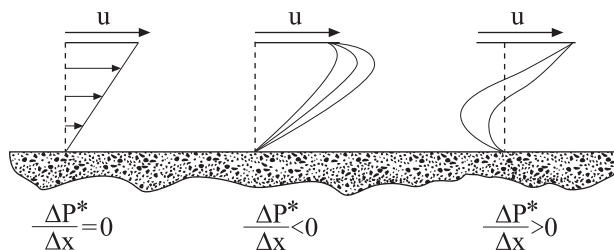
Fig. T 8.2  
Esquema del flujo  
de Poiseulle plano



Si, por otro lado, existiese desplazamiento relativo de la placa superior y, además, gradiente de presiones, se obtendrían distribuciones de velocidades como las siguientes. Distribuciones que vendrán definidas por la ecuación genérica.

$$u = \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{y}{2\mu} [y - d] + \frac{U \cdot y}{d}$$

Fig. T 8.3  
Diferentes  
distribuciones de  
velocidades  
posibles para el  
flujo de Couette-  
Poiseulle



## 8.3 Flujo dependiente del tiempo

### 8.3.1 Flujo de Rayleigh

Sea una placa plana inmersa en un fluido, la placa parte del reposo y se acelera hasta alcanzar una velocidad  $U$ . Se quiere estudiar el movimiento temporal del fluido en función de la distancia a la placa.





### Hipótesis de trabajo

- Movimiento unidireccional
- Fluido en reposo
- La placa está inicialmente a velocidad cero y se acelera hasta alcanzar una velocidad constante  $U$ .
- Fluido incompresible
- Flujo unidireccional  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- Régimen transitorio  $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$
- Gradiente de presión reducida entre extremos de la placa, inexistente  $\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0$

La ecuación de Navier-Stokes establece:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 u$$

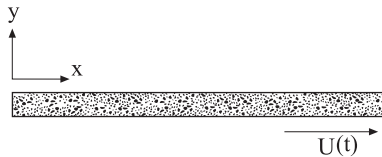


Fig. T 8.4  
Esquema del flujo  
de Rayleic

Para el caso bajo estudio, queda:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0 + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Esta ecuación se denomina *ecuación de propagación de una perturbación*.

Las condiciones de contorno necesarias para su resolución son:

$$u(y, 0) = 0$$

$$u(\infty, t) = 0$$

$$u(0, t) = U$$

De la ecuación diferencial característica de este fenómeno, se observa que existe una relación de magnitudes del tipo:

$$\frac{U}{t_0} \approx \frac{\mu}{\rho} \frac{U}{\delta^2} = \nu \frac{U}{\delta^2}$$

siendo:

$\delta$  = espesor del fluido, el cual está afectado por el movimiento.

$t_0$  = tiempo genérico con respecto al origen de tiempos.



Se define una variable de semejanza interna  $\eta$  o también llamada *constante característica del flujo*, como:

$$\delta^2 \approx \nu t_0 \rightarrow \delta \approx \sqrt{\nu t_0} \rightarrow \frac{\delta}{\sqrt{\nu t_0}} = \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}};$$

$\delta$  se mide en dirección  $y$ .

Se trata de expresar la velocidad del fluido  $u$  en función de esta variable  $\eta$ . Este método se denomina *transformación de similitud*.

Llamando  $u^* = \frac{u}{U}$  y sustituyendo en cada uno de los términos de la ecuación de Navier-Stokes, queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(u^* U)}{\partial t} = U \frac{\partial u^*}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2(u^* U)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} (u^* U) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( U \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) = U \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \end{aligned}$$

de donde, uniendo estos términos y teniendo en cuenta la variable  $\eta$ , se tiene:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta^2}{\partial y^2} \quad \frac{\partial \eta^2}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$$

Puesto que  $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$

su derivación da lugar a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{y}{\sqrt{\nu}} \cdot \left( -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \right) \\ \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{\nu t} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación modificada de Navier-Stokes, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{\sqrt{\nu}} \cdot \left( -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} \right) &= \nu \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{\nu t} \\ \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{\sqrt{\nu t}} \cdot \frac{1}{t} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2} \cdot \frac{1}{t} \end{aligned}$$

ecuación que toma la forma:

$$-\frac{\eta}{2} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial \eta^2}$$



y se puede dar como:

$$-\frac{\eta}{2} = \frac{1}{\frac{\partial u^*}{\partial \eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right); \equiv -\frac{\eta}{2} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \eta}; \equiv -\frac{\eta}{2} d\eta = \frac{dA}{A}$$

Integrando:

$$-\frac{\eta^2}{4} + C_0 = \ln \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)$$

Admitiendo que, cuando  $\eta = 0$ , se cumple:

$$\eta = 0 \rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0$$

La constante de integración tendrá un valor:

$$C_0 = \ln \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0$$

Sustituyendo en la ecuación, se obtiene:

$$-\frac{\eta^2}{4} = \ln \frac{\frac{\partial u^*}{\partial \eta}}{\left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0}$$

Sacando logaritmos, se tiene:

$$e^{-\frac{\eta^2}{4}} = \frac{\frac{\partial u^*}{\partial \eta}}{\left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0}; \quad \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0 \cdot e^{-\frac{\eta^2}{4}}$$

Integrando de nuevo:

$$u^* = \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0 \int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta + c_1$$

Para determinar la constante  $c_1$ , se puede emplear la siguiente condición de contorno.

$$\text{Para } y = 0 \equiv \eta = 0 \rightarrow u^* = u^*(0) = \frac{U}{U} = 1$$

$$\text{Puesto que para } \eta = 0; \equiv \int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta = \int_0^0 e^{-0} d\eta = 0$$

se obtiene:  $C_1 = u^*(0)$



La ecuación quedará:

$$u^* = u^*(0) + \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0 \int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$$

La integral  $\int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta$  tiene el nombre de función de error en estadística, siendo su valor:

$$\int_0^\eta e^{-\frac{\eta^2}{4}} d\eta = \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

de donde:

$$u^* = u^*(0) + \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

Con el fin de determinar el valor de  $\left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0$ , se utiliza la segunda condición de contorno:

$$\begin{aligned} \text{Para } y = \infty; \eta = \infty \rightarrow \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) &= 1; u^* = 0 = \frac{0}{U} \\ 0 = u^* &= u^*(0) + \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0 \sqrt{\pi} \quad ; \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \right)_0 = -\frac{u^*(0)}{\sqrt{\pi}}; \end{aligned}$$

Así, la velocidad temporal del fluido en forma adimensional tomará la expresión:

$$u^* = \left( 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) \right) u^*(0)$$

Recuérdese que erf es la función estadística de error.

## 8.4 Flujo estacionario en conductos circulares

### 8.4.1 Flujo de Poiseuille

Sea el conducto circular genérico de la figura, cuya longitud genérica es L. Se quiere determinar la distribución de velocidades en el interior del conducto en función del gradiente de presiones entre sus extremos.

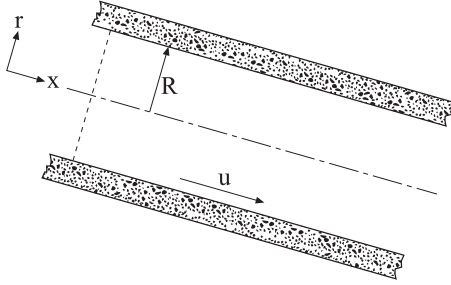


Fig. T 8.5  
Flujo de Poiseuille

Hipótesis de trabajo:

-  $\rho = \text{cte.}$  fluido incompresible

-  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$  ; régimen permanente

-  $v_r = v_\theta = 0$  ; flujo unidireccional bidimensional

-  $v_x = f(r)$  flujo unidireccional. (La velocidad del fluido depende únicamente del radio).

Las condiciones de contorno aplicables serán:

Para  $r = 0$ ;  $\Rightarrow v_x = v_{\max}$

Para  $r = R$ ;  $\Rightarrow v_x = 0$

Recordando las, ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad en coordenadas cilíndricas, se tiene:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \bar{g}_r + \\ \mu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) & \\ \rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho \bar{g}_\theta + \\ \mu \left( \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) & \\ \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \bar{g}_x + \\ \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right) & \end{aligned}$$



Cabe recordar también que, en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla P^* = \frac{\partial P^*}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial P^*}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \hat{x}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_r + \vec{g}_\theta$$

$$\vec{g} = -\nabla \Pi = -\nabla (gh) = -\left[ \frac{\partial (gh)}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (gh)}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial (gh)}{\partial x} \hat{x} \right]$$

Para el caso que se está considerando, las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes toman la forma:

Ecuación de continuidad:  $\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$

Ecuación de Navier-Stokes:

En dirección  $r$ :  $0 = \frac{\partial P^*}{\partial r}$

En dirección  $\theta$ :  $0 = \frac{1}{r} \frac{\partial P^*}{\partial \theta}$

En dirección  $x$ :  $0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$

Las primeras dos ecuaciones dicen que la presión reducida  $P^* = P + \rho gh$  es independiente de la dirección  $r$  y la dirección  $\theta$ , con lo que dicha presión reducida variará únicamente en dirección  $x$ .

Al igual que en los casos precedentes, se observa que la caída de presión en dirección  $x$  es constante.

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} = \text{constante}$$

En general, el término  $\frac{\partial P^*}{\partial x}$  es negativo, puesto que la presión  $P^*$  decrece al aumentar  $x$ .

La ecuación de Navier-Stokes en dirección  $x$  toma la forma:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

Integrando, se obtiene:

$$\int \frac{r}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} dr = \int d \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{2} + C_0 = r \frac{dV_x}{dr}$$



Aplicando una primera condición de contorno, se tiene:

$$r = 0; v_x = v_{\max} \Rightarrow C_0 = 0$$

Integrando nuevamente:

$$\int \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{2} \frac{dr}{r} = \int dv_x$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} \frac{r^2}{4} + C_1 = V_x$$

Utilizando la segunda ecuación de contorno:

$$r = R; v_x = 0; C_1 = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} \frac{R^2}{4}$$

De donde se obtiene:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{\mu} \frac{1}{4} (r^2 - R^2)$$

Se observa que la velocidad  $V_x$  parece que sea siempre negativa. No obstante, hay que recordar que el término  $\frac{\Delta P^*}{\Delta x}$  lleva asociado, en general, un signo negativo.

En el eje central,  $r = 0$ ;  $V_x = V_{\max}$ , la velocidad será:

$$V_{\max} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} R^2$$

Combinando las dos ecuaciones precedentes, se tiene:

$V_x = V_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$ , ecuación que caracteriza la distribución parabólica de velocidades deseada.

Una vez conocida la distribución de velocidades en función del radio, se puede determinar el flujo volumétrico que circula por el conducto, este vendrá determinado por:

$$Q = \int_0^R V_x \cdot 2\pi r dr = \int_0^R V_{\max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) 2\pi r dr = V_{\max} 2\pi \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{R^2} \frac{1}{4} \right)_0^R =$$

$$V_{\max} 2\pi \frac{R^2}{4} = V_{\max} \pi \frac{R^2}{2} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R^4 \pi}{8\mu}$$

La velocidad media puede ser calculada como:

$$\bar{V} = \frac{Q}{S} = \frac{-\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R^4 \pi}{8\mu}}{\pi R^2} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R^2}{8\mu} = \frac{1}{2} V_{\max}$$



## 8.5 Concepto de pendiente motriz

Se denomina *pendiente motriz*:

$$I = \frac{\Delta E}{L}; \quad \frac{\text{Variación de energía entre dos puntos del circuito}}{\text{Distancia entre estos dos puntos}}$$

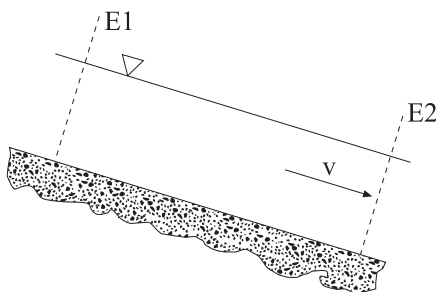
Que, en definitiva, es la energía de que dispone el fluido entre dos puntos del mismo y que origina su movimiento.

La energía asociada al fluido se define:

$$E = \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} + u$$

Sea el ejemplo que muestra la figura siguiente, donde el fluido incompresible e isotérmico se desplaza a lo largo de un canal abierto. La variación de energía entre dos puntos del fluido en el canal será:

Fig. T 8.6  
Flujo deslizándose  
por un canal abierto



$$I = - \frac{\partial \left\{ \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \right\}}{\partial x}$$

$$I = - \frac{\left[ \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \right]_1^2}{L} = - \frac{z_2 - z_1}{L} = \frac{z_1 - z_2}{L}$$

En este caso, la diferencia de cotas es la energía de que se dispone para que se produzca el movimiento del fluido.

Si se aplica el concepto de pendiente motriz en un conducto de sección recta circular, se tiene:

$$I = f \left( \frac{\partial P^*}{\partial x} \right), \text{ donde se desea determinar el valor de la función desconocida } f.$$

El concepto de pendiente motriz venía dado por:





$$I = \frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{\partial \left\{ \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \right\}}{\partial x}$$

$$\rho g I = - \rho g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} \right)$$

Puesto que la sección del conducto es constante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

con lo que:

$$\rho g I = - \frac{\partial}{\partial x} (P + \rho g z) = - \frac{\partial P^*}{\partial x}$$

Obsérvese que este término es el que daba origen al movimiento del fluido en el flujo de Poiseuille.

En consecuencia, la pendiente motriz, en este caso, tomará la forma:

$$I = - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P^*}{\partial x}$$

A recordar cabe la adimensionalidad de la pendiente motriz.

## 8.6 Flujo en un conducto anular

Sea el conducto anular que se muestra en la figura T 8.7, donde se va a suponer que el cilindro interior se desplaza axialmente a una velocidad  $u_i$ ; y además, puede existir un gradiente de presiones entre los extremos de los conductos.

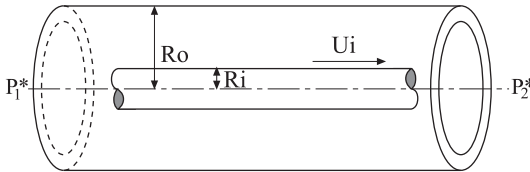


Fig. T 8.7  
Flujo entre dos  
cilindros  
concéntricos

Las hipótesis de trabajo son las mismas que en el flujo de Poiseuille, de modo que las ecuaciones resultantes diferenciales serán las mismas que en dicho tipo de flujo. Únicamente variarán las condiciones de contorno.

Hipótesis consideradas en el presente caso:

- $\rho = \text{cte.}$  fluido incompresible.



$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{régimen permanente.}$$

$$-v_r = v_\theta = 0 \quad \text{flujo unidireccional bidimensional.}$$

$$-v_x = f(r) \quad \text{flujo unidireccional. (La velocidad del fluido depende únicamente del radio).}$$

Las diversas condiciones de contorno posibles para este tipo de flujo son:

Condición de contorno 1, a, b

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = 0$$

$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$$

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = 0$$

$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

Condición de contorno 2, a, b

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = U_0$$

$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$$

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = U_0$$

$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

Condición de contorno 3, a, b

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = U_0$$

$$r = R_i; \quad V_x = 0$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$$

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = U_0$$

$$r = R_i; \quad V_x = 0$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

Condición de contorno 4

$$\text{Para } r = R_0; \quad V_x = 0$$

$$r = R_i; \quad V_x = 0$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

Independientemente de la condición de contorno elegida, y partiendo de las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, las ecuaciones diferenciales resultantes serán:

$$\text{Ecuación de continuidad: } \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0$$

Ecuación de Navier-Stokes:



desglosando para cada una de las tres componentes, se tiene:

$$0 = \frac{\partial P^*}{\partial r}$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

Se considerará, al igual que en los casos anteriores, que  $\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} = \text{cte.}$

Integrando la ecuación de Navier-Stokes en dirección x se obtiene:

$$\int \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r}{\mu} dr = \int d \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right)$$

$$C_0 + \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{2} \frac{1}{\mu} = r \frac{dV_x}{dr}$$

Integrando de nuevo:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} + C_0 \ln r + C_1$$

Con respecto a las posibles condiciones de contorno, se considerará inicialmente que el cilindro interior se desplaza axialmente con respecto al cilindro exterior, que se mantiene inmóvil y no existe gradiente de presiones entre sus extremos.

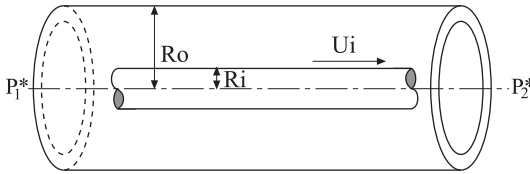


Fig. T 8.8  
Flujo entre dos  
cilindros  
concéntricos, caso  
desplazamiento  
axial del cilindro  
interior

$$r = R_0; \quad V_x = 0$$

$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$$

Aplicando estas condiciones de contorno a la ecuación que da la distribución de velocidades genérica se obtiene:

$$(1) \quad 0 = C_0 \ln R_0 + C_1$$

$$(2) \quad U_i = C_0 \ln R_i + C_1$$



De (2) - (1) se llega:

$$U_i = C_0 (\ln R_i - \ln R_0) = C_0 \ln \frac{R_i}{R_0} \quad ; \quad C_0 = \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}}$$

Sustituyendo en (1):

$$0 = \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \ln R_0 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \ln R_0$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación genérica de la distribución de velocidades y recordando que  $\frac{\Delta P^*}{\Delta x} = 0$ , se tiene:

$$V_x = \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \ln r - \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \ln R_0$$

$$V_x = \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} (\ln r - \ln R_0) = \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \ln \frac{r}{R_0}$$

Esta sería la distribución de velocidades entre los dos cilindros, para el caso considerado.

El caudal volumétrico que fluye entre los cilindros vendría dado por:

$$Q = \int_{R_i}^{R_0} V_x \cdot 2\pi r \, dr = \int_{R_i}^{R_0} \frac{U_i}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \ln \frac{r}{R_0} 2\pi r \, dr$$

$$Q = \frac{2\pi U_i}{\ln \left( \frac{R_i}{R_0} \right)} \left[ \int_{R_i}^{R_0} \ln r \cdot r \, dr - \int_{R_i}^{R_0} \ln R_0 \cdot r \, dr \right]$$

$$Q = \frac{2\pi U_i}{\ln \left( \frac{R_i}{R_0} \right)} \left[ \left( \frac{r^2}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \right)_{R_i}^{R_0} - \ln R_0 \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} \right]$$

$$Q = \frac{2\pi U_i}{\ln \left( \frac{R_i}{R_0} \right)} \left[ \frac{R_0^2}{2} \left( \ln R_0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{R_i^2}{2} \left( \ln R_i - \frac{1}{2} \right) - \ln R_0 \frac{R_0^2}{2} + \ln R_0 \frac{R_i^2}{2} \right]$$



$$Q = \frac{2\pi U_1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} \left[ \frac{1}{4} (R_i^2 - R_0^2) + \frac{R_i^2}{2} \ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right) \right]$$

$$Q = \frac{1}{2} \pi R_0^2 U_1 \left[ \frac{\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 - 1}{\ln\left(\frac{R_i}{R_0}\right)} - 2 \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \right]$$

La fuerza necesaria para desplazar axialmente el cilindro interior será:

$$\text{Cilindro interior: } \tau_i = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial r} \right|_{r=R_i} = \mu \frac{U_1}{\ln \frac{R_i}{R_0}} \frac{1}{R_i}$$

$$F_i = \tau_i \text{ Superficie} = \tau_i 2\pi R_i L = \mu \frac{U_1}{\ln \frac{R_i}{R_0}} 2\pi L$$

$L$  = longitud unitaria del conducto

La potencia necesaria para desplazar el cilindro interior será:

$$N_i = U_i F_i = \tau_i S_i U_i = \tau_i 2\pi R_i L U_i = \mu \frac{U_i^2}{\ln \frac{R_i}{R_0}} 2\pi L$$

### 8.6.1 Considérese ahora el caso en que ambos cilindros son estacionarios pero existe una diferencia de presión entre los extremos de los cilindros

Las condiciones de contorno son:

$$r = R_0; \quad V_x = 0$$

$$r = R_i; \quad V_x = 0$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$

La ecuación genérica de distribución de velocidades era:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{4\mu} + C_0 \ln r + C_1$$

De la aplicación de las condiciones de contorno, se obtiene:



$$(1) \quad 0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{4\mu} + C_0 \ln R_0 + C_1$$

$$(2) \quad 0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_i^2}{4\mu} + C_0 \ln R_i + C_1$$

$$(1) - (2)$$

$$0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (R_0^2 - R_i^2) + C_0 \left( \ln \frac{R_0}{R_i} \right)$$

$$C_0 = - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{4\mu} \frac{1}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)}$$

Sustituyendo en (1):

$$C_1 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{4\mu} + \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2 - R_i^2}{4\mu} \frac{\ln R_0}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)}$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación genérica:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{4\mu} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (R_0^2 - R_i^2) \frac{\ln r}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{4\mu} + \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (R_0^2 - R_i^2) \frac{\ln R_0}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)}$$

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (r^2 - R_0^2) + \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (R_0^2 - R_i^2) \frac{1}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)} (\ln R_0 - \ln r)$$

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (r^2 - R_0^2) + \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} (R_0^2 - R_i^2) \frac{\ln \left( \frac{R_0}{r} \right)}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)}$$

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} \left[ (r^2 - R_0^2) + (R_0^2 - R_i^2) \frac{\ln \left( \frac{R_0}{r} \right)}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)} \right]$$

La velocidad máxima entre los dos cilindros se obtiene al aplicar  $\frac{dV_x}{dr} = 0$ , de donde:

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} 2r - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)} \frac{1}{r} = 0$$



Sacando factor común:

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} \left[ 2r - \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \frac{1}{r} \right] = 0$$

$$2r^2 - \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} = 0$$

$$r = \left( \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \frac{1}{2} \right)^{1/2}, \text{ radio para el cual se obtiene la velocidad máxima.}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$V_{\max} = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} \left[ \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \frac{1}{2} - R_0^2 + (R_0^2 - R_i^2) \frac{\ln R_0 - \ln \left[ \left( \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right]}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \right]$$

El caudal volumétrico será:

$$Q = \int_{R_i}^{R_0} V_x \cdot 2\pi r dr = \int_{R_i}^{R_0} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{2\pi}{4\mu} \left[ (r^2 - R_0^2) + (R_0^2 - R_i^2) \frac{\ln\left(\frac{R_0}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \right] r dr =$$

$$Q = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{2\pi}{4\mu} \left\{ \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_0} - \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} R_0^2 + \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \left\{ \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} \ln R_0 - \int_{R_i}^{R_0} \ln r \cdot r dr \right\} \right\}$$

$$Q = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{2\pi}{4\mu} \left\{ \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{R_i}^{R_0} - \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} R_0^2 + \frac{(R_0^2 - R_i^2)}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \left\{ \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{R_i}^{R_0} \ln R_0 - \left[ \frac{r^2}{2} \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \right]_{R_0}^{R_i} \right\} \right\}$$



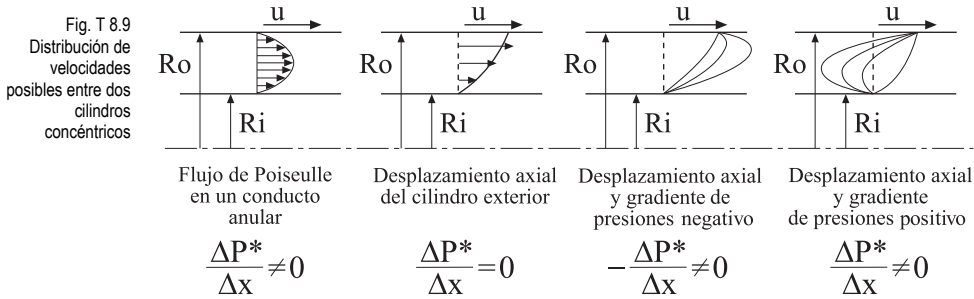
De donde, recombinando, se llega al resultado:

$$Q = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{\pi R_0^4}{8\mu} \left( 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4 - \frac{[1 - (R_i/R_0)^2]^2}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)} \right)$$

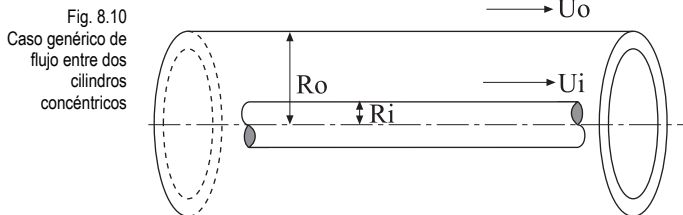
La velocidad media del fluido será:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi(R_0^2 - R_i^2)} = -\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{8\mu} \left[ 1 + \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 - \frac{1 - (R_i/R_0)^2}{\ln \left( \frac{R_0}{R_i} \right)} \right]$$

En general, la distribución de velocidades para diferentes casos genéricos se puede representar como:



### 8.6.2 Caso genérico de flujo entre dos cilindros concéntricos, en donde existe desplazamiento en dirección axial de ambos cilindros y gradiente de presiones entre extremos de los cilindros



Las condiciones de contorno para este caso genérico son:

$$r = R_0; \quad V_x = U_0$$

$$r = R_i; \quad V_x = U_i$$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \neq 0$$





La ecuación de partida, que se obtiene de integrar Navier-Stokes, es la misma que en los casos precedentes, de donde:

$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{4\mu} + C_0 \ln r + C_1$$

De la aplicación de las condiciones de contorno, se obtiene:

$$U_0 = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{4\mu} + C_0 \ln R_0 + C_1$$

$$U_i = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{R_i^2}{4\mu} + C_0 \ln R_i + C_1$$

$$U_0 - U_i = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2] + C_0 \ln \frac{R_0}{R_i}$$

$$C_0 = \frac{(U_0 - U_i) - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2]}{\ln \frac{R_0}{R_i}}$$

$$C_1 = U_0 - \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{R_0^2}{4\mu} - C_0 \ln R_0$$

O bien, sumando las dos ecuaciones de partida:

$$U_0 + U_i = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2] + C_0 \ln (R_0 R_i) + 2C_1$$

$$C_1 = \frac{(U_0 + U_i) - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2] - C_0 \ln (R_0 R_i)}{2}$$

Sustituyendo el valor de  $C_0$ , se obtiene:

$$C_1 = \frac{(U_0 + U_i)}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{8\mu} [R_0^2 - R_i^2] - \frac{(U_0 - U_i) - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2]}{2 \ln \frac{R_0}{R_i}} \ln (R_0 R_i)$$

Con lo que la distribución de velocidad genérica será:



$$V_x = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{r^2}{4\mu} + \frac{(U_0 - U_i) - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2]}{\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \ln r + \frac{(U_0 + U_i)}{2}$$

$$- \frac{\Delta P^* (R_0^2 + R_i^2)}{\Delta x} \frac{1}{8\mu} - \frac{(U_0 - U_i) - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{4\mu} [R_0^2 - R_i^2]}{2 \ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right)} \ln(R_0 R_i)$$

La fuerza necesaria para desplazar los cilindros interior y exterior será:

$$\text{Cilindro interior: } \tau_i = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial r} \right|_{r=R_i}$$

$$F_i = \tau_i \text{ Superficie} = \tau_i 2\pi R_i L$$

$L$  = longitud unitaria del conducto

$$\text{Cilindro exterior: } \tau_0 = \mu \left. \frac{\partial V_x}{\partial r} \right|_{r=R_0}$$

$$F_0 = \tau_0 S = \tau_0 2\pi R_0 L$$

La potencia necesaria para desplazar los cilindros interior y exterior será:

$$N_i = U_i F_i = \tau_i S_i U_i = \tau_i 2\pi R_i L U_i$$

$$N_0 = U_0 F_0 = \tau_0 S_0 U_0 = \tau_0 2\pi R_0 L U_0$$

El radio para el cual la velocidad es máxima se determinará aplicando:  $\frac{dV_x}{dr} = 0$

El caudal circulante entre los dos cilindros se determinaría del mismo modo que para los casos precedentes:

$$Q = \int_{R_i}^{R_0} V_x 2\pi r dr$$

## 8.7 Flujo entre cilindros concéntricos giratorios

Sean dos cilindros concéntricos que giran con velocidades angulares diferentes  $\omega_i$  y  $\omega_0$ .

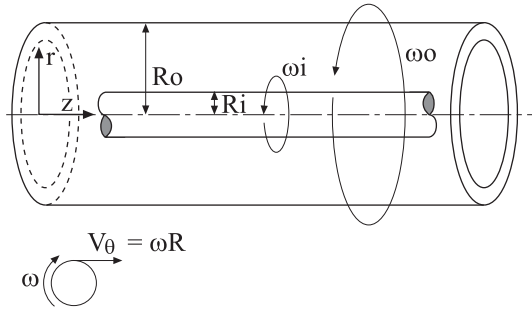


Fig. T 8.11  
Flujo entre cilindros  
concéntricos  
giratorios

Las hipótesis de trabajo son las mismas que en los casos precedentes, excepto por las velocidades que ahora son relevantes. Así, se tiene:

-  $\rho = \text{cte}$ ; fluido incompresible

-  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = 0$ ; régimen permanente

-  $V_\theta = f(r)$  flujo unidireccional. (La velocidad del fluido depende únicamente del radio)

-  $v_r = v_x = 0$ ; flujo unidireccional bidimensional

Se consideran los cilindros infinitamente largos, régimen permanente; la velocidad varía únicamente en dirección radial, y no hay velocidad en dirección axial ni angular.

Las diferentes condiciones de contorno que se pueden establecer para este tipo de flujo son:

Condición de contorno 1

$$\begin{array}{lll} r = R_i & V_{\theta i} = \omega_i R_i & \frac{\Delta p}{\Delta x} = 0; V_x = 0; V_r = 0 \\ r = R_o & V_{\theta o} = \omega_o R_o & \end{array}$$

Condición de contorno 2

$$\begin{array}{lll} r = R_i & V_{\theta i} = 0 & \frac{\Delta p}{\Delta x} = 0; V_x = 0; V_r = 0 \\ r = R_o & V_{\theta o} = \omega_o R_o & \end{array}$$

Condición de contorno 3

$$\begin{array}{lll} r = R_i & V_{\theta i} = \omega_i R_i & \frac{\Delta p}{\Delta x} = 0; V_x = 0; V_r = 0 \\ r = R_o & V_{\theta o} = 0 & \end{array}$$

Obsérvese que, para el caso objeto de estudio, no puede existir gradiente de presiones a lo largo del eje, dado que esto induciría a un flujo bidimensional y complicaría en demasía la resolución matemática.



Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en coordenadas cilíndricas se expresan del modo siguiente:

Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas se expresan:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) &= \rho \bar{g}_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \\ \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_x \frac{\partial V_\theta}{\partial x} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) &= \rho \bar{g}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \\ \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_x}{r \partial \theta} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) &= \rho \bar{g}_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \\ \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right] \end{aligned}$$

Para el caso en estudio, estas ecuaciones dan lugar a:

$$\text{Ecuación de continuidad: } \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) = 0 \quad ; \quad \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Ecuación Navier-Stokes:

En dirección radial:

$$\begin{aligned} -\rho \frac{V_\theta^2}{r} &= \rho \bar{g}_r - \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r} \\ \rho \frac{V_\theta^2}{r} &= \frac{\partial P^*}{\partial r} \end{aligned}$$

En dirección angular (se supondrá que el gradiente de presión reducida es inexistente en dirección angular):

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}$$



En dirección axial, se llega a:  $0 = \frac{\partial P^*}{\partial r}$

De la integración de la ecuación de continuidad resultante, se obtiene:

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0; \quad V_\theta = \text{constante}; \quad V_\theta \text{ no depende de } \theta$$

De la ecuación de Navier-Stokes en dirección radial:  $\int P^* = \int \rho \frac{V_\theta^2}{r} dr$

Se observa que, para determinar la presión reducida, es necesario conocer cómo varía  $V_\theta$  con el radio.

$V_\theta$  Se determinará integrando la ecuación de Navier-Stokes en dirección angular:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r V_\theta) = C_1$$

$$\frac{d}{dr} (r V_\theta) = C_1 r$$

$$r V_\theta = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

$$V_\theta = \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}$$

Véase que, partiendo de esta ecuación, cualquiera de las condiciones de contorno definidas en este apartado puede ser aplicada. Para la resolución, se va a considerar el caso en que los dos cilindros estén girando, siendo las condiciones de contorno:

$$V_\theta = R_i \omega_i \quad r = R_i$$

$$V_\theta = R_0 \omega_0 \quad r = R_0$$

Aplicando estas condiciones de contorno se obtiene:

$$R_i \omega_i = \frac{C_1}{2} R_i + \frac{C_2}{R_i}$$

$$R_0 \omega_0 = \frac{C_1}{2} R_0 + \frac{C_2}{R_0}$$

de donde el valor de las dos constantes serán:

$$C_2 = R_i^2 \omega_i - \frac{C_1}{2} R_i^2$$

$$R_0 \omega_0 = \frac{C_1}{2} R_0 + \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0} - \frac{C_1}{2} \frac{R_i^2}{R_0}$$

$$R_0 \omega_0 - \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0} = \frac{C_1}{2} \left( R_0 - \frac{R_i^2}{R_0} \right)$$



$$C_1 = \left( R_0 \omega_0 - \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0} \right) \frac{2}{R_0 - \frac{R_i^2}{R_0}} = \frac{(R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i) 2}{R_0^2 - R_i^2}$$

$$C_2 = R_i^2 \omega_i - R_i^2 \frac{(R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i)}{R_0^2 - R_i^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la velocidad:

$$V_\theta = \frac{(R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i)}{R_0^2 - R_i^2} \cdot r + \frac{R_i^2 \omega_i}{r} - \frac{R_i^2}{r} \frac{R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2}$$

$$V_\theta = \frac{R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) + \frac{R_i^2 \omega_i}{r}$$

la ecuación que caracteriza la distribución de velocidades del fluido atrapado entre los dos cilindros.

Ahora, se puede hallar la presión reducida en función del radio simplemente sustituyendo la ecuación que da la distribución de velocidades en el término de Navier-Stokes en dirección radial:

$$\int_{P_i^*}^{P_r^*} P^* = \int_{R_i}^r \rho \frac{V_\theta^2}{r} dr = \int_{R_i}^r \frac{\rho}{r} \left[ \frac{R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) + \frac{R_i^2 \omega_i}{r} \right] dr$$

Véase que, para realizar la integración, es necesario conocer la presión reducida en un radio dado. Esto ha de entenderse como una condición de contorno adicional.

Otros casos particulares de este tipo de flujo pueden ser:

$$\begin{aligned} \text{a) } r = R_i &\Rightarrow \omega_i = 0; & r = R_0 &\Rightarrow \omega_0 = \omega \\ \text{b) } r = R_i &\Rightarrow \omega_i = \omega; & r = R_0 &\Rightarrow \omega_0 = 0 \\ \text{c) } r = R_i &\Rightarrow \omega_i = -\frac{\omega}{2}; & r = R_0 &\Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

**Caso a)**  $r = R_i \Rightarrow \omega_i = 0; \quad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = \omega$

De la ecuación genérica de la distribución de velocidades, se tiene:

$$V_\theta = \frac{R_0^2 \omega_0}{R_0^2 - R_i^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) = \frac{\omega_0 \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right)}{1 - \left( \frac{R_i^2}{R_0^2} \right)}$$



La distribución de presión reducida se obtendrá:

$$\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \frac{dP^*}{dr} = \frac{\rho}{r} \left( \frac{\omega_0^2 \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right)^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \right)$$

$$\int dP^* = \frac{\rho \omega_0^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \int \frac{1}{r} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right)^2 dr = \frac{\rho \omega_0^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \int \left( r - \frac{2R_i^2}{r} + \frac{R_i^4}{r^3} \right) dr =$$

$$P^* = \frac{\rho \omega_0^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left[ \frac{r^2}{2} - 2R_i^2 \ln r + R_i^4 \frac{r^{-2}}{-2} \right] + C$$

La condición de contorno necesaria para determinar esta nueva constante de integración es,

para  $r = R_i \Rightarrow P^* = P_i$ :

$$P_i = \frac{\rho \omega_0^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left[ \frac{R_i^2}{2} - 2R_i^2 \ln R_i - R_i^4 \frac{R_i^{-2}}{2} \right] + C$$

$$C = P_i - \frac{\rho \omega_0^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left[ \frac{R_i^2}{2} - 2R_i^2 \ln R_i - \frac{R_i^2}{2} \right]$$

$$P^* = P_i + \frac{\rho \omega_0^2}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left[ \frac{1}{2} (r^2 - R_i^2) - 2R_i^2 \ln \frac{r}{R_i} + \frac{R_i^4}{2} \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right]$$

Para determinar la potencia necesaria para hacer girar uno de estos cilindros, por ejemplo el cilindro interior, será necesario primero determinar el esfuerzo cortante en la superficie del cilindro.

Los esfuerzos cortantes para este tipo de flujo vienen dados por la ecuación:

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \phi_{r\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) \right)$$



siendo este uno de los términos del tensor de deformación en coordenadas cilíndricas.

Para el caso en estudio, la ecuación de los esfuerzos cortantes quedará resumida en:

$$\tau_{r\theta} = r\mu \frac{d}{dr} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_i}$$

Dividiendo la ecuación de la distribución de velocidades con respecto a  $r$  y luego derivándola, queda:

$$\tau_{r\theta} = r\mu \left[ \frac{\omega_0}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2} R_i^2 \cdot 2r^{-3} \right] \Big|_{r=R_i}$$

Para el cilindro interior, donde  $r = R_i$ , se tiene:

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=R_i} = \frac{\mu \omega_0 2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}$$

El momento con respecto al eje central causado por este esfuerzo cortante es (momento por unidad de longitud del cojinete):

$$M_{Ri} = \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_i} \cdot 2\pi R_i \cdot 1 \cdot R_i = \frac{4\pi\mu \omega_0 R_i^2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}$$

El momento debido al cilindro exterior sería:

$$M_{R0} = \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_0} \cdot 2\pi R_0 \cdot 1 \cdot R_0 = \frac{\mu \omega_0 2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2} \left( \frac{R_i^2}{R_0^2} \right) \cdot 2\pi R_0^2 = \frac{4\pi\mu \omega_0 R_i^2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}$$

Obsérvese que el momento causado por ambos cilindros es idéntico.

La potencia necesaria para hacer girar dichos cilindros será:

$$N_{Ri} = M_{Ri} \omega_i$$

$$N_{R0} = M_{R0} \omega_0$$

**Caso b)**  $r = R_i \Rightarrow \omega_i = \omega$ ;  $r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = 0$

Se parte, de nuevo, de la ecuación genérica de distribución de velocidades para llegar a la ecuación:

$$V_\theta = \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( \frac{R_i^2}{r} - r \right) + \frac{R_i^2 \omega_i}{r}$$





Esta ecuación se puede dar como:

$$V_{\theta} = \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( \frac{R_i^2}{r} - r + \frac{1}{r} (R_0^2 - R_i^2) \right)$$

$$V_{\theta} = \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( \frac{1}{r} (R_i^2 + (R_0^2 - R_i^2)) - r \right)$$

$$V_{\theta} = \frac{R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( \frac{R_0^2}{r} - r \right)$$

$$V_{\theta} = \frac{\omega_i \frac{R_i^2}{R_0^2} \left( \frac{R_0^2}{r} - r \right)}{1 - \frac{R_i^2}{R_0^2}} = \frac{-\omega_i \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \left( r - \frac{R_0^2}{r} \right)}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}$$

La distribución de presiones vendrá dada por:

$$\rho \frac{V_{\theta}^2}{r} = \frac{dp^*}{dr}$$

$$\frac{dp^*}{dr} = \rho \frac{-\omega_i^2 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left( r - \frac{R_0^2}{r} \right)^2$$

$$\frac{dp^*}{dr} = \frac{-\rho \omega_i^2 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \frac{1}{r} \left( r^2 - 2R_0^2 + \frac{R_0^4}{r^2} \right)$$

$$\int dp^* = \frac{-\rho \omega_i^2 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \int \left( r - 2\frac{R_0^2}{r} + \frac{R_0^4}{r^3} \right) dr$$

$$P^* = \frac{-\rho \omega_i^2 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left( \frac{r^2}{2} - 2R_0^2 \ln r + \frac{R_0^4}{-2} r^{-2} \right) + C$$



Condición de contorno adicional:  $r = R_i \Rightarrow P = P_i$

$$C = P_i + \frac{\rho \omega_i^2 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left( \frac{R_i^2}{2} - 2R_0^2 \ln R_i - \frac{R_0^4}{2} \frac{1}{R_i^2} \right)$$

con lo que:

$$P^* = P_i + \frac{\rho \omega_i^2 \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^4}{\left[ 1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2 \right]^2} \left( \frac{R_i^2}{2} - \frac{r^2}{2} + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R_i} - \frac{R_0^4}{2} \left( \frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right)$$

El esfuerzo cortante en la superficie exterior será, para  $r = R_0$ :

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \phi_{r\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) \right) \right)$$

$$\tau_{r\theta} = r\mu \frac{d}{dr} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) = r\mu \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{-\omega_i \frac{R_i^2}{R_0^2} \left( r - \frac{R_0^2}{r} \right)}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2} \right]_{r=R_0}$$

$$\tau_{r\theta} = r\mu \frac{d}{dr} \left[ \frac{-\omega_i \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2} \left( 1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right) \right]_{r=R_0}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{-\omega_i \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2} R_0^2 r \mu 2r^{-3} \Big|_{r=R_0}$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=R_0} = \frac{-2\mu \omega_i \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}{1 - \left( \frac{R_i}{R_0} \right)^2}$$



El momento por unidad de longitud creado en la superficie del cilindro exterior es:

$$|M| = |2\pi R_0 \cdot R_0 \cdot \tau_{r\theta}| = \frac{4\pi R_0^2 \mu \omega_i \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} = \frac{4\pi \mu \omega_i R_i^2 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2}$$

**Caso c)**  $r = R_i \Rightarrow \omega_i = -\frac{\omega}{2}; \quad r = R_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega}{2}$

La ecuación genérica de la distribución de velocidades era:

$$V_\theta = \frac{R_0^2 \omega_0 - R_i^2 \omega_i}{R_0^2 - R_i^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) + \frac{R_i^2 \omega_i}{r}$$

Sustituyendo los valores de  $\omega_0$  y  $\omega_i$  por su equivalente, se obtiene:

$$V_\theta = \frac{R_0^2 \frac{\omega}{2} - R_i^2 \frac{\omega}{2}}{R_0^2 - R_i^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) - \frac{R_i^2 \omega}{2r}$$

$$V_\theta = \frac{\omega (R_0^2 - R_i^2)}{2 (R_0^2 - R_i^2)} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) - \frac{R_i^2 \omega}{2r}$$

$$V_\theta = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \left( r - \frac{R_i^2}{r} \right) - \frac{R_i^2}{r} \right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega R_i^2}{2 r} \left[ -1 - \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} + \frac{r^2}{R_i^2} \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$

$$V_\theta = \frac{\omega R_i^2}{2 r} \left[ \frac{-\left(1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right) - \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} + \frac{r^2}{R_i^2} \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$



$$V_{\theta} = \frac{\omega R_i^2}{2r} \left[ \frac{-2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} + \frac{r^2}{R_i^2} \frac{1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$

$$V_{\theta} = \frac{\omega R_i^2}{2r} \left[ \frac{-2 + \frac{r^2}{R_i^2} \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$

$$V_{\theta} = \frac{\omega R_i^2}{2r} \left[ \frac{\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \frac{r^2}{R_i^2} - 2 + \frac{r^2}{R_i^2}}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$

$$V_{\theta} = \frac{\omega}{2r} \left[ \frac{\left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 r^2 - 2R_i^2 + r^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$

$$V_{\theta} = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{r \left[ 1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \right] - 2 \frac{R_i^2}{r}}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} \right]$$

$$V_{\theta} = \frac{\omega \left[ \frac{r}{2} \left[ \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 + 1 \right] - \frac{R_i^2}{r} \right]}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

La distribución de presión reducida en función del radio será:

$$\frac{dP^*}{dr} = \rho \frac{V_{\theta}^2}{r} = \frac{\rho}{r} \frac{\omega^2}{4} \frac{\left( r \left[ 1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \right] - 2 \frac{R_i^2}{r} \right)^2}{\left[ 1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2 \right]^2}$$



$$\frac{dP^*}{dr} = \frac{\rho \omega^2}{r} \frac{r^2 \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2 - 2r \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)\right] 2\frac{R_i}{r} + 4\left(\frac{R_i}{r}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2}$$

$$\int dP^* = \frac{\rho \omega^2}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \int \left[ r \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2 - 4R_i \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)\right] \frac{1}{r} + 4\frac{R_i^2}{r^3} \right] dr$$

$$P^* = \frac{\rho \omega^2}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \left[ \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2 \frac{r^2}{2} - 4R_i \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)\right] \ln r - 2\frac{R_i^2}{r^2} \right] + C$$

De la aplicación de la condición de contorno  $r = R_i$   $P = P_i$ , se obtiene:

$$C = P_i - \frac{\rho \omega^2}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \left[ \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2 \frac{R_i^2}{2} - 4R_i \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)\right] \ln R_i - 2 \right]$$

de donde:

$$P = P_i + \frac{\rho \omega^2}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right]^2} \left[ \left(1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2\right)^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_i^2}{2}\right) - 4R_i \left[1 + \left(\frac{R_i}{R_0}\right)\right] \ln \left(\frac{r}{R_i}\right) - \left[2\left(\frac{R_i}{r}\right)^2 - 1\right] \right]$$

El esfuerzo cortante sería:

$$\tau_{r\theta} = 2\mu \phi_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr} \left( \frac{V_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_i} = \frac{\mu \omega R_i^2}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2}$$

El momento por unidad de longitud para el cilindro de radio  $R_i$  es:

$$|M| = 2\pi R_i \cdot R_i \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_i} = \frac{2\pi \mu \omega R_i^4}{1 - \left(\frac{R_i}{R_0}\right)^2} = \frac{2\pi \mu \omega R_i^4 R_0^2}{R_0^2 - R_i^2}$$



La potencia necesaria para hacer girar dicho cilindro es el producto del par por la velocidad de giro.

## 8.8 Flujos con aceleración despreciable

### 8.8.1 Introducción

Existen dos familias de flujos que obedecen a estos requerimientos:

Flujos en espacios reducidos (*narrow gaps*)

Flujos con deslizamiento (*creeping flows*), flujos alrededor de cuerpos, esferas, cilindros, da lugar a la ley de Stokes.

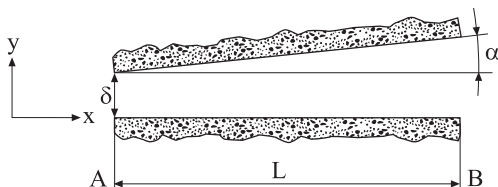
Este apartado se centra en el estudio del primero de los grupos.

Hipótesis de trabajo:

- $\rho = \text{cte}$ ; fluido incompresible
- $-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ ; régimen permanente
- Los términos de aceleración local y convectiva se consideran despreciables frente a los términos viscosos.
- A priori, se considerará flujo bidireccional, bidimensional, entre dos placas planas.

Sea el espacio entre placas de la figura; la placa superior puede desplazarse en dirección horizontal a una velocidad constante  $U$ .

Fig. T 8.12  
Esquema del patín  
de Michel



Con respecto a las relaciones dimensionales, se considera:

$$\frac{\delta}{L} \ll 1; \quad \alpha < \frac{\delta}{L}; \quad \text{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{\delta'}{L}; \quad \frac{\delta'}{L} < \frac{\delta}{L};$$

Sea  $\bar{u}$  la velocidad media en dirección  $x$ ,  $\bar{u}$  se puede definir de forma genérica:

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u dy$$



Aplicando la ley de conservación de la masa entre los dos extremos del patín, se tiene:

$$\bar{u}_A \delta = \bar{u}_B (\delta + \delta') = \bar{u}_B (\delta + L\alpha)$$

Considerando muy pequeño el ángulo de inclinación de la placa superior, se deduce:

$L \tan \alpha \cong L\alpha$ , con lo que

$$0 = \bar{u}_B (\delta + L\alpha) - \bar{u}_A \delta$$

$$0 = \delta(\bar{u}_B - \bar{u}_A) + \bar{u}_B L\alpha$$

$$\bar{u}_B - \bar{u}_A = -\bar{u}_B \frac{L\alpha}{\delta}$$

Se puede asimismo establecer:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cong \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right| \cong \frac{\bar{u}_B - \bar{u}_A}{L} = -\bar{u}_B \frac{\alpha}{\delta} = \left| \bar{u}_B \frac{\alpha}{\delta} \right|, \text{ considerando } \bar{u}_B \cong \bar{u}$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cong \left| \bar{u} \frac{\alpha}{\delta} \right|$$

La ecuación de continuidad, para flujo bidimensional, régimen permanente y densidad constante, se enuncia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Como  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ha sido dado en valor absoluto, el valor absoluto de la velocidad del fluido

en dirección del eje y, y con respecto a dicha dirección  $\frac{\partial v}{\partial y}$  será:

$$\left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| = \left| \frac{\bar{u}\alpha}{\delta} \right|$$

Las condiciones de contorno para (V) entre los dos platos son: para  $y = 0$ ,  $V = 0$ ; para  $y = \delta$ ,  $V = 0$ .

Se puede decir, que el valor máximo de la velocidad  $|V|$  estará localizado, aproximadamente, en el centro de las dos placas, con lo que se estima:

$$|V_{\text{máx}}| \approx \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| \frac{\delta}{2} \approx \left| \frac{\bar{u}\alpha}{2} \right| \ll \bar{u}$$

con lo cual se puede afirmar que la componente de la velocidad en dirección y puede despreciarse frente a la componente de la velocidad en dirección x.



La distribución de velocidades del fluido entre dos placas casi paralelas, siendo la placa superior móvil, se define por el flujo de Couette:

$$u = \frac{U}{\delta} y$$

con lo cual:

$$\frac{u}{y} = \frac{U}{\delta} \text{ de donde: } \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \cong \frac{\Delta u}{\Delta y} \cong \frac{U - 0}{\delta} \cong \frac{\bar{u}}{\delta};$$

$$\text{así, } \frac{\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \cong \frac{\left| \frac{\bar{u}\alpha}{\delta} \right|}{\frac{\bar{u}}{\delta}} = \alpha < \frac{\delta}{L} \ll 1$$

$$\alpha \cong \text{tg} \alpha = \frac{\delta_B - \delta_A}{L}$$

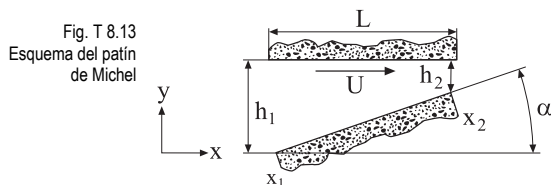
La variación de la velocidad en dirección x es de un orden muy inferior a la variación de la velocidad en dirección y. Así, se entenderá que la componente de la velocidad en dirección x únicamente varía en dirección y.

## 8.8.2 Teoría de la lubricación de Reynolds. Flujo unidireccional.

### 8.8.2.1 Cojinetes hidrostáticos planos, patín de Michel.

Esta teoría estudia las fuerzas que aparecen en cojinetes y otras superficies deslizantes lubricadas.

Sea el flujo bidimensional entre las dos placas que se muestran en la figura T 8.13.



La cantidad de movimiento en dirección x estará definida por la ecuación de Navier-

Stokes para flujo bidimensional, aunque se considerará que  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cong \alpha \ll 1$ ; y que

$$v \ll u;$$





La ecuación de Navier-Stokes para flujo bidimensional en coordenadas cartesianas se enuncia:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \bar{g}_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \bar{g}_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

La ecuación de continuidad sería:

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ , puesto que, para el caso que se considera, se establece  $v \ll u$ . La ecuación de continuidad se aproxima a  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

Recordando que  $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$ , los dos términos de Navier-Stokes se reducen a:

$$0 = -\frac{dp^*}{dx} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

$$0 = -\frac{dp^*}{dy}$$

Obsérvese que se ha utilizado el concepto de presión reducida.

Considerando que  $\frac{dp^*}{dx} \cong \frac{\Delta p^*}{\Delta x}$ , se concluye:

$$\frac{\Delta p^*}{\Delta x} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

cuya integración da lugar a:

$$u = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$$

Aplicando las condiciones de contorno; para  $y = 0$  se tiene que  $u = 0$ , y para  $y = d$  se tiene que  $u = U$ ,

De donde se obtiene:

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{U}{d} - \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{d}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación general, se llega a:

$$u = U \frac{y}{d} + \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \frac{y}{2\mu} [y - d]$$



ecuación que da la distribución de velocidades entre dos placas planas cuando una de ellas se desliza a velocidad  $U$  y existe gradiente de presiones reducidas entre sus extremos.

Obsérvese que esta ecuación es exactamente la misma que la que se obtuvo para el flujo de Couette-Poiseuille entre dos placas planas. Para el caso objeto de estudio, no obstante, la distancia  $d$  no es constante y se va a denominar  $h(x)$ , con lo cual:

$$u = \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{2\mu} y(y - h(x)) + U \frac{y}{h(x)}$$

Para un patín con una profundidad unitaria, el flujo másico viene dado por:

$$\dot{m} = \int_0^{h(x)} \rho u \, dy = \int_0^{h(x)} \rho \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{2\mu} (y^2 - yh(x)) + U \frac{y}{h(x)} \right) dy$$

$$\dot{m} = \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{2\mu} \left[ \frac{1}{3} y^3 - \frac{y^2}{2} h(x) \right]_0^{h(x)} + \frac{\rho U}{h(x)} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{h(x)}$$

$$\dot{m} = (-) \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{2\mu} \frac{1}{6} h_{(x)}^3 + \rho U \frac{h_{(x)}}{2}$$

$$\dot{m} = \rho U \frac{h_{(x)}}{2} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3$$

Definiendo ahora un caudal másico  $\dot{m}$  igual al hallado, el cual venga dado en función de una distribución de velocidades entre dos placas paralelas, características del flujo de Couette, y siendo la distancia entre ambas placas  $h_0$ , distancia desconocida pero, que permite cumplir la condición de igual flujo másico. Dicho caudal másico se expresaría:

$$\dot{m} = \int_0^{h_0} \rho U \frac{y}{h_{(x)}} \, dy = \rho \frac{U}{h_{(x)}} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{h_0} = \rho U \frac{h_0}{2}$$

Igualando los dos flujos másicos, se obtiene:

$$\rho \frac{U}{2} h_0 = \rho \frac{U}{2} h_{(x)} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3$$

$$\rho \frac{U}{2} (h_0 - h_{(x)}) = -\rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3$$

Despejando la diferencia de presiones reducida y denominando  $h_{(x)} = h$

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta x} \equiv \frac{dP^*}{dx} = 6\mu U \frac{(h - h_0)}{h^3}$$

Recordando que el ángulo de inclinación es  $\alpha \equiv \frac{dh}{dx}$



se puede establecer:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{dh} \frac{dh}{dx} = \alpha \frac{dP^*}{dh}$$

$$\frac{dP^*}{dh} = \frac{1}{\alpha} \frac{dP^*}{dx}$$

de donde:

$$\frac{dP^*}{dh} = 6\mu \frac{U}{\alpha} \frac{(h-h_0)}{h^3}$$

$$P^* = \int 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{h_0}{h^3} \right) dh = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( -\frac{1}{h} + \frac{h_0}{2} \frac{1}{h^2} \right) + C_1$$

Como condiciones de contorno, para determinar la constante  $C_1$  y la altura  $h_0$ , se definen en ambos extremos del patín:

$$\text{Para } h = h_1, P^* = P_0 = P_{\text{atm.}}$$

$$\text{Para } h = h_2, P^* = P_0 = P_{\text{atm}}$$

De donde se obtiene:

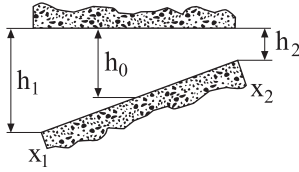


Fig. T 8.14

$$(1) \quad P_0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( -\frac{1}{h_1} + \frac{h_0}{2} \frac{1}{h_1^2} \right) + C_1$$

$$(1) \quad P_0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( -\frac{1}{h_2} + \frac{h_0}{2} \frac{1}{h_2^2} \right) + C_1$$

$$(1-2) \quad 0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} + \frac{h_0}{2} \left( \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) \right)$$

$$\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} = \frac{h_0}{2} \left( \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right)$$

$$\frac{h_0}{2} = \frac{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}{\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}} = \frac{\frac{h_2 - h_1}{h_1 h_2}}{\frac{h_2^2 - h_1^2}{h_1^2 h_2^2}} = \frac{(h_2 - h_1) h_1 h_2}{h_2^2 - h_1^2}$$

$$\frac{h_0}{2} = \frac{(h_2 - h_1) h_1 h_2}{(h_2 + h_1)(h_2 - h_1)} = \frac{h_1 h_2}{h_2 + h_1}$$



Ecuación que da el valor de  $h_0$  en función de las alturas conocidas.

Por otro lado, el valor de la constante  $C_1$  se puede dar como:

$$C_1 = P_0 - 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( -\frac{1}{h_1} + \frac{h_0}{2} \frac{1}{h_1^2} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación inicial:

$$P^* - P_0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( -\frac{1}{h} + \frac{1}{h_1} + \frac{h_0}{2} \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right)$$

Sustituyendo el valor de  $h_0$  por su equivalente:

$$P^* - P_0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( \frac{h - h_1}{hh_1} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \left( \frac{h_1^2 - h^2}{h^2 h_1^2} \right) \right)$$

Esta ecuación da la presión en un punto genérico situado entre dos planos ligeramente inclinados. Se puede expresar en forma más compacta como:

$$P^* - P_0 = 6\mu \frac{U}{\alpha} \frac{(h - h_1)(h - h_2)}{(h_1 + h_2)h^2}$$

Recordando la definición del flujo másico, este se puede dar como.

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \rho u h_0 = \rho u \frac{h_1 h_2}{h_2 + h_1}; \quad h_1 > h_0 > h_2$$

La fuerza de sustentación por unidad de profundidad se puede expresar:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} (P^* - P_0) dx = \frac{1}{\alpha} \int_{h_1}^{h_2} (P^* - P_0) dh; \text{ recuérdese que } \alpha = \frac{dh}{dx}$$

$$L = 6\mu \frac{U}{\alpha^2} \int_{h_1}^{h_2} \left[ \frac{(h - h_1)(h - h_2)}{(h_1 + h_2)h^2} \right] dh$$

Una vez realizada la integración, se obtiene:

$$L = 6\mu \frac{U}{\alpha^2} \left[ \frac{2(h_2 - h_1)}{(h_1 + h_2)} - \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right) \right]$$

Esta ecuación se puede parametrizar, si se utilizan como parámetros:

$$k = \frac{h_1}{h_2} > 1; \ell = x_2 - x_1 = \frac{1}{\alpha} (h_2 - h_1) \text{ se obtiene:}$$

$$L = \frac{6\mu U \ell^2}{(k - 1)^2 h_2^2} \left[ \ln k - \frac{2(k - 1)}{k + 1} \right]$$



Cabe recordar que  $(K-1)^2 = (1-K)^2$ .

La fuerza de arrastre por unidad de profundidad viene dada por:

$$D = \int_{x_1}^{x_2} \tau dx = \int_{x_1}^{x_2} \mu \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=h} dx = \int_{x_1}^{x_2} \mu \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{2\mu} \left( \frac{dP^*}{dx} \right) y(y-h) + U \frac{y}{h} \right)_{y=h} dx$$

Recordando que  $\alpha = \frac{dh}{dx}$

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{dh} \frac{dh}{dx} = \alpha \frac{dP^*}{dh}$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu}{\alpha} \left[ \frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dx} (2y-h) + \frac{U}{h} \right]_{y=h} dh = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu}{\alpha} \left( \frac{1}{2\mu} \frac{dP^*}{dh} \alpha h + \frac{U}{h} \right) dh$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \left( \frac{dP^*}{dh} \frac{h}{2} + \frac{\mu}{\alpha} \frac{U}{h} \right) dh$$

y que:

$$\frac{dP^*}{dh} = 6\mu \frac{U}{\alpha} \left( \frac{h-h_0}{h^3} \right)$$

queda:

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \left( h \frac{6\mu}{2} \frac{U}{\alpha} \frac{h-h_0}{h^3} + \frac{\mu}{\alpha} \frac{U}{h} \right) dh =$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu U}{\alpha} \left( 3 \frac{h-h_0}{h^2} + \frac{1}{h} \right) dh = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu U}{\alpha} \left( 3 \left( \frac{1}{h} - \frac{h_0}{h^2} \right) + \frac{1}{h} \right) dh$$

$$D = \int_{h_1}^{h_2} \frac{\mu U}{\alpha} \left( \frac{4}{h} - \frac{3h_0}{h^2} \right) dh = \frac{\mu U}{\alpha} \left[ 4 \ln \left( \frac{h_2}{h_1} \right) + 3h_0 \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) \right]$$

Parametrizando esta ecuación en función de:

$$k = \frac{h_1}{h_2} > 1 \quad ; \quad \ell = x_2 - x_1 = \frac{1}{\alpha} (h_2 - h_1)$$

y recordando que

$$\frac{h_0}{2} = \frac{h_1 h_2}{h_2 + h_1}$$

se obtiene:

$$D = \frac{2\mu U \ell}{(k-1)h_2} \left[ 2 \ln k - \frac{3(k-1)}{k+1} \right]$$



El empuje ascensorial para el patín estudiado se maximiza para  $\frac{dL}{dk} = 0$ , y se obtiene  $k = 2,2$ , lo cual corresponde a:

$$L = 0,4\mu UR^2; \quad D = 1,2\mu UR; \quad \frac{D}{L} = \frac{3}{R}; \quad R = \frac{2\ell}{h_1 + h_2};$$

Para estas condiciones, se considerará que el patín de Michel está optimizado.

### 8.8.2.2 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidimensional unidireccional. Coordenadas cartesianas

La ecuación que proporcionaba el flujo másico (por unidad de profundidad) en dirección  $x$ , para el caso de flujo entre dos placas planas ligeramente inclinadas, era:

$$\dot{m}_x = \rho U \frac{h_{(x)}}{2} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3$$

El flujo volumétrico por unidad de profundidad será:

$$\left[ \frac{m^3}{ms} \right] \quad \dot{V}_x = Q_x = U \frac{h_{(x)}}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3$$

La ecuación de continuidad se podría expresar como:

$$\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{el caudal no varía en dirección } x)$$

Diferenciando la ecuación del flujo volumétrico con respecto a la coordenada  $x$  se obtiene:

$$6U \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \right), \text{ siendo esta la ecuación de Reynolds para flujo unidireccional}$$

y régimen permanente.

### 8.8.2.3 Ecuación de lubricación de Reynolds para flujo bidireccional, tridimensional. Coordenadas cartesianas.

La ecuación de Navier-Stokes en dirección  $(z)$  tendría una forma similar a la dirección  $(x)$ .

En dirección  $x$ , Navier-Stokes daba lugar a:

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



De manera homóloga, en dirección  $z$ , Navier Stokes dará lugar a:

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$W$  es la velocidad de la placa móvil en dirección  $z$ .

De donde, operando del mismo modo que en dirección  $x$ , el flujo volumétrico en dirección  $z$ , será:

$$\dot{V}_z = Q_z = W \frac{h}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta z} \frac{1}{12\mu} h^3$$

Es importante señalar que la altura de la capa de líquido  $h$  puede depender de  $x$  y  $z$ .

Si solo existiese flujo en dirección  $z$ , cabría decir:

$$\frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} = 0 = 6W \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\Delta P^*}{\Delta z} \right)$$

cabe recordar que, para flujo completamente bidimensional, el caudal en forma vectorial toma la forma:

$$\vec{V} = \dot{V}_x \hat{i} + \dot{V}_z \hat{k}$$

La ecuación de continuidad en función del caudal en coordenadas cartesianas, régimen permanente, establece:

$$\frac{\partial \dot{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{V}_z}{\partial z} = 0 ;$$

de donde, sustituyendo, se obtiene:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( W \frac{h}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta z} \frac{1}{12\mu} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h^3 \right)$$

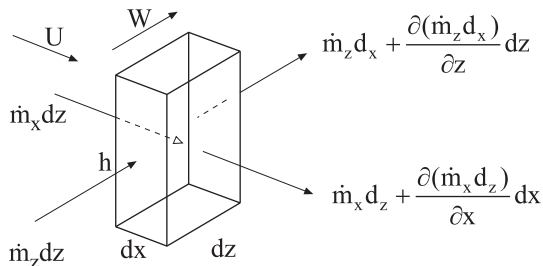
Recuérdese que  $h$  depende de “ $x$ ” y “ $z$ ”.

#### 8.8.2.4 La ecuación de lubricación de Reynolds en régimen transitorio, flujo bidimensional tridireccional, coordenadas cartesianas

Esta ecuación se obtiene al aplicar la ecuación de continuidad a un volumen de control de dimensiones  $dx \, dz \, h$  como el que se muestra en la figura T 8.15:



Fig. T 8.15  
Elemento  
diferencial de  
volumen situado  
entre dos placas



Los diferenciales de volumen y masa, se establecen:  $dV = dx dz h$  ;  $dm = \rho dx dz h$  ;

Sea  $\dot{m}_i$  el caudal másico en la dirección  $i$ ésima, para una altura  $h$  y por unidad de longitud.

La ecuación de continuidad establece:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{masa}_{\text{volumen de control}}) + \dot{m}_{\text{saliente}} - \dot{m}_{\text{entrante}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dz h) + \left[ \dot{m}_z dx + \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_z dx) dz \right] - \dot{m}_z dx + \left[ \dot{m}_x dz + \frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x dz) dx \right] - \dot{m}_x dz = 0$$

ecuación que se reduce a:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dz h) + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(\dot{m}_z dx) dz \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\dot{m}_x dz) dx \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dx dz h) + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(\rho Q_z dx) dz \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho Q_x dz) dx \right] = 0$$

Se ha de entender que  $dx$  y  $dz$  no dependen de la dirección  $x$  o  $z$ , ni tampoco del tiempo; así dividiendo por  $dx$  y  $dz$ , se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \left[ \frac{\partial}{\partial z}(\rho Q_z) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho Q_x) \right] = 0$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las ecuaciones del caudal volumétrico para cada dirección, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho W \frac{h}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta z} \frac{\rho}{12\mu} h^3 \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho U \frac{h}{2} - \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{\rho}{12\mu} h^3 \right) \right] = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho W \frac{h}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho U \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta z} \frac{\rho}{12\mu} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{\rho}{12\mu} h^3 \right)$$





Para fluido con densidad constante, se obtendrá:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h) + \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( W \frac{h}{2} \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( U \frac{h}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta z} \frac{1}{12\mu} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h^3 \right)$$

siendo esta la ecuación de Reynolds para flujo bidireccional, tridimensional y régimen transitorio. Cabe recordar que  $h$  depende de  $x$  y de  $z$ .

### 8.8.3 Flujos con aceleración despreciable. Cojinetes cilíndricos cargados estáticamente

En este apartado, únicamente se va a considerar el caso de cojinetes hidrostáticos de longitud infinita.

Las hipótesis de trabajo son:

- $\rho = \text{cte}$ ; fluido incompresible.

- $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0$ ; régimen permanente.

-los términos de aceleración local y convectiva son despreciables frente a los términos viscosos.

-A priori, se considerará flujo unidireccional, bidimensional, entre dos placas planas.

Sea el cojinete de la figura, del cual se pueden extraer las siguientes relaciones geométricas:

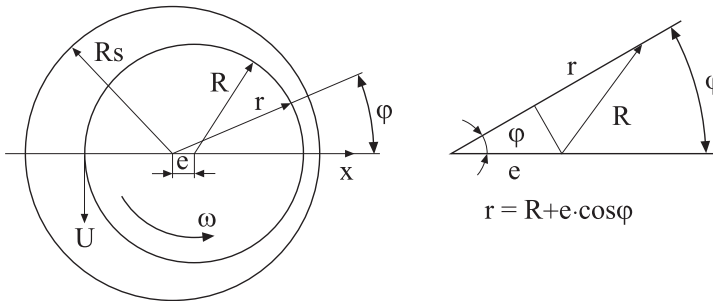


Fig. T 8.16  
Esquema de un  
cojinete cilíndrico  
de longitud infinita

El radio exterior puede ser dado por:

$$R_s = R + \bar{h} = R \left( 1 + \frac{\bar{h}}{R} \right); \quad \bar{h} = \text{distancia media entre eje y cojinete}$$

$$\text{Se puede decir que } \frac{\bar{h}}{R} = \frac{R_s - R}{R} = \psi$$



El radio genérico  $r$  respecto al centro de coordenadas se puede dar:

$$r = R + e \cos \varphi = R \left( 1 + \frac{e}{R} \cos \varphi \right)$$

siendo:

$e$  = excentricidad del cojinete.

La relación dada para  $r$  es mayormente cierta, cuando la excentricidad tiende a cero.

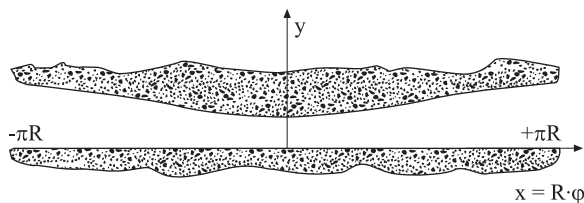
La distancia entre la carcasa y el eje del cojinete viene dada por:

$$h(\varphi) = R_s - r = R_s - R - e \cos \varphi = \bar{h} - e \cos \varphi = \bar{h} \left( 1 - \frac{e}{\bar{h}} \cos \varphi \right) = \bar{h} (1 - \varepsilon \cos \varphi)$$

donde:  $\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$

Si se abre el cojinete, se observa que el espacio  $h(\varphi)$  varía a lo largo del perímetro del eje, de la forma que se muestra en la figura. Véase que ahora el cojinete cilíndrico se puede tratar como una placa plana de altura variable.

Fig. T 8. 17  
Cojinete cilíndrico  
abierto



Véase que se puede establecer:  $dx = R d\varphi$

La ecuación que proporcionaba el caudal volumétrico en dirección del movimiento para el patín de Michel era:

$$\dot{V}_x = Q = \frac{1}{2} U h_{(x)} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3$$

Para el caso en estudio, esta ecuación se puede utilizar considerando que  $h_x = h_{(\varphi)}$ ;  $dx = R d\varphi$ ; así:

$$\frac{\dot{V}_x}{h_{(\varphi)}^3} = \frac{1}{2} \frac{R \omega}{h_{(\varphi)}^2} - \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} \frac{1}{12\mu R}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial \varphi} = \left( \frac{1}{2} \frac{R \omega}{h_{(\varphi)}^2} - \frac{\dot{V}_x}{h_{(\varphi)}^3} \right) 12\mu R$$



Integrando esta ecuación entre 0 y  $2\pi$ :

$$\int_{P^*=0}^{P^*=2\pi} dP^* = \int_0^{2\pi} \left( \frac{6R^2\omega\mu}{h_{(\varphi)}^2} - \frac{12\mu R\dot{\nabla}_X}{h_{(\varphi)}^3} \right) d\varphi; \text{ se observa que } P_{2\pi}^* = P_0^*$$

$$P_{2\pi}^* - P_0^* = 0 = \int_0^{2\pi} \left( \frac{6R^2\omega\mu}{h_{(\varphi)}^2} - \frac{12\mu R\dot{\nabla}_X}{h_{(\varphi)}^3} \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{R^2\omega\mu}{h_{(\varphi)}^2} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \frac{2\mu R\dot{\nabla}_X}{h_{(\varphi)}^3} \right) d\varphi$$

$$\dot{\nabla}_X = \int_0^{2\pi} \left( \frac{R^2\omega}{h_{(\varphi)}^2} \right) d\varphi \cdot \frac{1}{\int_0^{2\pi} \left( \frac{2R}{h_{(\varphi)}^3} \right) d\varphi}$$

Multiplicando y dividiendo por  $\bar{h}^3$ , se obtiene:

$$\dot{\nabla}_X = \frac{\omega R}{2} \bar{h} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^2 d\varphi \cdot \frac{1}{\int_0^{2\pi} \left( \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^3 d\varphi} \right]$$

Recordando que para el cojinete cilíndrico se establecieron las relaciones:

$$h_{(\varphi)} = \bar{h} (1 - \varepsilon \cos \varphi); \quad \varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$\frac{h_{(\varphi)}}{\bar{h}} = 1 - \varepsilon \cos \varphi$$

Las dos integrales que aparecen son:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \frac{\pi(2 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Y recordando que

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R}$$



se obtiene la ecuación del caudal volumétrico, la cual tomará la forma:

$$\dot{V}_x = \frac{1}{2} \omega R^2 \psi \frac{I_2}{I_3}$$

Puesto que ahora se conoce el flujo volumétrico circulante, se puede proceder a despejar el gradiente de presiones:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{U h_{(x)}}{2} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} h_{(x)}^3 \\ \frac{\partial P^*}{\partial x} &= \frac{\partial P^*}{R \partial \phi} = \left( \frac{U h_{(\phi)}}{2} - \dot{V}_x \right) \frac{12\mu}{h_{(\phi)}^3} = \left( \frac{U h_{(\phi)}}{2} - \frac{1}{2} \omega R^2 \psi \frac{I_2}{I_3} \right) \frac{12\mu}{h_{(\phi)}^3} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial P^*}{\partial \phi} &= \frac{6\mu \omega R}{h_{(\phi)}^2} \left( 1 - R \psi \frac{I_2}{I_3} \frac{1}{h_{(\phi)}} \right) \\ \frac{1}{R} \frac{\partial P^*}{\partial \phi} &= \frac{6\mu \omega R}{h_{(\phi)}^2} \left( 1 - \frac{\bar{h}}{h_{(\phi)}} \frac{I_2}{I_3} \right) \end{aligned}$$

Esta ecuación será posteriormente integrada para determinar cómo varía la presión del fluido en función del ángulo  $\phi$ . Pero, por el momento, se deja tal como esta.

La fuerza resultante en dirección  $x$  e  $y$  que el fluido ejerce sobre el eje central se puede dar:

$$\begin{aligned} F_x &= - \int_0^{2\pi} P^* \cos \phi R d\phi \\ F_y &= - \int_0^{2\pi} P^* \sin \phi R d\phi \end{aligned}$$

Obsérvese que se trata de una fuerza por unidad de profundidad del cojinete.

Integrando por partes la fuerza en dirección  $y$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} P^* &= u; & \sin \phi d\phi &= dV \\ du &= \frac{\partial P^*}{\partial \phi} d\phi; & V &= -\cos \phi; \\ F_y &= - \left[ u \cdot V - \int V du \right] R \\ F_y &= R P^* \cos \phi \Big|_0^{2\pi} - R \int_0^{2\pi} \frac{\partial P^*}{\partial \phi} \cos \phi d\phi \end{aligned}$$

El primer sumando del segundo término tiene, entre los límites de integración elegidos, un valor nulo, y sustituyendo la variación de presión con respecto al ángulo en el segundo de los sumandos, se obtiene:

$$F_y = -6 \frac{\mu \omega R^3}{h_{(\phi)}^2} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{\bar{h}}{h_{(\phi)}} \frac{I_2}{I_3} \right) \cos \phi d\phi$$



Multiplicando y dividiendo por  $\bar{h}^2$  se obtiene:

$$F_y = -\frac{6\mu\omega R}{\psi^2} \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^2 - \left( \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^3 \frac{I_2}{I_3} \right) \cos \varphi d\varphi; \text{ recuérdese que } \psi = \frac{\bar{h}}{R};$$

$F_Y$  está dada en  $\left[ \frac{N}{m} \right]$  (fuerza por unidad de longitud del cojinete).

Las integrales resultantes son de la forma:

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon}$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \cos \varphi (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon}$$

La integral  $I_1$  se define como:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$$

La ecuación de la fuerza se puede dar en forma adimensional, obteniendo:

$$S_0 = F_y \frac{\psi^2}{\mu \omega R} = 6 \frac{I_2 I_5 - I_3 I_4}{I_3}; \quad S_0 = \text{número de Sommerfeld}.$$

Véase que la fuerza en dirección vertical por unidad de profundidad se puede dar en forma adimensional mediante el número de Sommerfeld.

El esfuerzo de fricción en el eje de giro, debido a los esfuerzos cortantes, será:

$$\tau_{xy} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=h} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} y(y-h) + \frac{Uy}{h} \right) \Big|_{y=h}$$

$$\tau_{xy} = \mu U \left( \frac{1}{h} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{h}{2\mu U} \right)$$

Sustituyendo  $\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial P^*}{\partial \varphi}$  por su equivalente, se obtiene:

$$\tau_{xy} = \mu U \left( \frac{1}{h} + \frac{h 6 \mu \omega R}{2 \mu h^2 U} \left( 1 - \frac{\bar{h}}{h} \frac{I_2}{I_3} \right) \right); \text{ cabe recordar que } h_{(\varphi)} = h$$

$$\tau_{xy} = \left( \frac{\mu U}{h} 4 - 3 \mu U \frac{\bar{h}}{h^2} \frac{I_2}{I_3} \right) \frac{\bar{h}}{h}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu \omega}{\psi} \left( \frac{\bar{h}}{h} 4 - 3 \frac{\bar{h}^2}{h^2} \frac{I_2}{I_3} \right)$$



ecuación que representa los esfuerzos cortantes en cada elemento diferencial de superficie.

El par con respecto al eje de giro (por unidad de longitud) será:

$$T = \int_0^{2\pi} \tau_{xy} \cdot R \, d\phi \cdot l \cdot R$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \mu \omega}{\psi} \left( \frac{\bar{h}}{h} 4 - 3 \left( \frac{\bar{h}}{h} \right)^2 \frac{I_2}{I_3} \right) d\phi$$

$$T = \frac{R^2 \mu \omega}{\psi} \left( 4I_1 - 3 \frac{I_2^2}{I_3} \right)$$

De las ecuaciones del flujo volumétrico, el número de Sommerfeld y la ecuación del par, al sustituir los valores de las integrales  $I_i$ , se obtiene:

$$\dot{V}_x (\omega R^2 \psi)^{-1} = \frac{1 - \varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2};$$

$$S_0 = F_y \psi^2 (\mu \omega R)^{-1} = \frac{12\pi \varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2} (2 + \varepsilon^2)}$$

$$T \psi (\mu \omega R^2)^{-1} = \frac{4\pi (1 + 2\varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2} (2 + \varepsilon^2)}$$

De la ecuación del número de Sommerfeld, se deduce que, si el eje está poco cargado  $F_y \rightarrow 0$ , la excentricidad  $\varepsilon$  será pequeña  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por otro lado, la excentricidad  $\varepsilon$  será asimismo pequeña, cuando para una carga  $F_y$  dada, mayor sea la velocidad de giro  $\omega$ .

De la ecuación del par sobre el eje en forma adimensional, se observa que, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  el par vale:

$$T = 2\pi \mu \omega \frac{R^2}{\psi}$$

Esta expresión se denomina *expresión de Petroff*.

Se observa además que, cuanto menor sea la viscosidad del fluido  $\mu$  menor es la fuerza  $F_y$  y menor el par necesario  $T$ .

Para hallar la distribución de presiones a lo largo del cojinete cilíndrico, será necesario integrar la ecuación hallada previamente:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial P^*}{\partial \phi} = \frac{6\mu \omega R}{h_{(\phi)}^2} \left( 1 - \frac{\bar{h}}{h_{(\phi)}} \frac{I_2}{I_3} \right)$$



$$\frac{\partial P^*}{\partial \varphi} = 6\mu \omega R^2 \left( \frac{1}{h_{(\varphi)}^2} - \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}^3} \frac{I_2}{I_3} \right) \frac{\bar{h}^2}{h^2}$$

$$\int dP^* = \frac{6\mu \omega}{\psi^2} \int_0^\varphi \left[ \left( \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^2 - \left( \frac{\bar{h}}{h_{(\varphi)}} \right)^3 \frac{I_2}{I_3} \right] d\varphi$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{h_{(\varphi)}}{\bar{h}} = 1 - \varepsilon \cos \varphi$

$$\int dP^* = \frac{6\mu \omega}{\psi^2} \int_0^\varphi \left[ (1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 - (1 - \varepsilon \cos \varphi)^3 \frac{I_2}{I_3} \right] d\varphi$$

Véase que ahora se integra esta ecuación entre 0 y un ángulo genérico.

El resultado de la integral será:

$$P^* = C - 6 \frac{\mu \omega}{\psi^2} \varepsilon \frac{\sin \varphi (2 - \varepsilon \cos \varphi)}{(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2}$$

Para hallar la constante de integración, se necesita una condición de contorno. Esta podría ser que, para un ángulo determinado  $\varphi = \varphi_{(A)}$ , la presión sea la presión de alimentación del sistema.

La distribución de presiones en el interior del cojinete, y en función del ángulo genérico  $\varphi$ , se muestra en la figura siguiente. Obsérvese que existe una zona donde puede aparecer cavitación. Dicha zona puede ser reducida modificando la presión de alimentación del cojinete.

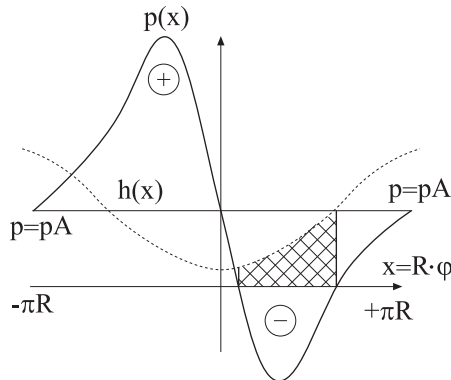


Fig. T 8. 18  
Distribución de  
presiones para un  
cojinete cilíndrico

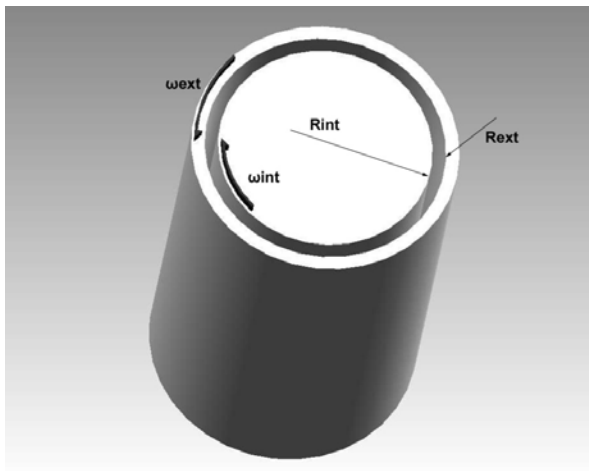


## Problema 41

### Enunciado

Sean dos cilindros concéntricos de longitud unitaria, con radios  $R_{\text{ext}}$  y  $R_{\text{int}}$ , respectivamente, separados por una película de aceite de viscosidad  $\mu$ . El cilindro interior gira a una velocidad angular  $\omega_{\text{int}}$  (sentido horario), mientras que el exterior gira a una velocidad angular  $\omega_{\text{ext}}$  (sentido antihorario).

Fig. 41.1



Halle las ecuaciones que definen:

1. La distribución de velocidades entre cilindros.
2. La distribución de presiones entre cilindros.
3. El par necesario en el cilindro exterior para que se produzca el giro.

### Resolución

Cálculos previos

Las condiciones de contorno que definen este problema son:

$$r = R_{\text{ext}} \Rightarrow V_{\theta} = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$$

$$r = R_{\text{int}} \Rightarrow V_{\theta} = \omega_{\text{int}} R_{\text{int}} (-1)$$

La ecuación de continuidad, en coordenadas cilíndricas, establece:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \times \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z) = 0$$





La ecuación de Navier-Stokes, en cilíndricas, se enuncia:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = \\ \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} - \frac{V_\theta V_r}{r} \right) = \\ \rho g_\theta - \frac{\partial P}{r \partial \theta} + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \\ \rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned}$$

Únicamente existe variación de velocidad  $V_\theta$  en dirección radial, con lo que se tiene:

La ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$\rho = \text{constante}$

La ecuación de Navier-Stokes:

La presión reducida variará únicamente en la dirección radial

$$\begin{aligned} -\rho \frac{V_\theta^2}{r} = \rho g_r - \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r} \\ 0 = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right) = 0 \end{aligned}$$

Se considera que no existen fuerzas másicas en la dirección  $z$ .

$$0 = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial P^*}{\partial z} = 0$$

No hay gradiente de presión reducida en la dirección  $z$ .

1. Así, se tiene que:

De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$P^* = \int \rho \frac{V_\theta^2}{r} dr$$



Será necesario conocer la distribución de velocidades en la dirección  $\theta$ , ya que esta dependerá de  $r$ .

De la segunda ecuación de Navier-Stokes:

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = C_1$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración

$$\frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) = r C_1$$

$$r V_\theta = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$$

$$V_\theta = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

Con las condiciones de contorno:

$$r = R_{\text{ext}} \Rightarrow V_\theta = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$$

$$r = R_{\text{int}} \Rightarrow V_\theta = \omega_{\text{int}} R_{\text{int}} (-1)$$

$$(1) \quad \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}} = C_1 \frac{R_{\text{ext}}}{2} + \frac{C_2}{R_{\text{ext}}}$$

$$(2) \quad -\omega_{\text{int}} R_{\text{int}} = C_1 \frac{R_{\text{int}}}{2} + \frac{C_2}{R_{\text{int}}}$$

$$C_2 = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - C_1 \frac{R_{\text{ext}}^2}{2} \Rightarrow -\omega_{\text{int}} R_{\text{int}} = C_1 \frac{R_{\text{int}}}{2} + \frac{1}{R_{\text{int}}} \left[ \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - C_1 \frac{R_{\text{ext}}^2}{2} \right]$$

$$-\omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - \omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 = C_1 \left( \frac{R_{\text{int}}^2}{2} - \frac{R_{\text{ext}}^2}{2} \right) \Rightarrow C_1 = \frac{2(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2}$$

$$C_2 = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - \frac{2(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \frac{R_{\text{ext}}^2}{2}$$

$$C_2 = \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{ext}}^2 \frac{(\omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2}$$



Entonces:

$$V_{\theta} = \frac{2 \left( \omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 \right)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \frac{r}{2} + \frac{1}{r} \left( \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{ext}}^2 \frac{\left( \omega_{\text{int}} R_{\text{int}}^2 + \omega_{\text{ext}} R_{\text{ext}}^2 \right)}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \right)$$

2. De la primera ecuación de Navier-Stokes:

$$P^* = \int \rho \frac{V_{\theta}^2}{r} dr$$

Introduciendo la ecuación de  $V_{\theta}$  en la integral, se tiene:

$$P^* = \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} \rho \frac{1}{r} \left( C_1^2 \frac{r^2}{4} + \frac{C_2^2}{r^2} + C_1 C_2 \right) dr$$

y se halla:

$$P^* = \rho \left( C_1^2 \frac{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2}{8} + \frac{C_2^2}{2} \frac{1}{R_{\text{int}}^2 - R_{\text{ext}}^2} + C_1 C_2 \ln \frac{R_{\text{ext}}}{R_{\text{int}}} \right)$$

3. Los esfuerzos cortantes en cilíndricas se pueden dar:

$$\tau_{r\theta} = r \mu \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta}}{r} \right) \right|_{r=R_{\text{ext}}}$$

puesto que

$$V_{\theta} = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}; \quad \frac{V_{\theta}}{r} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta}}{r} \right) = - \frac{2 C_2}{r^3}$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=R_{\text{ext}}} = - \frac{\mu C_2 2r}{r^3} \Big|_{r=R_{\text{ext}}} = \frac{-2\mu C_2}{R_{\text{ext}}^2}$$

El par por unidad de longitud que actúa sobre el cilindro exterior será:

$$M_{R_{\text{ext}}} = \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_{\text{ext}}} 2 \pi R_{\text{ext}} R_{\text{ext}}$$

así, queda:

$$M_{R_{\text{ext}}} = - \frac{2 \mu C_2}{R_{\text{ext}}^2} 2 \pi R_{\text{ext}}^2 = - 4 \pi \mu C_2$$

Obsérvese que, si se determinase el par por unidad de longitud del cilindro que actúa sobre el cilindro interior, el resultado sería el mismo.



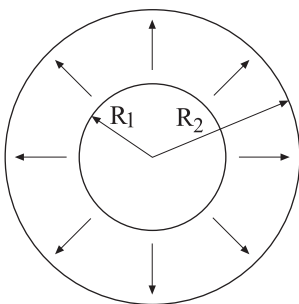
## Problema 42

### Enunciado

El dibujo que se encuentra a continuación muestra dos cilindros concéntricos de longitud genérica  $L$  y radios  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Un fluido de viscosidad  $\mu$  fluye radialmente desde el cilindro interno hacia el cilindro externo (se entiende que ambos cilindros son porosos y, por tanto, permiten el paso del fluido en dirección radial a través de sus paredes). El caudal circulante es  $Q$  y la presión reducida del fluido a la salida del cilindro interior es también conocida,  $P_{\text{Inlet } R_1}^*$ .

1. Se pide: Hallar, en función de los parámetros conocidos, la ecuación que determina la distribución de presiones del fluido entre los dos cilindros, considerando el flujo con viscosidad dominante y de densidad constante, régimen permanente.
2. Determinar la ecuación que caracteriza la variación de presión en función del radio para el caso de que el fluido se dirija radialmente desde el cilindro superior al cilindro inferior, considerando las mismas hipótesis que en el apartado anterior. La presión reducida conocida es ahora  $P_{\text{Inlet } R_2}^*$ , presión reducida del fluido a la salida del cilindro de radio mayor.

Fig. 42.1  
Dirección del flujo  
para el caso 1



### Resolución

1. Según las condiciones definidas para este problema, se puede establecer que, independientemente de la dirección del flujo, se cumplirá:

Régimen permanente:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$V_r \neq 0 \quad V_r = f(r)$$

$$V_\theta = 0$$



$$V_x = 0$$

De las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, y según las condiciones establecidas en el problema, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales que caracterizan el flujo objeto de estudio:

$$\rho V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) = -\frac{\partial P^*}{\partial r} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial P^*}{\partial \theta}$$

$$0 = -\frac{\partial P^*}{\partial x}$$

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas se enuncia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) = 0;$$

Para el caso en estudio, esta ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r) = 0; \quad \rho \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0; \quad \rho \left[ V_r + r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right] = 0; \quad \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{V_r}{r}$$

ecuación que indica la variación de velocidad en dirección radial.

Sustituyendo la ecuación de continuidad en la ecuación de Navier-Stokes en dirección radial, se obtiene:

$$-\rho \frac{V_r^2}{r} = -\frac{\partial P^*}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right)$$

La relación entre el caudal circulante y la velocidad del fluido para cada radio se establece:

$$V_r = \frac{Q}{\pi D L}; \quad y: \quad V_{R1} = \frac{Q}{\pi D_1 L}; \quad V_{R2} = \frac{Q}{\pi D_2 L}$$

L es la longitud de ambos cilindros.

Puesto que el caudal es el mismo en cada sección definida por un radio genérico, se tiene:

$$V_{r1} * D_1 = V_{r2} * D_2 = V_r * D; \quad D_1 \leq D \leq D_2$$



$$\text{de donde } V_r = \frac{V_{R1} * D_1}{D} = \frac{V_{R1} * R_1}{r} = \frac{V_{R2} * R_2}{r};$$

Sustituyendo en el primer término de la ecuación de Navier-Stokes, queda:

$$-\rho \frac{V_r^2}{r} = -\rho \frac{V_{R1}^2 * R_1^2}{r^3};$$

Por otro lado, el término de fuerzas viscosas de la ecuación de Navier-Stokes da lugar a:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) \right) = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (V_{R1} * R_1) \right) = 0$$

Véase que, si se elige utilizar el término de fuerzas viscosas en la forma:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right)$$

cada uno de los tres sumatorios da lugar a:

$$\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{V_{R1} * R_1}{r^2} \right) = \frac{V_{R1} * R_1 * 2r}{r^4} = \frac{2 * V_{R1} * R_1}{r^3}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{V_{R1} * R_1}{r^3}$$

$$-\frac{V_r}{r^2} = -\frac{V_{R1} * R_1}{r^3}$$

con lo que la suma de los tres términos da igual a cero.

Así, la ecuación de Navier-Stokes en dirección radial queda de la forma:

$$-\rho \frac{V_{R1}^2 * R_1^2}{r^3} = -\frac{dP^*}{dr}$$

Obsérvese que lo realizado hasta este punto sirve tanto para definir el comportamiento del fluido para el caso 1 (fluido que se dirige desde el cilindro de radio menor hacia el cilindro de radio mayor), como para el caso 2, donde el fluido se dirige desde el cilindro de radio mayor al cilindro de radio menor.

Integrando entre el radio del cilindro inferior y un radio genérico, se tiene:



$$\int_{R_1}^r \rho \frac{V_{R_1}^2 * R_1^2}{r^3} dr = \int_{P_{inlet R_1}^*}^{P^*} dP^*$$

$$P^* = P_{inlet R_2}^* + \rho \frac{V_{R_1}^2}{2} - \rho \frac{V_{R_1}^2 R_1^2}{2r^2}, \text{ siendo } R_1 \leq r \leq R_2$$

Obsérvese que, para  $r = R_1$ , la presión del fluido es la presión a la salida del cilindro menor  $P_{inlet}^*$  y, a medida que el radio ( $r$ ) va aumentando, la presión tiende a aumentar, cuando a priori parece que debería disminuir. Este aumento de presión es debido a que, a medida que el radio aumenta, la sección de paso del fluido también aumenta, y da lugar a una disminución de la energía cinética del fluido; y de acuerdo con el primer principio de la termodinámica, dicha disminución de la energía cinética asociada al fluido ha de conllevar un aumento de la presión del fluido.

2. Para el caso de que el fluido fluya radialmente desde el cilindro de radio mayor, donde la presión reducida es  $P_{inlet R_2}^*$ , hacia el cilindro de radio menor, se tiene:

$$\int_{R_2}^r \rho \frac{V_{R_1}^2 * R_1^2}{r^3} dr = \int_{P_{inlet R_2}^*}^{P^*} dP^*$$

La integración de esta ecuación dará lugar a:

$$P^* = P_{inlet R_2}^* + \rho \frac{V_{R_1}^2 R_1^2}{2} \left[ \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{r^2} \right], \text{ siendo } R_2 \geq r \geq R_1$$

Véase que, tal como indica esta ecuación, la presión a la salida del cilindro superior es  $P_{inlet R_2}^*$ , siendo esta la presión máxima. La presión del fluido entre los dos cilindros irá disminuyendo a medida que el valor del radio ( $r$ ) vaya disminuyendo, hasta llegar a obtener un valor mínimo para  $r = R_1$ .

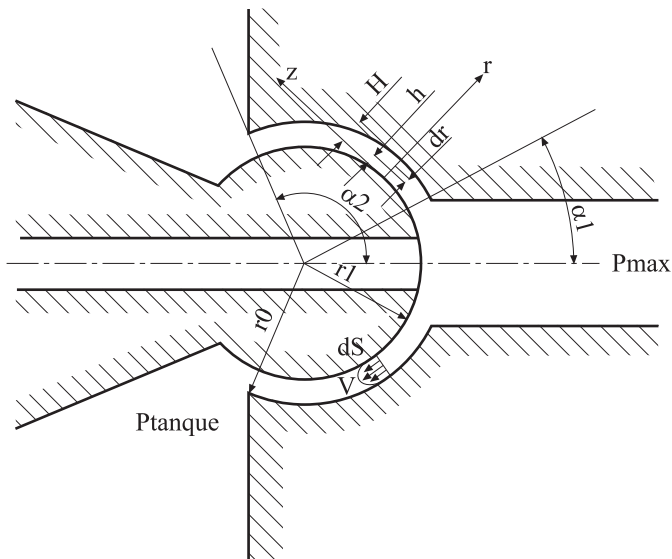
## Problema 43

### Enunciado

Dado el cojinete esférico de la figura 43.1, halle las ecuaciones que describen la distribución de presiones y el caudal a través del mismo. Realice de nuevo el problema partiendo de la ecuación generalizada de lubricación de Reynolds en coordenadas esféricas.



Fig. 43.1  
Esquema del  
cojinete esférico



## Resolución

$$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$$

El diferencial de área en el intersticio entre las dos esferas se puede dar como:

$$\int ds = \int_0^H 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

El caudal volumétrico entre las dos esferas es:

$$dQ = \int_0^H V 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

La ecuación de Poiseuille para flujo entre dos placas planas dice:

$$V = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \frac{r}{2} (H-r)$$

con lo que el caudal volumétrico queda:

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \frac{r}{2} (H-r) 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

La relación entre el diferencial de ángulo y el arco que forma es:

$$dz = \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) d\alpha$$





de donde:

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha \left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \frac{r}{2} (H-r) 2\pi (r_1 + r) \sin\alpha \, dr$$

$$dQ = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha \left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} r \pi \sin\alpha \left[ H r_1 + H r - r_1 r - r^2 \right] dr$$

Una vez realizada la integración, queda:

$$Q = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha} \frac{1}{\left(r_1 + \frac{H}{2}\right)} \pi \sin\alpha \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]$$

La distribución de presiones a lo largo del intersticio es:

$$dP = -Q \mu \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) \frac{1}{\pi \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right] \sin\alpha} d\alpha$$

con lo que:

$$\int_{P_{\max}}^{P_{\text{tank}}} dP = -Q \mu \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) \frac{1}{\pi \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\sin\alpha}$$

después de la integración se obtiene:

$$P_{\max} - P_{\text{tank}} = Q \mu \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) \frac{1}{\pi \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]} \ln \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]$$

por lo que el caudal que fluye entre las dos esferas será:

$$Q = \frac{(P_{\max} - P_{\text{tank}}) \pi \left(r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12}\right)}{\mu \left(r_1 + \frac{H}{2}\right) \ln \left[ \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}$$



La presión en un punto genérico localizado a un ángulo  $\alpha$  se obtiene:

$$Q = \frac{(P_{\text{máx}} - P) \pi \left( r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right)}{\mu \left( r_1 + \frac{H}{2} \right) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}$$

de donde:

$$P = P_{\text{máx}} - \frac{Q \mu \left( r_1 + \frac{H}{2} \right) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}{\pi \left( r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right)}$$

Sustituyendo el valor del caudal en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P = P_{\text{máx}} - \frac{(P_{\text{máx}} - P_{\text{tank}}) \ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}{\ln \left[ \frac{\text{tg} \frac{\alpha_2}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right]}$$

ecuación que determina la presión entre dos esferas separadas por una distancia muy pequeña y para un ángulo genérico  $\alpha$ .

2. Resolución partiendo de la ecuación generalizada de lubricación de Reynolds en coordenadas esféricas.

Dicha ecuación fue hallada por Donna Meyer y publicada en el *Journal of Tribology* - ASME el 2003.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h^3 \sin \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \phi} \right) = \\ & = 6R^2 \mu \left[ \omega \cos \beta \sin \phi \frac{\partial h}{\partial \alpha} + \left( \omega \sin \beta + \omega \cos \beta \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \phi \right) \frac{\partial h}{\partial \phi} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

Los parámetros definidos en esta ecuación se detallan en la figura 43.2.



Puesto que para el caso en estudio se cumple que:

$$\omega = 0 \quad ; \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} = 0 ; \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 ; \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 ;$$

La ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h^3 \sin \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) = 0$$

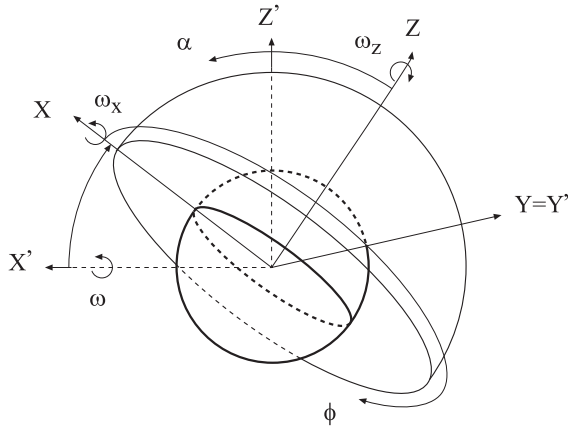


Fig. 43.2  
Parámetros  
definidos en la  
ecuación de  
lubricación de  
Reynolds

La integración de la ecuación diferencial resultante da lugar a:

$$h^3 \sin \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} = C_1 ;$$

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{C_1}{h^3 \sin \alpha} ;$$

$$\int dp = \frac{C_1}{h^3} \int \frac{1}{\sin \alpha} d\alpha ;$$

$$p = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right) + C_2 ;$$

Condiciones de contorno:

$$\alpha = \alpha_1 ; \quad p = p_{\text{máx}}$$

$$\alpha = \alpha_2 ; \quad p = p_{\text{tan que}}$$

$$p_{\text{máx}} = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \tan \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right) + C_2 ;$$

$$p_{\text{tan que}} = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \tan \left( \frac{\alpha_2}{2} \right) \right) + C_2 ;$$



Y se obtiene:

$$p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}} = \frac{C_1}{h^3} \ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right);$$

$$C_1 = (p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}}) h^3 \frac{1}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)};$$

$$C_2 = p_{\text{máx}} - \frac{1}{h^3} \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right) \cdot \left[ (p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}}) h^3 \frac{1}{\ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right) - \ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right) \right)} \right];$$

$$C_2 = p_{\text{máx}} - (p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}}) \frac{\ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right) \right)}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)};$$

Sustituyendo en la ecuación de distribución de presiones, se obtiene:

$$p = p_{\text{máx}} - (p_{\text{máx}} - p_{\text{tan que}}) \frac{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right)}{\ln \left( \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right)};$$

Obsérvese que se ha obtenido la misma ecuación de distribución de presiones que en el apartado anterior.

La determinación del caudal circulante entre las dos esferas se realiza del mismo modo que en el apartado precedente, con la salvedad de que, al llegar a la ecuación:

$$Q = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\alpha} \frac{1}{\left( r_1 + \frac{H}{2} \right)} \pi \sin \alpha \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right]$$



ahora la variación de angular de presión se puede dar como:  $\frac{dp}{d\alpha} = \frac{C_1}{h^3 \sin \alpha}$  y puesto que la constante  $C_1$  es conocida, se tiene:

$$\frac{dp}{d\alpha} = \frac{(p_{\text{máx}} - p_{\text{tanque}})}{\sin \alpha} \frac{1}{\ln \left( \frac{\text{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)}{\text{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)} \right)}$$

con lo que, sustituyendo en la ecuación del caudal, se obtiene:

$$Q = \frac{1}{\mu} \frac{\pi}{\left( r_1 + \frac{H}{2} \right)} \left[ r_1 \frac{H^3}{6} + \frac{H^4}{12} \right] \frac{(p_{\text{máx}} - p_{\text{tanque}})}{\ln \left( \frac{\text{tg} \left( \frac{\alpha_2}{2} \right)}{\text{tg} \left( \frac{\alpha_1}{2} \right)} \right)}$$

Véase que esta ecuación coincide con la que se ha hallado en el apartado anterior.

## Problema 44

### Enunciado

El esquema de la figura representa un depósito cerrado y presurizado a 100 bar, en el interior del cual existe un fluido de densidad  $\rho$ . La salida de fluido del depósito se efectúa a través de un plato de sección circular y de radio exterior  $r_e$ ; la distancia entre el plato y la base ( $d$ ) se considerará muy pequeña comparada con el radio del plato, de tal manera que el fluido se podrá considerar que fluye únicamente en dirección radial y en régimen laminar.

Sabiendo que la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, flujo unidireccional, se enuncia como:  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r d^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0$ ; siendo la ecuación que determina

el caudal que fluye entre los platos:  $Q = -\frac{\pi r d^3}{6 \mu} \frac{dp}{dr}$

Determine:

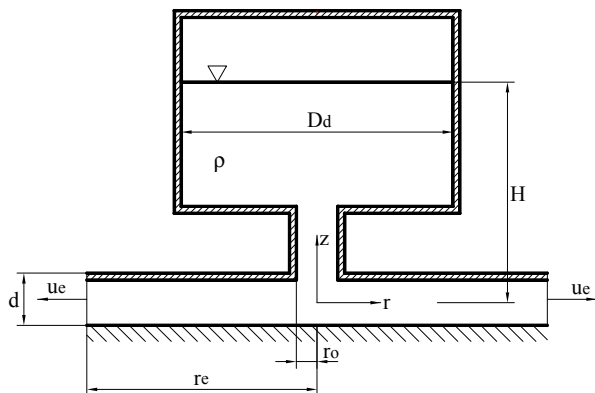
1. El caudal que fluye entre los platos y la distribución de presiones en dirección radial. Considere que la altura  $H$  se mantiene prácticamente constante.



2. Si la distancia entre los platos (d) aumentase notoriamente, de tal forma que el flujo no pudiese ser considerado laminar, ¿cuál sería la ecuación que define el caudal que fluye? ¿Cuál sería en este caso, la distribución de presiones en función del radio? Considere que el depósito está abierto a la atmósfera y que la altura H no se mantiene constante.

Datos: H, d,  $r_0$ ,  $r_e$ ,  $\rho$ , g,  $P_{\text{depósito}}$ ,  $D_d$ .

Fig. 44.1



### Resolución

1. Partiendo de la ecuación de lubricación de Reynolds para el caso en estudio, se establece:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r d^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 ; \quad \left( \frac{r d^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = C_1 ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = C_1 \frac{\mu}{r d^3} ;$$

$$P = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r + C_2 ;$$

Por otro lado, el flujo circulante entre las dos placas circulares se define:

$$Q = -\frac{\pi r d^3}{6 \mu} \frac{dp}{dr} ; \quad Q = -\frac{\pi}{6} C_1 ;$$

Las constantes de integración se determinan mediante las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} r = r_e & ; P = 0 \\ r = r_0 & ; P = P_{\text{inlet}} = 100 \cdot 10^5 + \rho \cdot g \cdot H \end{cases}$$



$$0 = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_e + C_2 ;$$

$$P_{\text{inlet}} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_o + C_2 ;$$

$$P_{\text{inlet}} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_o - C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln r_e ;$$

$$P_{\text{inlet}} = C_1 \frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)$$

$$C_1 = \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)}$$

$$0 = \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)} \frac{\mu}{d^3} \ln r_e + C_2 ;$$

$$C_2 = - \frac{P_{\text{inlet}} \ln r_e}{\ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)}$$

La ecuación que determina la distribución de presiones entre las dos placas en función del radio queda:

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_o}{r_e} \right)} \frac{\mu}{d^3} \ln r - \frac{P_{\text{inlet}} \ln r_e}{\ln \frac{r_o}{r_e}} ;$$

Agrupando términos, se obtiene:

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\ln \frac{r_o}{r_e}} [\ln r - \ln r_e] ;$$

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\ln \frac{r_e}{r_o}} [\ln r_e - \ln r]$$

$$P = \frac{P_{\text{inlet}}}{\ln \frac{r_e}{r_o}} \ln \left[ \frac{r_e}{r} \right]$$

El caudal circulante viene dado por:

$$Q = -\frac{\pi}{6} C_1 ;$$

$$Q = \frac{\pi}{6} \frac{P_{\text{inlet}}}{\frac{\mu}{d^3} \ln \left( \frac{r_e}{r_o} \right)}$$



2. Aplicando la ecuación de continuidad entre la superficie del líquido y la salida de la placa:

$$\pi \cdot r_d^2 \cdot u_d = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot u_e; \quad \frac{u_d}{u_e} = \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2}$$

Aplicando Bernoulli entre la superficie libre del depósito y la sección de salida:

$$P_d + \rho \cdot g \cdot z_d + \frac{\rho}{2} u_d^2 = P_e + \rho \cdot g \cdot z_e + \frac{\rho}{2} u_e^2;$$

$$z_d - z_e = H$$

$$2 \cdot g \cdot H = u_e^2 - u_d^2 = u_e^2 \left( 1 - \left( \frac{u_d}{u_e} \right)^2 \right);$$

$$u_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{u_d}{u_e} \right)^2}}$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$u_e = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2}}$$

El caudal circulante viene definido por:

$$Q = u_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d$$

de donde:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2}}$$

Para hallar la distribución de presiones, se aplica Bernoulli entre un radio genérico  $r$  y la salida de la placa.

$$\frac{P_r}{\rho} + \frac{u_r^2}{2} + g z_r = \frac{P_e}{\rho} + \frac{u_e^2}{2} + g z_e$$

y se obtiene:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} (u_r^2 - u_e^2)$$





La ecuación de continuidad entre estos dos puntos establece:

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot d \cdot u_r = 2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot d \cdot u_e ;$$

$$u_r = u_e \frac{r_e}{r} ;$$

de donde, sustituyendo en la ecuación para la distribución de presiones:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \left( u_e^2 \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - u_e^2 \right) ;$$

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \cdot u_e^2 \left( \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right)$$

Sustituyendo la velocidad a la salida de las placas:

$$P_e - P_r = \frac{\rho}{2} \left( \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right) \cdot \frac{2 \cdot g \cdot H}{1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2} ;$$

$$P_e - P_r = \rho \cdot g \cdot H \cdot \frac{\left( \left( \frac{r_e}{r} \right)^2 - 1 \right)}{\left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot d \cdot r_e}{r_d^2} \right)^2 \right]}$$

Ecuación que determina la distribución de presiones en función del radio y para flujo turbulento.

## Problema 45

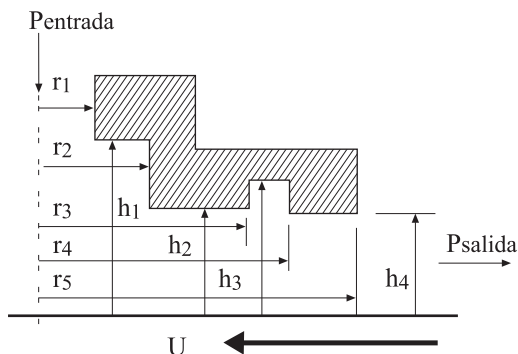
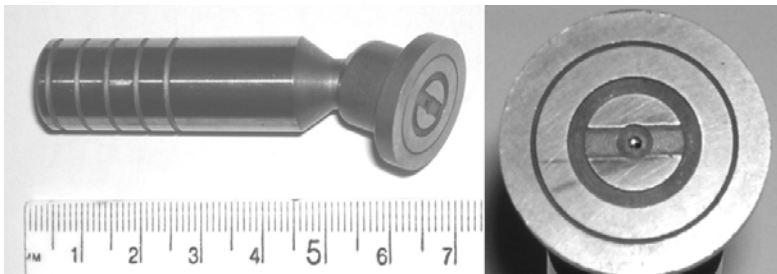
### Enunciado

La figura 45.1 muestra un patín deslizante, formado por una placa de sección circular situada en la parte inferior de uno de los nueve pistones que forman parte de una bomba de pistones axiales. Una de las características de este patín deslizante es que tiene tallada una ranura en su sección de deslizamiento.

Se pide: Determinar la ecuación que caracteriza el caudal de fugas entre el patín y la placa de deslizamiento, denominada *plato inclinado*, sabiendo que la distancia entre ambos oscila, por lo general, en torno a las 10 micras y en consecuencia, el régimen del fluido se considera laminar. Determinar asimismo la distribución de presiones en dirección radial y la fuerza resultante que el fluido ejerce sobre el patín.



Fig. 45.1  
Conjunto pistón /  
patín deslizante y  
las dimensiones del  
patín. Cortesía de  
Oilgear Towler



Considerar que el fluido entra axialmente por el agujero central del patín y se distribuye, en todo momento, en dirección radial. Como primera aproximación, suponer que el sistema es estático y el patín está paralelo a la placa base.

Se pide, asimismo, extender las ecuaciones halladas para considerar un número de ranuras genérico y de cualquier dimensión.

## Resolución

Las hipótesis de partida para la resolución de este problema son:

- El flujo se considera laminar e incompresible.
- Se considera como primera aproximación, el patín deslizante estático y paralelo a la placa de deslizamiento, plato inclinado.
- El movimiento del fluido será, en todo punto, en dirección radial.
- El patín deslizante es suficientemente rígido como para no permitir flexiones del mismo.

A partir de estas consideraciones, se puede aplicar la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, la cual toma la forma siguiente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \left( U \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{U \sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)$$



En esta ecuación, la posición angular del patín deslizante se define por la letra  $\theta$ , cuyo valor oscilará entre 0 y 360 grados. Los términos que consideran la inclinación del patín vienen determinados por  $\frac{\partial h}{\partial r}$  y  $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ .

Considerando la viscosidad del fluido constante, el patín sin desplazamiento y situado paralelo a la placa de deslizamiento, la ecuación anterior queda

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

Integrando esta ecuación, se obtiene

$$P = \frac{C_1 \mu}{h^3} \ln r + C_2 \quad (2)$$

$C_1$  y  $C_2$  son constantes que han de ser halladas mediante condiciones de contorno.

Por otro lado, la distribución del perfil de velocidades para un fluido laminar que fluye entre dos platos planos cilíndricos, y en función de la distribución de presiones entre el radio interior y exterior de dichos platos, se enuncia del modo siguiente:

$$u = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (h - y)$$

El caudal volumétrico que fluye entre estos dos platos será

$$Q = \int_0^h u \, 2\pi r \, dy = -\frac{\pi r}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{h^3}{6}$$

Sustituyendo la primera derivada de la ecuación diferencial (1) en la ecuación anterior, se obtiene

$$Q = -\pi \frac{C_1}{6} \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) proporcionan la distribución de presiones y el caudal entre dos platos cilíndricos.

Para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , se utilizarán las siguientes condiciones de contorno:

$$r = r_i; \quad p = p_i$$

$$r = r_j; \quad p = p_j.$$

Las ecuaciones (2) y (3) pueden ser aplicadas a cualquier número de placas planas cilíndricas consecutivas, entendiéndose que el fluido se mantiene, en todo punto, laminar. Debe asimismo tenerse en cuenta que, cada vez que se apliquen dichas ecuaciones entre dos placas, aparecerán dos nuevas constantes de integración.



Así, aplicando las ecuaciones para el patín deslizante de la figura 45.1, el cual está formado por cuatro superficies que se consideran paralelas a la placa de deslizamiento, se puede establecer el colectivo de ecuaciones siguiente:

Parte central del patín deslizante

$$p_1 = C_1 \frac{\mu}{h_0^3} \ln r + C_2 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_1 < r < r_2 \quad (4)$$

$$Q_1 = -\frac{\pi C_1}{6} \quad (5)$$

Primera placa

$$p_2 = C_3 \frac{\mu}{h_1^3} \ln r + C_4 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_2 < r < r_3 \quad (6)$$

$$Q_2 = -\frac{\pi C_3}{6} \quad (7)$$

Ranura

$$p_3 = C_5 \frac{\mu}{h_2^3} \ln r + C_6 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_3 < r < r_4 \quad (8)$$

$$Q_3 = -\frac{\pi C_5}{6} \quad (9)$$

Segunda placa

$$p_4 = C_7 \frac{\mu}{h_3^3} \ln r + C_8 \quad \text{Campo de aplicación} \quad r_4 < r < r_5 \quad (10)$$

$$Q_4 = -\frac{\pi C_7}{6} \quad (11)$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes de integración son:

$$r = r_1 \quad p_1 = p_{\text{entrada}}$$

$$r = r_2 \quad p_1 = p_2 \quad Q_1 = Q_2$$

$$r = r_3 \quad p_2 = p_3 \quad Q_2 = Q_3$$

$$r = r_4 \quad p_3 = p_4 \quad Q_3 = Q_4$$

$$r = r_5 \quad p_4 = p_{\text{salida.}}$$



Una vez determinadas las constantes  $C_1 \dots C_8$ , y sustituidas en las ecuaciones pertinentes, se obtienen las ecuaciones de la distribución de presiones, cuatro en total, una para cada placa plana cilíndrica, así como la ecuación que determina el flujo volumétrico entre placas.

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_1 < r < r_2$  viene dada por la ecuación:

$$p_1 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)} \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_2 < r < r_3$  viene dada por la ecuación:

$$p_2 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)} \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) \right]$$

La distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_3 < r < r_4$  viene dada por la ecuación:

$$p_3 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}}) \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r}{r_3}\right) \right]}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

Y, por último, la distribución de presiones para la placa situada entre los radios  $r_4 < r < r_5$  viene dada por la ecuación:

$$p_4 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}}) \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r}{r_4}\right) \right]}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

La ecuación del caudal volumétrico que fluye entre las placas paralelas en función del gradiente de presión entre extremos de las mismas es:

$$Q = \frac{\pi}{6\mu} \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$



Una vez halladas las distribuciones de presión entre extremos de cada placa plana cilíndrica, se puede determinar fácilmente la fuerza que el fluido ejerce sobre el patín deslizante. Dicha fuerza viene dada por la ecuación:

$$F_{\text{sustentacion}} = \int_{r_1}^{r_2} P_1(r) 2\pi r dr + \int_{r_2}^{r_3} P_2(r) 2\pi r dr + \int_{r_3}^{r_4} P_3(r) 2\pi r dr + \int_{r_4}^{r_5} P_4(r) 2\pi r dr$$

donde las presiones  $P_1(r)$ ,  $P_2(r)$ ,  $P_3(r)$  y  $P_4(r)$  vienen dadas por las ecuaciones que caracterizan la distribución de presión en cada una de las placas planas en estudio. Así, realizando la sustitución e integración para cada conjunto de placas, se obtiene

$$\begin{aligned} F_{\text{sustentación}} &= P_{\text{entrada}} \pi (r_5^2 - r_1^2) \\ &- C\pi r_5^2 \cdot \left( \frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right) \right) \\ &+ C\pi \left( \frac{1}{h_1^3} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + \frac{1}{h_2^3} \frac{r_3^2 - r_2^2}{2} + \frac{1}{h_3^3} \frac{r_4^2 - r_3^2}{2} + \frac{1}{h_4^3} \frac{r_5^2 - r_4^2}{2} \right) \end{aligned}$$

donde la constante  $C$  toma la forma

$$C = \frac{P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}}{\frac{1}{h_1^3} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{h_2^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) + \frac{1}{h_3^3} \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) + \frac{1}{h_4^3} \ln\left(\frac{r_5}{r_4}\right)}$$

Las ecuaciones acabadas de determinar han sido definidas para el caso en estudio, es decir, un patín deslizante de sección circular y con una ranura tallada en su cara de deslizamiento. Para este caso, el número de placas planas circulares (anillos considerados) ha sido de 4,  $n = 4$ . No obstante, estas ecuaciones se pueden ampliar para un caso genérico, es decir, un patín deslizante de sección circular con diversas ranuras talladas en su superficie de deslizamiento.

Así, las ecuaciones genéricas que determinan la distribución de presiones, el caudal circulante y la fuerza que el fluido ejerce sobre el patín tomarán la forma:

Véase que las ecuaciones que se encuentran a continuación están definidas en función de un parámetro  $\{n\}$ , que indica el número total de anillos circulares (placas) considerado. Obsérvese que, para el caso en estudio,  $n = 4$ .

La ecuación genérica para el caudal es

$$Q = \frac{\pi (p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{6\mu \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

La ecuación genérica que caracteriza la distribución de presiones en cada una de las placas circulares paralelas genéricas  $\{n\}$  toma la forma:



Para la sección de menor radio del patín, bolsillo central:  $r_1 < r < r_2$ .

$$p_1 = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} \left[ \frac{1}{h_1^3} \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) \right]$$

Para el resto de las caras:  $2 < j < n$

$$p_j = p_{\text{entrada}} - \frac{(p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}})}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)} \left[ \frac{1}{h_j^3} \ln \left( \frac{r}{r_j} \right) + \sum_{k=1}^{k=j-1} \frac{1}{h_k^3} \ln \left( \frac{r_{k+1}}{r_k} \right) \right]$$

La ecuación genérica que determina la fuerza sobre el patín deslizante para un número genérico de ranuras talladas en la cara de deslizamiento del patín es

$$F_{\text{lift}} = p_{\text{entrada}} \pi (r_{(n+1)}^2 - r_1^2) - C \pi r_{(n+1)}^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right) + C \pi \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2}$$

donde

$$C = \frac{p_{\text{entrada}} - p_{\text{salida}}}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{h_i^3} \ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)}$$

Algunos de los resultados que se pueden obtener de las ecuaciones acabadas de hallar se muestran en las gráficas siguientes.

La gráfica 45.2 muestra el valor del caudal de fugas para diferentes gradientes de presiones y distancias entre el patín y la placa base. La 45.3 muestra la distribución de presiones en dirección radial. Y la 45.4 indica cómo varía el caudal de fugas y la fuerza resultante sobre el patín cuando los radios interior y exterior de la ranura tallada en la cara de deslizamiento del mismo se desplazan en dirección radial. Obsérvese el enorme efecto que las dimensiones de la ranura tienen sobre la fuerza actuante sobre el patín.

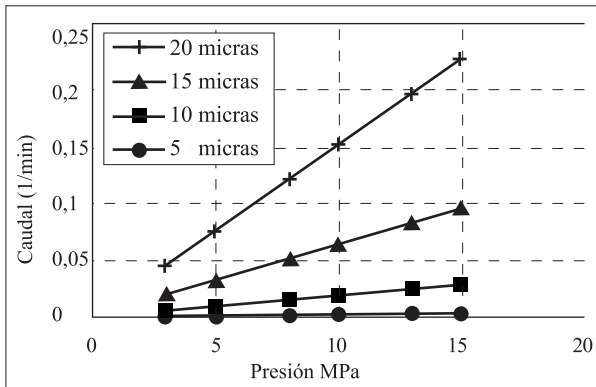


Fig. 45.2  
Caudal de fugas  
en función de la  
presión diferencial  
y la distancia  
entre el patín y la  
placa base.  
Escala 2:1



Fig. 45.3  
Distribución de  
presión en  
dirección radial y  
en función del  
gradiente de  
presiones entre  
extremos del patín.  
Escala 2:1

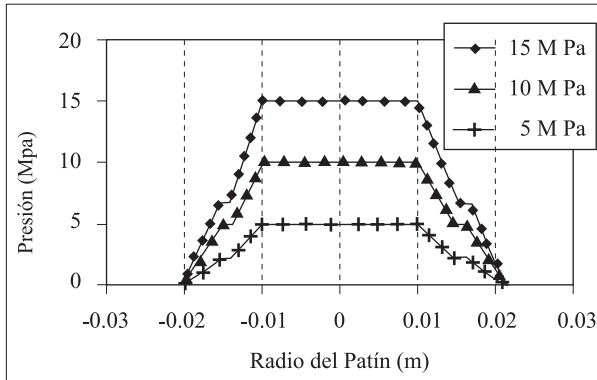
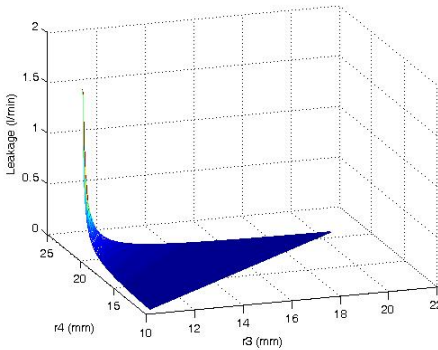
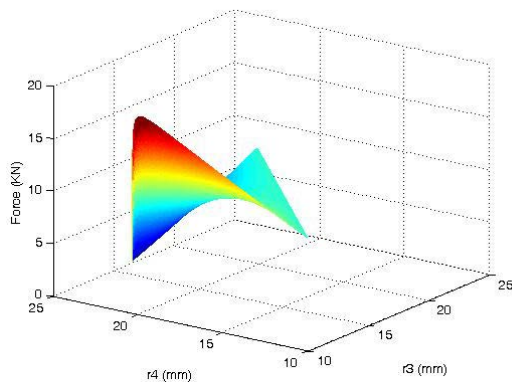


Fig. 45.4  
Fuerza y caudal de  
fugas para el patín  
deslizante original  
(escala 2:1) cuando  
se modifican las  
dimensiones de la  
ranura,  $r_3$  y  $r_4$ . La  
profundidad de la  
ranura se mantiene  
constante  
a 0,8 mm.  
 $h_2 = h_4 = 10$  micras.  
Presión de  
alimentación:  
15 MPa. a) fuerza;  
b) caudal



## Problema 46

### Enunciado

Sea el patín deslizante estudiado en el problema 45 y definido en la figura 46.1. Determine la distribución de presiones entre el patín y la placa base (plato inclinado), así como el caudal de fugas, para el caso en que el patín tenga una inclinación pequeña respecto a dicha placa base. Considere el fluido como incompresible, régimen laminar,





flujo en dirección radial. Asimismo, considere como primera aproximación que no existe movimiento relativo entre el patín y la placa de deslizamiento. Generalice las ecuaciones para un patín con un número de ranuras cualquiera.

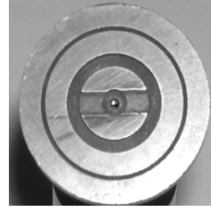
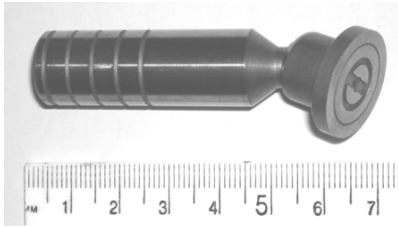
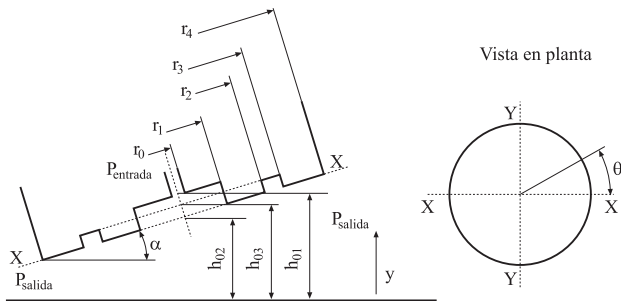


Fig. 46.1  
Conjunto pistón /  
patín deslizante y  
las dimensiones del  
patín. Cortesía de  
Oilgear Towler



## Resolución

Las hipótesis de partida para realizar el análisis matemático del patín inclinado son:

- El flujo se considerara laminar.
- El patín deslizante está ligeramente inclinado respecto a la placa base (plato inclinado).
- El análisis se efectuará en condiciones estáticas, aunque se permite la rotación del patín sobre su propio eje central (*spin*).
- El flujo se considera en dirección radial.
- Todas las caras del patín deslizante son planas; no tienen curvatura alguna.
- El único movimiento relativo entre el patín y el plato inclinado es el (*spin*).

De la aplicación de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la velocidad angular del patín (*spin*) respecto a su eje central.

El espesor de la película de fluido en función del radio y del ángulo de posición del patín  $\theta$  se determina del modo siguiente (v. figura 46.1):

$$h = h_0 + \alpha r_m \cos \theta \quad (2)$$



Obsérvese que se utiliza el radio medio  $r_m$  de la placa circular genérica en estudio.

La variación del espesor de la película de fluido en función de la posición angular del patín se enuncia:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\alpha r_m \sin \theta \quad (3)$$

La primera integración de la ecuación diferencial (1) da lugar a

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{-3\mu \omega \alpha r_m \sin \theta r}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} + \frac{k_1}{r (h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \quad (4)$$

De la segunda integración, se obtiene

$$p = \frac{-3\mu \omega \alpha r_m \sin \theta r^2}{2 (h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} + \frac{k_1}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \ln(r) + k_2 \quad (5)$$

Por otro lado, el caudal que fluye entre el patín deslizante y la placa base (plato inclinado), se define como

$$Q_{\text{fugas}} = \int_0^{2\pi} \int_0^h u r dy d\theta \quad (6)$$

Asumiendo una distribución de velocidades de Poiseuille, la distribución de velocidades en función del gradiente de presión y de la altura genérica  $h$  se define

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y - h) \quad (7)$$

con lo que:

$$Q_{\text{fugas}} = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y - h) r dy d\theta \quad (8)$$

Sustituyendo en la ecuación 8 la distribución de presiones en función del radio, (ecuación 4), e integrando a lo largo de la altura de la película de líquido, se tiene

$$Q_{\text{fugas}} = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{1}{12\mu} \left[ -3\mu \omega \alpha r_m \sin \theta r^2 + k_1 \right] \right] d\theta \quad (9)$$

Es necesario recordar, en este punto, que una segunda integración no se puede llevar a término, puesto que la constante  $k_1$  puede depender de la posición angular  $\theta$ . En cualquier caso, para un patín deslizante compuesto de varias superficies planas paralelas, se pueden aplicar las ecuaciones 5 y 9 a cada una de las superficies.



Para el caso en estudio, donde el patín posee cuatro superficies paralelas, se establece:

Parte central del patín:  $r_0 < r < r_1$

$$p_1 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m1} \sin\theta r^2}{2(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{k_1}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_2 \quad (10)$$

$$Q_{caudal1} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m1} \sin\theta r^2 + k_1] d\theta \quad (11)$$

$$r_{m1} = \frac{r_1 + r_0}{2} \quad (12)$$

Primera placa:  $r_1 < r < r_2$

$$p_2 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m2} \sin\theta r^2}{2(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{k_3}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_4 \quad (13)$$

$$Q_{caudal2} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m2} \sin\theta r^2 + k_3] d\theta \quad (14)$$

$$r_{m2} = \frac{r_2 + r_1}{2} \quad (15)$$

Ranura:  $r_2 < r < r_3$

$$p_3 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m3} \sin\theta r^2}{2(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{k_5}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_6 \quad (16)$$

$$Q_{caudal3} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m3} \sin\theta r^2 + k_5] d\theta \quad (17)$$

$$r_{m3} = \frac{r_3 + r_2}{2} \quad (18)$$

Segunda placa:  $r_3 < r < r_4$

$$p_4 = \frac{-3\mu\omega\alpha r_{m4} \sin\theta r^2}{2(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} + \frac{k_7}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \ln(r) + k_8 \quad (19)$$

$$Q_{caudal4} = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{12\mu} [-3\mu\omega\alpha r_{m4} \sin\theta r^2 + k_7] d\theta \quad (20)$$

$$r_{m4} = \frac{r_4 + r_3}{2} \quad (21)$$



Las condiciones de contorno necesarias para determinar las constantes de integración se definen:

$$r = r_0 \quad p_1 = p_{\text{entrada}} \quad (22)$$

$$r = r_1 \quad p_1 = p_2 \quad Q_{\text{fugas } 1} = Q_{\text{fugas } 2}$$

$$r = r_2 \quad p_2 = p_3 \quad Q_{\text{fugas } 2} = Q_{\text{fugas } 3}$$

$$r = r_3 \quad p_3 = p_4 \quad Q_{\text{fugas } 3} = Q_{\text{fugas } 4}$$

$$r = r_4 \quad p_4 = p_{\text{salida}}$$

De aplicar las condiciones de contorno a las ecuaciones 10-21 se obtiene el valor de las diversas constantes de integración. Así:

$$k_1 = \frac{p_{\text{salida}} - p_{\text{entrada}} - \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1}(r_0^2 - r_1^2)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2}(r_1^2 - r_2^2)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m3}(r_2^2 - r_3^2)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m4}(r_3^2 - r_4^2)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \right]}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3}} - \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta \left[ \frac{r_1^2(r_{m2} - r_{m1})\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{[r_1^2(r_{m2} - r_{m1}) + r_2^2(r_{m3} - r_{m2})]\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{[r_1^2(r_{m2} - r_{m1}) + r_2^2(r_{m3} - r_{m2}) + r_3^2(r_{m4} - r_{m3})]\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \right]}{\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3}} \quad (23)$$

$$k_3 = 3\mu\omega\alpha\sin\theta r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + k_1 \quad (24)$$

$$k_5 = 3\mu\omega\alpha\sin\theta [r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]] + k_1 \quad (25)$$

$$k_7 = 3\mu\omega\alpha\sin\theta [r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}] + r_3^2 [r_{m4} - r_{m3}]] + k_1 \quad (26)$$



$$k_2 = p_{\text{entrada}} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{m1} \sin\theta}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \frac{r_0^2}{2} - \frac{k_1}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \ln r_0 \quad (27)$$

$$k_4 = p_{\text{entrada}} + k_1 \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} - \frac{\ln r_1}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \right] + \frac{3\mu\omega\alpha \sin\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2} r_1^2}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \right] \quad (28)$$

$$k_6 = p_{\text{entrada}} + k_1 \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} - \frac{\ln r_2}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \right] + \frac{3\mu\omega\alpha \sin\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r_2^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m3} r_2^2}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \right] \quad (29)$$

$$+ 3\mu\omega\alpha \sin\theta \left[ \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} - \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \ln r_2 \right]$$

$$k_8 = p_{\text{entrada}} + k_1 \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} - \frac{\ln r_3}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \right]$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r_2^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{r_{m3} [r_2^2 - r_3^2]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m4} r_3^2}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \right] \\
 & + 3\mu\omega\alpha\sin\theta \left[ \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}]}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \right. \\
 & \left. - \frac{r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}] + r_2^2 [r_{m3} - r_{m2}] + r_3^2 [r_{m4} - r_{m3}]}{(h_{04} + \alpha r_{m4} \cos\theta)^3} \ln r_3 \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de las constantes de integración en las ecuaciones de la distribución de presión en cada una de las cuatro caras paralelas, (ecuaciones 10, 13, 16 y 19), se obtienen ecuaciones explícitas para cada una de las caras paralelas en estudio. El resultado es:

$$p_1 = p_{\text{entrada}} + \frac{k_1 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{m1} \sin\theta}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} \left[ \frac{r_0^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right] \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 p_2 = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \right] + \\
 & + \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2} \left[ \frac{r_{m1} [r_0^2 - r_1^2]}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{r_{m2} [r_1^2 - r^2]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \right] \\
 & + \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta r_1^2 [r_{m2} - r_{m1}]}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$p_3 = p_{\text{entrada}} + k_1 \left[ \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{(h_{01} + \alpha r_{m1} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{(h_{02} + \alpha r_{m2} \cos\theta)^3} + \frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{(h_{03} + \alpha r_{m3} \cos\theta)^3} \right]$$



$$+\frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r_2^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m3}\left[r_2^2-r_3^2\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\right]$$

(33)

$$+3\mu\omega\alpha\sin\theta\left[\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right]$$

$$p_4 = p_{\text{entrada}} + k_1\left[\frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2}\left[\frac{r_{m1}\left[r_0^2-r_1^2\right]}{\left(h_{01}+\alpha r_{m1}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m2}\left[r_1^2-r_2^2\right]}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_{m3}\left[r_2^2-r_3^2\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{r_{m4}\left[r_3^2-r^2\right]}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\right]$$

$$+3\mu\omega\alpha\sin\theta\left[\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\left(h_{02}+\alpha r_{m2}\cos\theta\right)^3}+\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]}{\left(h_{03}+\alpha r_{m3}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)\right]$$

$$\left.+\frac{r_1^2\left[r_{m2}-r_{m1}\right]+r_2^2\left[r_{m3}-r_{m2}\right]+r_3^2\left[r_{m4}-r_{m3}\right]}{\left(h_{04}+\alpha r_{m4}\cos\theta\right)^3}\ln\left(\frac{r}{r_3}\right)\right]$$

(34)

Por otro lado, al sustituir las constantes de integración en las ecuaciones 11, 14, 17 y 20, se obtiene una única ecuación que determina el caudal de fugas entre el patín deslizante inclinado y la placa base:

$$Q_{\text{fugas}} = -\int_0^{2\pi} \frac{k_1}{12\mu} d\theta$$

(35)

Debido a la complejidad de la integral definida en la ecuación 35, esta debe ser integrada numéricamente.



La generalización de las ecuaciones de distribución de presiones y caudal, para un número cualquiera de ranuras talladas en la cara del patín, da lugar a las ecuaciones siguientes:

Se generalizan, inicialmente, las constantes de integración:

Puesto que todas las constantes están dadas en función del parámetro  $k_1$ , se generalizará inicialmente esta constante. En las ecuaciones siguientes, se debe tener presente que  $1 < i < n$ , donde  $n$  es el número de caras paralelas que posee el patín, incluyendo como cara la central del patín y la ranura o las ranuras. Véase que el número mínimo de caras que un patín de estas características puede tener es “ $n = 2$ ”, que obedece a un patín que posee únicamente la cara central y la cara deslizante. Para el patín deslizante objeto estudio, se observa que  $n = 4$ .

$$k_1 = \frac{\left[ p_{\text{salida}} - p_{\text{entrada}} - \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2} \left[ \sum_{i=1}^{i=n} \frac{r_{mi} (r_{i-1}^2 - r_i^2)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} \right] - 3\mu\omega\alpha\sin\theta \sum_{i=1}^{i=(n-1)} \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) \left[ \sum_{j=1}^{j=i} r_j^2 (r_{m(j+1)} - r_{mj}) \right]}{(h_{0(i+1)} + \alpha r_{m(i+1)} \cos\theta)^3} \right]}{\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{(i-1)}}\right)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3}} \quad (36)$$

La ecuación genérica para las constantes impares  $k_3, k_5, k_7, \dots$  será

$$k_L = 3\mu\omega\alpha\sin\theta \left( \sum_{j=1}^{j=\left(\frac{L-1}{2}\right)} \left[ r_j^2 [r_{m(j+1)} - r_{mj}] \right] \right) + k_1 \quad (37)$$

donde el valor de “ $L$ ” tiene que ser impar y entre  $3 \leq L \leq (2n - 1)$ .

La ecuación genérica para las constantes pares  $k_2, k_4, k_6, k_8, \dots$  será:

$$k_M = p_{\text{inlet}} + \left\{ \sum_{i=1}^{i=\left(\frac{M-2}{2}\right)} \left( \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{(i-1)}}\right)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} \right) - \frac{\ln r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}}{(h_{0(M/2)} + \alpha r_{m(M/2)} \cos\theta)^3} \right\} k_1 +$$





$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{\left(\frac{M-2}{2}\right)} \left( \frac{r_{mi} (r_{i-1}^2 - r_i^2)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} \right) + \frac{r_{m(M/2)} r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)}^2}{(h_{0(M/2)} + \alpha r_{m(M/2)} \cos\theta)^3} \right\} + \\
 & + 3\mu\omega\alpha\sin\theta \left\{ \sum_{i=1}^{\left(\frac{M-4}{2}\right)} \left( \frac{\left[ \sum_{j=1}^{j=i} \left[ r_j^2 (r_{m(j+1)} - r_{mj}) \right] \right] \ln \left( \frac{r_{i+1}}{r_i} \right)}{(h_{0(i+1)} + \alpha r_{m(i+1)} \cos\theta)^3} \right) \right\} \\
 & - \frac{\sum_{j=1}^{\left(\frac{M-2}{2}\right)} (r_j^2 (r_{m(j+1)} - r_{mj}))}{(h_{0(M/2)} + \alpha r_{m(M/2)} \cos\theta)^3} \ln r_{\left(\frac{M-2}{2}\right)} \quad (38)
 \end{aligned}$$

Los valores de la variable M en la ecuación 38 han de ser pares y estar dentro del margen  $2 \leq M \leq 2n$ . Cuando se desarrollen las ecuaciones explícitas partiendo de las ecuaciones genéricas, se debe recordar que, cuando aparezca un sumatorio del tipo  $\sum_{\text{límite inferior}}^{\text{límite superior}}$  si el límite superior tiene un valor más pequeño que el límite inferior, significa que todo el término que queda afectado por el sumatorio tendrá el valor 0.

La ecuación genérica que da lugar a la distribución de presión en cualquier punto del patín toma la forma:

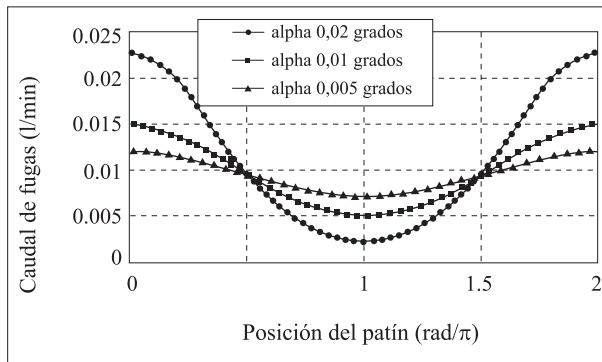
$$\begin{aligned}
 p_i = p_{\text{entrada}} + k_1 & \left[ \frac{\ln \left( \frac{r}{r_{i-1}} \right)}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} + \sum_{j=2}^{j=i} \frac{\ln \left( \frac{r_{j-1}}{r_{j-2}} \right)}{(h_{0(j-1)} + \alpha r_{m(j-1)} \cos\theta)^3} \right] + \\
 & \frac{3\mu\omega\alpha\sin\theta}{2} \left[ \frac{r_{mi} [r_{i-1}^2 - r_i^2]}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} + \sum_{j=2}^{j=i} \frac{r_{m(j-1)} [r_{j-2}^2 - r_{j-1}^2]}{(h_{0(j-1)} + \alpha r_{m(j-1)} \cos\theta)^3} \right] + \\
 & 3\mu\omega\alpha\sin\theta \left[ \frac{\left[ \sum_{j=2}^{j=i} r_{j-1}^2 [r_{mj} - r_{m(j-1)}] \right]}{(h_{0i} + \alpha r_{mi} \cos\theta)^3} \ln \left( \frac{r}{r_{i-1}} \right) + \sum_{j=3}^{j=i} \left[ \frac{\ln \left( \frac{r_{j-1}}{r_{j-2}} \right) \left[ \sum_{k=3}^{k=i} r_{k-2}^2 [r_{m(k-1)} - r_{m(k-2)}] \right]}{(h_{0(j-1)} + \alpha r_{m(j-1)} \cos\theta)^3} \right] \right] \quad (39)
 \end{aligned}$$

La ecuación genérica que caracterizaría el caudal de fugas sigue siendo la ecuación 35, aunque cuando el valor de la constante  $k_1$  es el genérico.



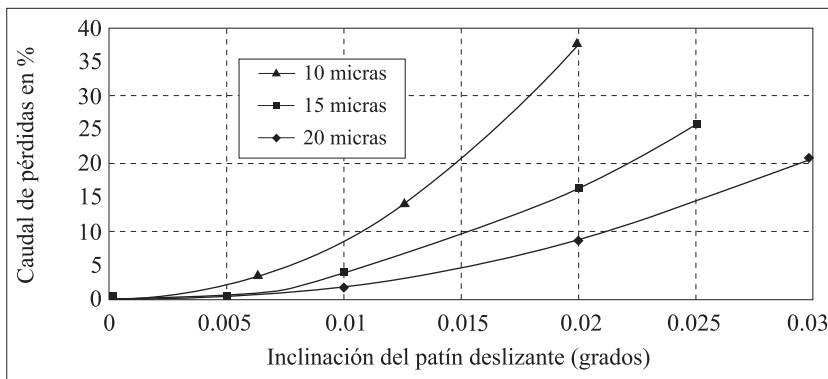
La figura que se muestra a continuación (Fig. 46.2), caracteriza el caudal de fugas existente entre el patín deslizante y la placa base en función de la posición angular del patín y para diferentes ángulos de inclinación del mismo. Esta información se obtiene partiendo de la ecuación 35.

Fig. 46.2  
Caudal de fugas en  
función de la  
posición angular del  
patín.  
Distancia central  
 $h_{02} = 15$  micras,  
 $P_{\text{alimentación}} = 100$  bar



La figura 46.3 representa el caudal de fugas (en porcentaje respecto al caudal que tendría el patín situado paralelo a la placa base) entre el patín deslizante y la placa base, para diferentes distancias entre la parte central del patín y la placa base, y diferentes inclinaciones del patín. Obsérvese que la variación de caudal en porcentaje es independiente de la presión de alimentación. Esta información se obtiene al integrar la ecuación 35.

Fig.46.3  
Caudal de fugas del  
patín deslizante, en  
porcentaje respecto  
al caudal cuando el  
patín está plano



La figura 46.4 presenta la caída de presión en el intersticio patín deslizante/placa base, incluyendo la presión en la parte central del patín y en la ranura tallada sobre el mismo. Este gráfico se obtiene al representar las ecuaciones de la 31 a la 34.

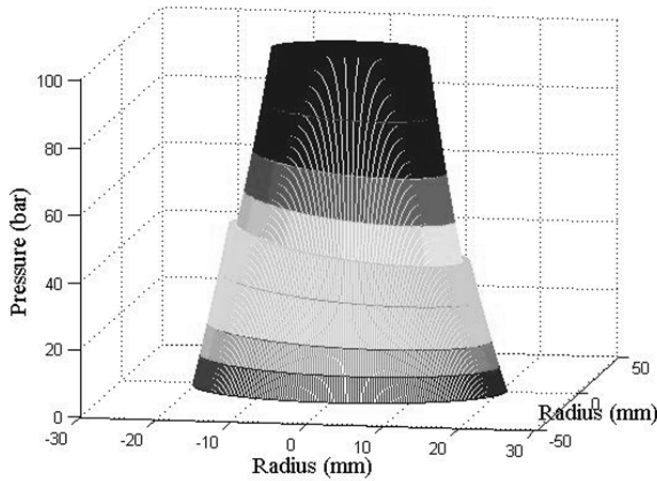


Fig. 46.4  
Distribución de  
presiones existente  
entre el patín y la  
placa base  
 $h_{02}=15$  micras  
 $\alpha=0,01$  grados  
 $\omega=25,12$  rad/s

## Problema 47

### Enunciado

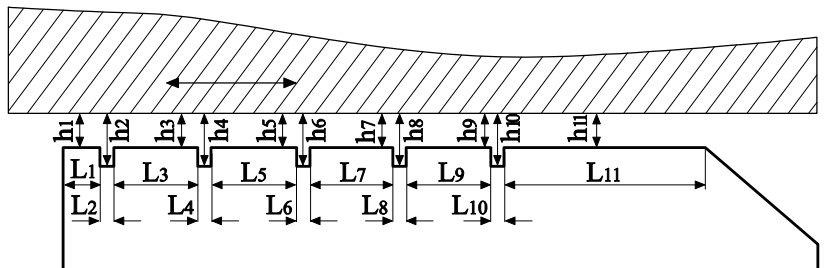
Sea el pistón que se detalla en la figura 47.1, el cual es uno de los nueve pistones que forman parte de una bomba de pistones axiales. El movimiento alternativo del pistón está definido por la ecuación  $u = -R_p \tan \alpha \sin(\omega t) \omega$ , donde  $R_p$  es el radio del plato inclinado,  $\alpha$  es la inclinación de dicho plato inclinado y  $\omega$  es la velocidad angular a la que gira la bomba, parámetros que son constantes y conocidos. Las dimensiones del pistón se especifican en la figura 47.2. Determine el caudal temporal de fugas entre pistón y camisa, así como la distribución de presiones a lo largo del mismo. Deben tenerse en cuenta las entallas talladas en el pistón.



Fig. 47.1  
Pistón objeto de  
estudio. Cortesía de  
Oilgear Towler



Fig. 47.2  
Esquema del pistón  
y camisa con sus  
dimensiones  
consideradas



### Resolución

En este caso particular, para desarrollar las ecuaciones requeridas, se partirá de la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas y flujo unidireccional, bidimensional. El flujo entre pistón y camisa se caracteriza como flujo de Couette – Poiseuille. Véase, en la figura 47.2, que la distancia entre pistón y camisa se considera constante en todo punto, lo cual es una idealización de la realidad.

Las hipótesis de partida consideradas para este problema son:

- El flujo se considera laminar en todo punto.
- El flujo se considera bidimensional.
- Existe movimiento relativo entre pistón y camisa.
- El espacio existente entre pistón y camisa se simula como flujo entre dos placas planas paralelas.
- No se considera la excentricidad existente entre pistón y camisa.
- Cada una de las superficies del pistón, como las ranuras, se modelizarán como placas planas.

Las dimensiones conocidas del pistón son:

- $h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = h_9 = h_{11} = 2,5$  micras.
- $h_2 = h_4 = h_6 = h_8 = h_{10} = h_1 + 0,4$  mm.
- $L_1 = 1,42$  mm
- $L_{11} = 19,5$  mm
- $L_2 = L_4 = L_6 = L_8 = L_{10} = 0,88$  mm
- $L_3 = L_5 = L_7 = L_9 = 4$  mm

La ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas puede ser dada como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (1)$$



Su integración da lugar a:

$$P = \frac{A\mu}{h^3}x + B \quad (2)$$

La ecuación 2 proporciona la distribución de presiones a lo largo del eje x, eje principal del pistón; las constantes A y B deben ser halladas mediante las condiciones de contorno.

El flujo de Couette – Poiseuille entre dos placas planas paralelas se define como:

$$\dot{V} = \frac{h u}{2} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu} \quad (3)$$

Sustituyendo la primera integración de la ecuación 1 en la ecuación 3, se obtiene

$$\dot{V} = \frac{h u}{2} - \frac{A}{12} \quad (4)$$

Las ecuaciones 2 y 4 son aplicables a cualquier par de placas planas paralelas, con lo que, para el primero de los pares de placas planas definidos en la figura 47.2, se establece:

$$P_1 = \frac{A\mu}{h^3}x + B \quad (5)$$

$$\dot{V}_1 = \frac{h_1 u}{2} - \frac{A}{12} \quad (6)$$

El rango de aplicabilidad de estas dos ecuaciones es para  $0 \leq X \leq l_1$ .

Para el último de los pares de placas definido en la figura 47.2, se tiene

$$P_{11} = \frac{U\mu}{h_{11}^3}x + V \quad (7)$$

$$\dot{V}_{11} = \frac{h_{11} u}{2} - \frac{U}{12} \quad (8)$$

El rango de aplicabilidad de estas dos ecuaciones es

$$\left( \sum_{i=1}^{i=10} l_i \right) \leq x \leq \left( \sum_{i=1}^{i=11} l_i \right) \quad (9)$$

Obsérvese que, para el caso en estudio, aparecen ecuaciones similares a las presentadas para los nueve pares de placas planas que se encuentran entre la primera y la última definidas aquí



Las constantes A....V deben ser halladas mediante las condiciones de contorno.

Para el presente estudio, se observa que aparecen un total de 22 ecuaciones con 22 constantes a determinar. En cada una de las dos superficies planas, se pueden definir las condiciones de contorno como

$$x = \sum_{j=1}^{j=i} l_j; \quad P_i = P_{i+1}; \quad \dot{V}_i = \dot{V}_{i+1}; \quad 1 \leq i \leq 10 \quad (10)$$

Asumiendo que las dimensiones son

$$l_2=l_4=l_6=l_8=l_{10}; \quad l_3=l_5=l_7=l_9; \quad h_1=h_3=h_5=h_7=h_9=h_{11}; \quad h_2=h_4=h_6=h_8=h_{10}; \quad (11)$$

El valor de cada una de las 22 constantes será

$$A = \frac{P_{\text{tanque}} - P_{\text{cilindro}} - C_{A2}}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \sum_{i=1}^{i=11} l_i + C_{A1}} \quad (12)$$

$$\text{Para el caso en estudio, se cumple que } A=E=I=M=Q=U; \quad B = P_{\text{cilindro}}; \quad (13)$$

donde se tiene que

$$C_{A1} = \mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \quad (14)$$

$$C_{A2} = 6\mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right] \quad (15)$$

De acuerdo con las especificaciones precedentes, se tiene:

$$C = K = G = O = S = 6u (h_2 - h_1) + A \quad (16)$$

$$D = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1) + 6\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-l_1) + B; \quad (17)$$

$$F = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2) + 6\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2) + B; \quad (18)$$

$$H = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3) + 6\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3)) + B; \quad (19)$$



$$J = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4) + B; \quad (20)$$

$$L = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3 + l_5) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3 + l_5)) + B; \quad (21)$$

$$N = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6) + B; \quad (22)$$

$$P = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3 + l_5 + l_7) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3 + l_5 + l_7)) + B \quad (23)$$

$$R = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8) + B; \quad (24)$$

$$T = A\mu \left[ \frac{1}{h_1^3} - \frac{1}{h_2^3} \right] * (l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + l_9) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (-(l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + l_9)) + B \quad (25)$$

$$V = A\mu \left[ \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) + 6u\mu \left[ \frac{h_2 - h_1}{h_2^3} \right] * (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) + B; \quad (26)$$

Con este colectivo de ecuaciones, es ahora posible hallar la distribución de presiones a lo largo de la longitud del pistón, teniendo además en cuenta las cinco ranuras talladas en el mismo. De hecho, estas ecuaciones permiten investigar, el incremento de presión creado en cada una de las ranuras, en función de las dimensiones de las mismas y de la velocidad del pistón.

Tradicionalmente, se asume que el caudal de fugas entre pistón y camisa es constante, y sigue una relación lineal con la diferencia de presiones existente entre extremos del pistón. De las ecuaciones acabadas de hallar, se observa que el caudal de fugas entre pistón y camisa es altamente dependiente del movimiento relativo del pistón. Obsérvese que la velocidad del pistón tiene forma senoidal y está definida por la ecuación establecida en el enunciado:

$$u = -R_p \tan \alpha \sin(\omega t) \quad \omega \quad (27)$$

Sustituyendo las constantes determinadas en cada una de las 11 ecuaciones del caudal de fugas, y teniendo en cuenta además la ecuación 27, se obtiene una ecuación que caracteriza el caudal de fugas temporal entre pistón y camisa.



$$q_p = \pi d \left[ \frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega}{2} \right] - \frac{\pi d}{12} * \left[ \frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{interior}} - 6 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega \mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11}) + \mu \left[ \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right]} \right] \quad (28)$$

En realidad, el caudal total de fugas entre pistón y camisa, es la suma de los caudales de fugas de cada uno de los pistones que en un momento dado están sometidos a presión, con lo que este caudal total se puede dar como

$$q_t = \sum_{p=1}^{p=n'} q_p \quad (29)$$

donde  $n'$  es el número de pistones que en cada instante están sometidos a presión.

La ecuación (28) asume que la totalidad del pistón está en todo momento, en el interior del barril, aunque en realidad esto no es así, dado que la parte inferior de los pistones sale fuera del barril cuando los pistones están en su punto muerto inferior.

Con el fin de considerar la longitud real del pistón que en todo momento está en el interior del barril, se ha creado la ecuación 30.

$$q_p = \pi d \left[ \frac{h_1 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega}{2} \right] - \frac{\pi d}{12} * \left[ \frac{P_{\text{Tank}} - P_{\text{interior}} - 6 R_p \tan \alpha (-\sin(\omega t)) \omega \mu \left[ \frac{h_{10} - h_1}{h_{10}^3} \right] (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})}{\frac{\mu}{h_{11}^3} \left( l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{11} - \frac{0.0195}{2} - R_p \tan \alpha \cos(\omega t) \right) + \mu \left[ \left( \frac{1}{h_2^3} - \frac{1}{h_1^3} \right) (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10}) \right]} \right] \quad (30)$$

La ecuación 30 caracteriza el caudal temporal de fugas entre pistón y camisa, en función del intersticio existente entre ambos, del gradiente de presiones entre extremos del pistón, de la velocidad de rotación de la bomba y de las características geométricas del pistón y la bomba, (plato inclinado). En esta ecuación se ha de entender que, para  $t=0$ , el pistón está situado en su punto muerto inferior.





La distribución de presiones a lo largo del eje del pistón se determinará al sustituir las constantes halladas en las ecuaciones 5, 7 y sus nueve ecuaciones equivalentes. La representación gráfica de esta distribución de presiones para el caso en que existan las 5 ranuras cortadas a lo largo del eje del pistón y para el caso en que no exista ranura alguna se presenta en la figura 47.3, donde se puede apreciar claramente el efecto que las ranuras causan sobre dicha distribución de presiones.

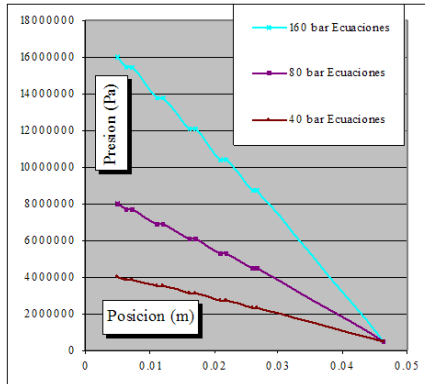


Fig. 47.3  
Distribución de presiones a lo largo del eje del pistón

La figura 47.4 muestra el caudal de fugas existente entre pistón y camisa, en función de la velocidad del pistón y para diferentes presiones de la cámara del cilindro. Obsérvese que el flujo de Couette, asociado a la velocidad de desplazamiento del pistón, es el preponderante.

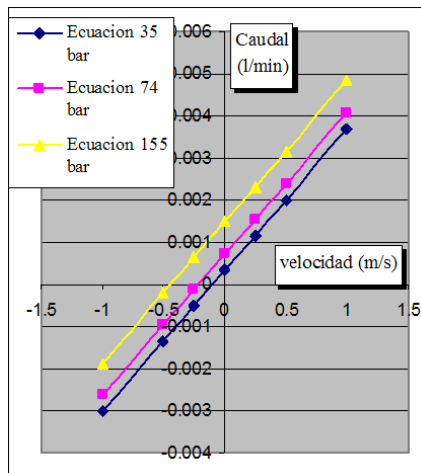


Fig. 47.4  
Caudal de fugas de un solo pistón

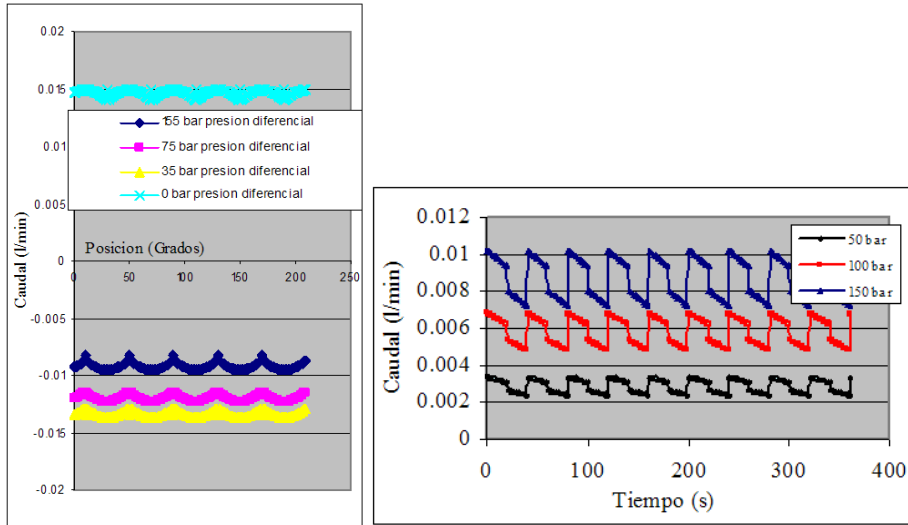
En la figura 47.5, se presenta el caudal de fugas, suma de la aportación de los 4-5 pistones que constantemente están en contacto con la cámara del cilindro sometida a presión. Obsérvese que en realidad, el caudal de fugas es hacia la cámara del pistón, es decir, negativo. En este mismo gráfico, se presenta la aportación del número de pistones cuya cámara del cilindro está en contacto con el tanque y que están yendo del punto muerto superior al punto muerto inferior, véase que el caudal neto para este caso es hacia el tanque.



Por último, la figura 47.6 muestra el caudal de fugas dinámico, resultante de incluir la aportación de los nueve pistones que forman la bomba, véase que el caudal resultante es hacia el tanque. Dicho caudal de fugas resultante, es mayor a medida que la presión a la que trabaja la bomba aumenta, resultado que era de esperar.

Fig. 47.5  
(Izquierda)  
Caudal de fugas  
para 4-5 pistones

Fig. 47.6  
(Derecha)  
Caudal de fugas  
para los 9 pistones

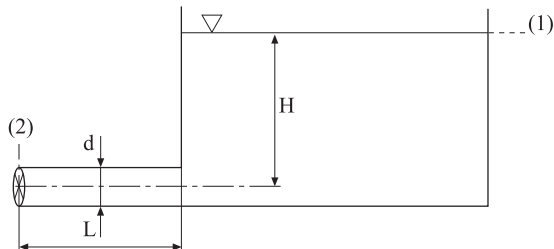


## Problema 48

### Enunciado

Un tanque de grandes dimensiones se vacía mediante la tubería que se esquematiza en la figura. Determine la velocidad del agua a la salida del conducto en función del tiempo, una vez que se abra la válvula, la cual está situada en el extremo del conducto más alejado del tanque. Se supone que el conducto descarga a la atmósfera.

Fig. 48.1



Considérese que:

- la sección del tanque es muy superior a la sección del conducto.
- el flujo en el interior del conducto es uniforme.



## Resolución

Se distinguen tres zonas características: depósito, entrada conducto, y conducto.

Si “u” es la velocidad del fluido en cualquier punto del conducto, los tiempos de residencia del fluido en el conducto se pueden definir como:

$$T_{\text{conducto}} = \frac{L}{u}$$

$$T_{\text{entrada conducto}} = \frac{D}{u}$$

$$T_{\text{de residencia en el depósito}} = \frac{\nabla}{D^2 u}$$

donde L= longitud del conducto; D= diámetro del conducto;  $\nabla$ = volumen del depósito.

Relacionando estos tiempos, se observa que:

$$\frac{T_{\text{conducto}}}{T_{\text{tiempo de residencia en el depósito}}} = \frac{L}{u} \frac{D^2 u}{\nabla} = \frac{LD^2}{\nabla} \ll 1$$

Puesto que el volumen del fluido en el depósito es mucho mayor que el volumen de fluido en el conducto, el tiempo de residencia del fluido en el depósito será mucho mayor que el tiempo en el conducto.

$$\frac{T_{\text{entrada al conducto}}}{T_{\text{conducto}}} = \frac{D}{u} \frac{u}{L} = \frac{D}{L} \ll 1$$

Dado que la longitud del conducto es mucho mayor que su diámetro, el tiempo de residencia del fluido en el conducto será mucho mayor que el tiempo que se necesita para que el fluido atraviese la entrada del conducto.

Obsérvese que aparecen tres escalas de tiempos:  $T_{\text{depósito}} \gg T_{\text{conducto}} \gg T_{\text{entrada al conducto}}$

De la aplicación de la ecuación de continuidad entre el nivel del depósito y el extremo del conducto se puede obtener el orden de magnitud de las velocidades en el conducto y en el depósito:

$$D_{\text{dep}}^2 \cdot u_{\text{dep}} = u_c \cdot D^2$$

Puesto que el diámetro del depósito es muy superior al del conducto, se puede concluir que la velocidad del fluido en el depósito es despreciable. Así pues, en el estudio de la aceleración del fluido en el conducto, la altura del depósito se considerará constante.



La ecuación de cantidad de movimiento aplicada a lo largo del conducto establece:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + \rho g + \nabla \tau$$

Considerando flujo ideal (esfuerzos cortantes despreciables), flujo irrotacional y unidireccional, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \left( P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) = 0$$

Para fluido incompresible y en dirección del movimiento, (eje x) se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g z \right) = 0$$

Integrando entre las secciones de entrada y salida del conducto, y recordando que tanto la velocidad como la cota son las mismas en ambos puntos, se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

Ecuación que se puede dar como:

$$\int_0^L \frac{dv}{dt} dx + \int_{P_e}^{P_s} d \left( \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

Su integración dará lugar a:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{P_s}{\rho} - \frac{P_e}{\rho} = 0$$

La relación entre la presión estática a la entrada del conducto y la presión dinámica se establece:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{fondo del depósito}}}{\rho} + \frac{v_{\text{fondo del depósito}}^2}{2} + g z_{\text{fondo del depósito}} = \\ \frac{P_{\text{entrada al conducto}}}{\rho} + \frac{v_{\text{entrada al conducto}}^2}{2} + g z_{\text{entrada al conducto}} \end{aligned}$$

Si se entiende que la velocidad en el fondo del depósito es nula y que la cota es la misma que la de la entrada del conducto, se tiene.

$$\frac{P_{\text{fondo del depósito}}}{\rho} = \frac{P_{\text{entrada al conducto}}}{\rho} + \frac{v_{\text{entrada al conducto}}^2}{2}$$



Por otro lado, la presión en el fondo del depósito, según la estática de fluidos, es:

$$P_{\text{fondo del depósito}} = \rho g H$$

de donde:

$$\frac{\rho g H}{\rho} = \frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2}; \quad \frac{P_e}{\rho} = gH - \frac{v_e^2}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial hallada entre la entrada y salida del depósito se tiene:

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{P_s}{\rho} - gH + \frac{v^2}{2} = 0$$

Suponiendo que la presión a la salida del depósito es la presión atmosférica:

$$\begin{aligned} \int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} &= \int_0^t \frac{dt}{2L} \\ \int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} &= \int_0^v \frac{dv}{2gH - v^2} \frac{2gH}{2gH} \\ \int_0^v \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right)^2} \frac{1}{2gH} &= \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dt}{2L} &= \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right); \\ \int_0^t \sqrt{2gH} \frac{dt}{2L} &= \operatorname{arctgh}\left(\frac{v}{\sqrt{2gH}}\right); \\ \operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right) &= \frac{v}{\sqrt{2gH}}; \\ v &= \sqrt{2gH} \cdot \operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right) \end{aligned}$$

ecuación que determina la variación temporal de la velocidad en el conducto.

Un método de resolución alternativo es el siguiente:



Partiendo de la ecuación de Navier Stokes en dirección X:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

si el fluido es ideal  $\mu = 0$  ;

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x; \quad \text{sabiendo que} \quad g_x = -\nabla(gz)$$

$$g_x = -g \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial z}{\partial x};$$

multiplicando por dx:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} dx + u du \right) = -dP - \rho g dz;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx = -\frac{dP}{\rho} - g dz - u du;$$

$$\int_1^2 \frac{du}{dt} dx = - \left[ \int_1^2 \frac{dP}{\rho} + \int_1^2 g dz + \int_1^2 u du \right];$$

$$\int_1^2 \frac{du}{dt} dx = \frac{P_1 - P_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2};$$

$$\frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{du}{dt} dx;$$

Como el depósito es muy grande, sólo aparecerá variación de velocidad en dirección x:

$$\int_1^2 \frac{du_x}{dt} dx = \int_0^L \frac{du_x}{dt} dx$$

$$\int_0^L \frac{du_x}{dt} dx = \int_0^L \frac{du_2}{dt} dx = L \frac{du_2}{dt}$$

Trabajando con presiones relativas  $P_1 \equiv P_2 \equiv 0$  y asumiendo  $v_1 \equiv 0$  :

$$gz_1 = gz_2 + \frac{u_2^2}{2} + L \frac{du_2}{dt}$$



$$g(z_1 - z_2) - \frac{u_2^2}{2} = L \frac{du_2}{dt} ;$$

$$\frac{2gH - u_2^2}{2} = L \frac{du_2}{dt} ;$$

$\frac{dt}{2L} = (2gH - u_2^2)^{-1} du_2$ ; si se soluciona a parte la segunda parte de la ecuación:

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2} = \int_0^{u_2} \frac{du_2}{2gH - u_2^2} \frac{2gH}{2gH}$$

$$\int_0^{u_2} \frac{du_2}{1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)^2} \frac{1}{2gH} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right)$$

y, sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\int_0^t \frac{dt}{2L} = \frac{1}{\sqrt{2gH}} \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) ;$$

$$\int_0^t \sqrt{2gH} \frac{dt}{2L} = \operatorname{arctgh}\left(\frac{u_2}{\sqrt{2gH}}\right) ;$$

$$\operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right) = \frac{u_2}{\sqrt{2gH}} ;$$

$$u_2 = \sqrt{2gH} \cdot \operatorname{tgh}\left(\sqrt{2gH} \frac{t}{2L}\right)$$

## Problema 49

### Enunciado

Un motor de aviación cuya velocidad de giro es de 10.000 rpm está soportado por dos cojinetes hidrostáticos. La carga dinámica en dirección vertical del motor se ha estimado en 23.800 N y el diámetro del eje principal es de 48 mm.

Si se quiere diseñar los cojinetes utilizando la teoría de longitud infinita, y se prevé que la longitud de cada uno de ellos sea de 50 mm, y conociendo que el radio del estator (en el cojinete) es 20 micras mayor que el radio del eje principal, halle:



1. Cual será el valor del número de Sommerfeld.
2. Si existirá contacto metal-metal entre eje y estator y en cualquier caso, cuál será la excentricidad entre ambos.
3. Si se quiere que la excentricidad máxima sea de 2 micras y se pretende reducir la longitud de cada uno de los cojinetes a 30 mm, determine cuál será la carga máxima en dirección vertical que podrá soportar.

Viscosidad dinámica del aceite lubricante:  $\mu = 0,02 \text{ Kg}/(\text{m s})$

### Resolución

1. El número de Sommerfeld viene definido por:

$$So = F_y \cdot \frac{\psi^2}{\mu \omega R} = 6 \cdot \frac{I_2 \cdot I_5 - I_3 \cdot I_4}{I_3};$$

donde:

$F_y$  = fuerza vertical por unidad de longitud del cojinete;

$$\psi = \frac{R_{\text{ext}} - R_{\text{eje}}}{R_{\text{eje}}} = \frac{\bar{h}}{R_{\text{eje}}} = \frac{0,020 \text{ mm}}{24 \text{ mm}} = 8,33 \cdot 10^{-4};$$

$R$  = radio del eje;

$\omega$  = velocidad angular del eje;

$\mu$  = viscosidad dinámica del fluido de trabajo =  $0,02 \text{ Kg}/(\text{m s})$ ;

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad I_2 = \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad I_3 = \frac{\pi(2+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{5}{2}}};$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon}; \quad I_5 = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{e}{h};$$

El valor del número de Sommerfeld será:

$$\frac{23.800}{2 \cdot 0,05} \cdot \frac{(8,33 \cdot 10^{-4})^2}{0,02 \cdot \frac{10.000 \cdot 2\pi}{60} \cdot 0,024} = 0,3288 = So;$$

2. Una manera de determinar la existencia o no de contacto entre eje y estator será mediante la utilización de un sistema iterativo.

Suponiendo, por ejemplo, que la excentricidad  $e$  fuese de  $10 \mu\text{m}$ , se tiene:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{10}{20} = 0,5;$$





donde:

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1-0,5^2)^{\frac{1}{2}}} = 7,2551; \quad I_2 = \frac{2\pi}{(1-0,5^2)^{\frac{3}{2}}} = 9,6735;$$

$$I_3 = \frac{\pi(2+0,5^2)}{(1-0,5^2)^{\frac{5}{2}}} = 14,51039; \quad I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,5} = \frac{9,6735 - 7,2551}{0,5} = 4,8368;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,5} = \frac{14,51039 - 9,6735}{0,5} = 9,6737;$$

con lo cual el número de Sommerfeld será:

$$6 \cdot \frac{9,6735 \cdot 9,6737 - 14,51039 \cdot 4,8368}{14,51039} = 9,6736;$$

Puesto que este valor es muy superior al número de Sommerfeld hallado anteriormente, indica que la excentricidad será mucho menor a 10 micras.

Si la excentricidad fuese de 1 micra:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{1}{20} = 0,05$$

$$I_1 = \frac{2R}{(1-0,05^2)^{\frac{1}{2}}} = 6,291054; \quad I_2 = \frac{2R}{(1-0,05^2)^{\frac{3}{2}}} = 6,3068211;$$

$$I_3 = \frac{R(2+0,05^2)}{(1-0,05^2)^{\frac{5}{2}}} = 6,330531;$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,05} = \frac{6,3068211 - 6,291054}{0,05} = 0,315342;$$

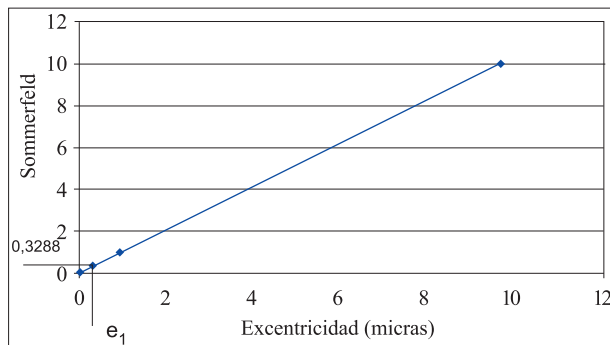
$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,05} = \frac{6,330531 - 6,3068211}{0,05} = 0,4741;$$

$$6 \cdot \frac{6,3068211 \cdot 0,4741 - 6,330531 \cdot 0,315342}{6,330531} = 0,941894;$$

Suponiendo como primera aproximación una función lineal, entrando en la gráfica 49.1 con el valor del número de Sommerfeld de 0,3288, se obtiene el valor de la excentricidad.



Fig 49.1  
Relación entre el  
número de  
Sommerfeld y la  
excentricidad



Así, el valor de la excentricidad será:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9,6736 - 0,94184}{10 - 1} = 0,97019;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,94184 - 0,3288}{1 - e_i};$$

$$e_i = 0,3681 \text{ micras}$$

Es la excentricidad aproximada que sufrirá el eje. Por tanto, no existirá contacto metal-metal entre eje y estator ya que la excentricidad es mucho menor de 20 micras.

3. Si la excentricidad máxima se requiere que sea de 2 micras:

$$\varepsilon = \frac{e}{h} = \frac{2}{20} = 0,1$$

$$I_1 = \frac{2\pi}{(1 - 0,1^2)^{\frac{1}{2}}} = 6,31483;$$

$$I_2 = \frac{2\pi}{(1 - 0,1^2)^{\frac{3}{2}}} = 6,37862;$$

$$I_3 = \frac{\pi(2 + 0,1^2)}{(1 - 0,1^2)^{\frac{5}{2}}} = 6,47527;$$

$$I_4 = \frac{I_2 - I_1}{0,1} = \frac{6,37862 - 6,31483}{0,1} = 0,6379;$$

$$I_5 = \frac{I_3 - I_2}{0,1} = \frac{6,47527 - 6,37862}{0,1} = 0,9665;$$

con lo cual, para este caso, el número de Sommerfeld será:

$$6 \cdot \frac{6,37862 \cdot 0,9665 - 6,47527 \cdot 0,6379}{6,47527} = 1,8850;$$



Por otro lado, el número de Sommerfeld para un cojinete de 3 centímetros de longitud se define:

$$\frac{F_y}{0,03} \cdot \frac{(8,33 \cdot 10^{-4})^2}{0,02 \cdot \frac{10.000 \cdot 2\pi}{60} \cdot 0,024} = 1,8850;$$

$$F_y = 40.965,9\text{N}$$

La fuerza que soportarían los dos cojinetes es el doble de la establecida aquí. Obsérvese que un aumento de la excentricidad entre estator y rotor implica un aumento significativo de la fuerza que el cojinete puede soportar.

## Problema 50

### Enunciado

Sea el cojinete cilíndrico de la figura, el cual tiene una ranura longitudinal en donde la presión se considera conocida ( $P_{\text{entrada}}$ ). Aplicando la teoría para cojinetes infinitamente largos, determine:

1. La distribución de velocidades, el caudal circulante y la distribución de presiones en la película de fluido.
2. La fuerza vertical ejercida por la distribución de presiones y el par de giro.

Comente las hipótesis realizadas.

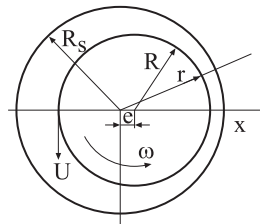
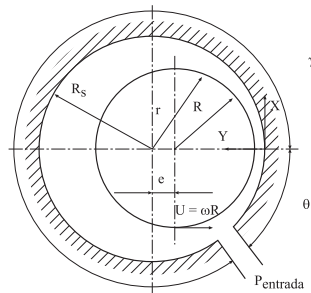
Considerar que las integrales siguientes son conocidas.

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = I_1^* \quad \int_{-\theta}^{\varphi_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_{3P}^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_2^* \quad \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_3^* \quad \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = I_5^*$$

$$\int_{-\theta}^{\varphi_1} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_{2P}^*$$



$$r = R + e \cdot \cos \varphi$$

Fig. 50.1  
(Izquierda)  
Conjunto estator-rotor para un cojinete largo

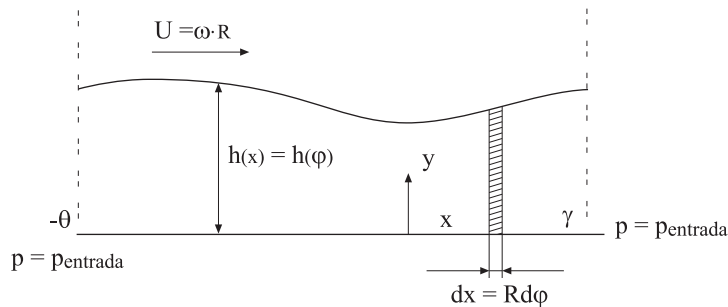
Fig. 50.2  
(Derecha)  
Esquema de la relación entre radios



## Resolución

Abriendo el cojinete, se observa que éste se puede considerar como una placa plana de altura variable. Algunas de las relaciones directas que se pueden extraer de las figuras representadas son:

Fig. 50.3



$$R_s - R = \bar{h};$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R};$$

$$r = R + e \cdot \cos \varphi;$$

$$\varepsilon = \frac{e}{\bar{h}}$$

$$h_\varphi = R_s - r = R_s - (R + e \cos \varphi) = R_s - R - e \cos \varphi = \bar{h} - e \cos \varphi = \bar{h}(1 - \varepsilon \cdot \cos \varphi);$$

La velocidad entre dos placas de fluido que se desplazan con velocidades relativas

$$\omega \cdot R \text{ es: } V_\varphi = \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot (y - h_\varphi)$$

El caudal circulante será:

$$\dot{V} = Q = \int_0^{h_\varphi} V_\varphi dy = \int_0^{h_\varphi} \left[ \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \cdot \frac{1}{2\mu} \cdot y \cdot (y - h_\varphi) \right] dy;$$

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{12\mu} \cdot h_\varphi^3;$$

Como  $\dot{V}$  ha de ser constante a lo largo de todo el cojinete, despejando  $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ , se tiene:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \left( \frac{\omega \cdot R \cdot h_\varphi}{2} - \dot{V} \right) \cdot \frac{12\mu}{h_\varphi^3} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_\varphi^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}}{h_\varphi^3}$$

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\varphi};$$



$$\int_{P_{-\theta}}^{P_{\gamma}} dP^* = \int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_{\phi}^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}_{\theta}}{h_{\phi}^3} \right) R d\phi = 0$$

Véase que la ecuación anterior es igual a cero, puesto que la presión en los puntos  $(-\theta)$  y  $(\gamma)$  es la misma.

Despejando el valor del caudal volumétrico, se tiene:

$$\dot{V} = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_{\phi}^2} d\phi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{12\mu \cdot R}{h_{\phi}^3} d\phi} = \frac{\omega \cdot R}{2} \left[ \frac{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\phi}{h_{\phi}^2} \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{d\phi}{h_{\phi}^3}} \right];$$

Adimensionalizando las integrales mediante el espesor medio de la película de líquido, se tiene:

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \left[ \frac{\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^2 d\phi \cdot \frac{1}{\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^3 d\phi}} \right];$$

y denominando:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^2 d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-2} d\phi = I_2^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \left( \frac{\bar{h}}{h_{\phi}} \right)^3 d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-3} d\phi = I_3^*$$

Se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \left[ \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

Conocido el caudal, la distribución de presiones a lo largo del cojinete será:

$$\frac{dP^*}{dx} = \frac{dP^*}{R \cdot d\phi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R}{h_{\phi}^2} - \frac{12\mu \cdot \dot{V}}{h_{\phi}^3}$$

$$\frac{dP^*}{d\phi} = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{h_{\phi}^2} - \frac{12\mu \cdot R}{h_{\phi}^3} \cdot \frac{\omega \cdot R \cdot \bar{h}}{2} \frac{I_2^*}{I_3^*}$$

$$\frac{dP^*}{d\phi} = 6\mu \cdot \omega \cdot R^2 \left[ \frac{1}{h_{\phi}^2} - \frac{\bar{h}}{h_{\phi}^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$



Integrando entre la sección de entrada y un punto genérico  $\varphi_i$ , se tiene:

$$\int_{P_{\varphi=-\theta}=P_{\text{entrada}}}^{P_{\varphi=\varphi_i}=P_{\text{genérica}}} dP^* = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ \int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} d\theta - \int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} d\varphi \right]$$

Denominando:

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} d\varphi = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = I_{2P}^*$$

(Véase que la solución de esta integral es función de  $\varphi_i$ .)

$$\int_{-\theta}^{\varphi_i} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} d\varphi = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = I_{3P}^*$$

(Véase que la solución de esta integral es asimismo función de  $\varphi_i$ .)

Sustituyendo en la integral de la distribución de presiones, se llega a:

$$P_i^* - P_{\text{entrada}}^* = \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ I_{2P}^* - I_{3P}^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

(Esta ecuación se puede representar para diferentes presiones de entrada, con el fin de evitar que aparezca cavitación).

La fuerza que el fluido a presión ejerce sobre el eje se determina del modo siguiente:

En dirección x:

$$F_x = - \int_{-\theta}^{\gamma} P_i^* \cos \varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Y en dirección y, será:

$$F_y = - \int_{-\theta}^{\gamma} P_i^* \sin \varphi \cdot R \cdot d\varphi$$

Integrando esta ecuación por partes, se obtiene:

$$P_i^* = u \rightarrow du = \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\sin \varphi d\varphi = dv \rightarrow v = -\cos \varphi$$

$$F_y = -R \left[ P_i (-\cos \varphi) \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} -\cos \varphi \frac{dP}{d\varphi} d\varphi \right]$$

de donde, sustituyendo la distribución de presiones:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos \varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \cos \varphi \cdot 6\mu \cdot \omega \cdot R^2 \left[ \frac{1}{h_\varphi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\theta$$



$$F_y = R \cdot P_i^* \cos \varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \cos \varphi - \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \cos \varphi \right] d\varphi$$

Denominando:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}^2}{h_\varphi^2} \cos \varphi d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = I_4^*$$

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}^3}{h_\varphi^3} \cos \varphi d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = I_5^*$$

Se obtiene:

$$F_y = R \cdot P_i^* \cos \varphi \Big|_{-\theta}^{\gamma} - \frac{6\mu \cdot \omega \cdot R^2}{\bar{h}^2} \left[ I_4^* - I_5^* \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El par necesario para hacer girar el eje se puede determinar hallando inicialmente los esfuerzos cortantes que actúan sobre el eje:

$$\tau = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=h_\varphi} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \cdot y(y - h_\varphi) + \frac{\omega \cdot R \cdot y}{h} \right]_{y=h_\varphi}$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{1}{h_\varphi} + \frac{\partial P^*}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \frac{h_\varphi}{\omega \cdot R} \right]$$

Sustituyendo  $\frac{\partial P^*}{\partial x}$  por su valor:

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{1}{h_\varphi} + 6\mu \cdot \omega \cdot R \left( \frac{1}{h_\varphi^2} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^3} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \frac{1}{2\mu} \frac{h_\varphi}{\omega \cdot R} \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{1}{h_\varphi} + 3 \cdot \left( \frac{1}{h_\varphi} - \frac{\bar{h}}{h_\varphi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right) \right]$$

$$\tau = \mu \cdot \omega \cdot R \left[ \frac{4}{h_\varphi} - 3 \frac{\bar{h}}{h_\varphi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right]$$

El par sobre el eje, por unidad de longitud, será:

$$T = \int_{-\theta}^{\gamma} \tau \cdot R^2 d\varphi = \int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[ \frac{4}{h_\varphi} - 3 \frac{\bar{h}}{h_\varphi^2} \frac{I_2^*}{I_3^*} \right] d\varphi$$

$$T = \frac{\mu \cdot \omega \cdot R^3}{\bar{h}} \left[ 4 \cdot I_1^* - 3 \cdot \frac{I_2^{*2}}{I_3^*} \right]$$



donde:

$$\int_{-\theta}^{\gamma} \frac{\bar{h}}{h_{\phi}} d\phi = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-1} d\phi = I_1^*$$

Apéndice:

Las integrales no resueltas que han aparecido en este problema son:

$$\begin{aligned} \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-1} d\phi &= I_1^* & \int_{-\theta}^{\phi_i} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-3} d\phi &= I_{3P}^* \\ \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-2} d\phi &= I_2^* & \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-2} \cos \phi d\phi &= I_4^* \\ \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-3} d\phi &= I_3^* & \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-3} \cos \phi d\phi &= I_5^* \\ \int_{-\theta}^{\phi_i} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-2} d\phi &= I_{2P}^* \end{aligned}$$

Obsérvese que las integrales  $I_2^*$  e  $I_{2P}^*$  son en realidad la misma integral; únicamente difieren los límites de integración. Lo mismo sucede con las integrales  $I_3^*$  e  $I_{3P}^*$ . Así, en realidad, aparecen cinco tipos de integrales diferentes. A continuación, se da la resolución de estas integrales.

$$\text{Denominando } \Gamma \text{ al término } \frac{\arctan h \left( \frac{(1 + \varepsilon) \tan \left( \frac{\phi}{2} \right)}{\sqrt{(-1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}} \right)}{\sqrt{(-1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)}}$$

$$\text{Denominando } \Phi \text{ al término } \frac{\tan \left( \frac{\phi}{2} \right)}{(-1 + \varepsilon) \left( \tan \left( \frac{\phi}{2} \right)^2 + 1 + \varepsilon \tan \left( \frac{\phi}{2} \right)^2 - \varepsilon \right)}$$

$$\text{Denominando } \Pi \text{ al término } \frac{\tan \left( \frac{\phi}{2} \right)}{(-1 + \varepsilon) \left( \tan \left( \frac{\phi}{2} \right)^2 + 1 + \varepsilon \tan \left( \frac{\phi}{2} \right)^2 - \varepsilon \right)^2}$$

Las diversas integrales se pueden dar:

$$I_1^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \phi)^{-1} d\phi = [-2 \Gamma]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$





$$I_2^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)} \Gamma + \frac{4\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{2p}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)} \Gamma + \frac{4\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_i)}$$

$$I_3^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} \Gamma + \frac{8\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_{3p}^* = \int_{-\theta}^{\varphi_i} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \left[ -\frac{2}{(1+\varepsilon)^2} \Gamma + \frac{8\varepsilon \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\varphi_i)}$$

$$I_4^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = \left[ \frac{2}{(1+\varepsilon)} \Gamma + \frac{4 \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$

$$I_5^* = \int_{-\theta}^{\gamma} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= \left[ \frac{2}{(1+\varepsilon)^2} \Gamma + \frac{2(2-2\varepsilon) \left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{8\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \Pi - \frac{3}{4} \frac{\left\{ -\frac{1}{2} \Phi + \frac{\Gamma}{2(-1+\varepsilon)} \right\}}{(-1+\varepsilon)} \right\} \right]_{(-\theta)}^{(\gamma)}$$



## Problema 51

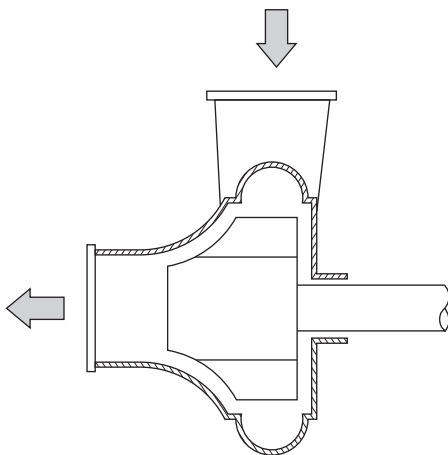
### Enunciado

Se pretende diseñar una miniturbina para que gire a altas velocidades angulares y, a priori, se quiere estudiar la posibilidad de que el fluido que fluye por la turbomáquina se pueda utilizar como fluido lubricante en el eje de la propia turbina. A tal efecto, se pretende canalizar el fluido hacia uno de los extremos del eje de la máquina, tal como muestra la figura 51.1.

Se pide determinar:

1. El caudal volumétrico circulante a través del intersticio eje de la turbina y carcasa de la misma.
2. La estabilidad del eje de la turbina en función del fluido de trabajo y de la velocidad de giro del rotor.

Fig. 51.1.  
Turbina objeto  
de estudio



### Resolución

1a. Para determinar el flujo circulante entre el eje y la carcasa, es necesario hallar inicialmente el flujo que fluye entre la pared de la turbina y la carcasa de la máquina, (v. figura 51.2). Es decir, es necesario determinar inicialmente el flujo y la distribución de presiones entre dos platos paralelos con movimiento circular relativo entre ambos.

Puesto que el intersticio entre los dos platos es, en realidad, muy pequeño, se asume inicialmente que el flujo es laminar. Para determinar la distribución de presiones entre ambos discos circulares, se utiliza la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas, que toma la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \left( U \cos \theta \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{U \sin \theta}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \quad (1)$$



Asumiendo que el flujo es incompresible y el régimen es laminar, y considerando que los dos platos se mantienen paralelos, siendo la distancia entre ellos ( $h$ ) = constante, se puede establecer que la distancia entre los platos no va a cambiar ni en dirección angular ni en dirección radial; asimismo, la presión se mantendrá constante en dirección angular:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right) = 0 ; \quad (2)$$

En estas condiciones, la ecuación de lubricación de Reynolds tomará la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \quad (3)$$

La integración de esta ecuación dará lugar a:

$$P = \frac{K_1}{h^3} \ln r + K_2, \text{ donde } K_1 \text{ y } K_2 \text{ son constantes.} \quad (4)$$

Las condiciones de contorno para determinar dichas constantes serán (v. figura 51.2):

$$\text{Para } r = R_1 \Rightarrow P = P_1, \text{ y cuando } r = R_2 \Rightarrow P = P_2 \quad (5)$$

Una vez las constantes  $K_1$  y  $K_2$  han sido determinadas y sustituidas en la ecuación (4), se obtiene:

$$P = P_1 + \frac{P_1 - P_2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \quad (6)$$

ecuación que proporciona la distribución de presiones entre los dos platos y en función del radio.

Por otro lado, el flujo volumétrico entre los dos platos puede ser determinado como:

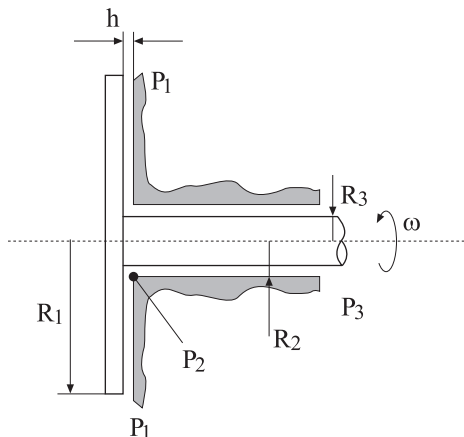
$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h u \, r \, dy \, d\theta \quad (7)$$

Asumiendo flujo de Poiseuille entre los dos platos, la distribución de velocidades entre los mismos se puede definir como:

$$u = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y - h), \text{ donde: } 0 < y < h \quad (8)$$



Fig. 51.2.  
Eje central de  
la turbina y  
pared lateral de  
la misma



Véase que el flujo se asume como unidireccional y que fluye en dirección radial desde el radio mayor al radio menor de los platos paralelos.

Sustituyendo la ecuación (8) en (7), se obtiene:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^h \left( -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y-h) \right) r \, dy \, d\theta \quad (9)$$

Véase que la variación de presión con respecto al radio, definida en la ecuación (9), es en realidad la primera derivada de la ecuación (3), con lo que se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{K_1}{r \, h^3} = \frac{(P_1 - P_2)}{r \, \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \quad (10)$$

Sustituyendo la ecuación (10) en la (9) e integrando, se obtiene:

$$Q_{\text{plato}} = \frac{\pi}{\mu} \frac{(P_1 - P_2)}{r \, \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \frac{h^3}{6} \quad (11)$$

Esta ecuación determina el caudal circulante entre los dos platos paralelos en función de la presión diferencial existente entre los extremos de los mismos, la viscosidad del fluido, la distancia entre platos y las dimensiones de estos.

#### 1b. Eje cilíndrico

En este segundo subapartado, se van a determinar el flujo y la distribución de presiones entre el eje de la máquina y la carcasa de la misma (v. figura 51.3).

El flujo a través del intersticio entre el eje giratorio y su alojamiento, flujo en dirección axial, en función de la presión existente entre los extremos del eje, es en realidad bidireccional, dado que  $V_x \neq 0$  y  $V_\theta \neq 0$ ; la ecuación diferencial resultante no puede ser



resuelta analíticamente. No obstante, si se asume la no existencia de rotación, el flujo tendrá únicamente dirección axial X. En este caso, la ecuación diferencial a resolver tendrá la forma:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \quad (12)$$

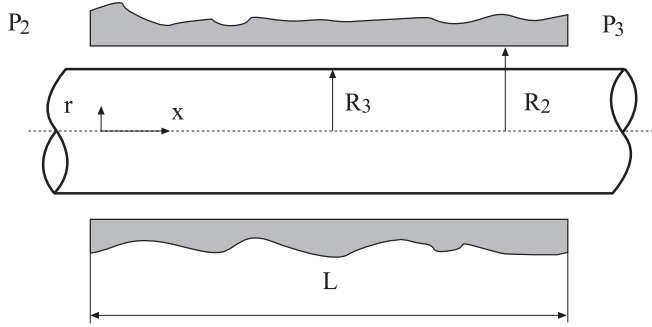


Fig. 51.3  
Conjunto eje  
giratorio y  
estator.  
Dimensiones  
principales

La variación de presión a lo largo del eje de la máquina puede expresarse como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_3 - p_2}{L} \quad (13)$$

Sustituyendo la ecuación (13) en (12) e integrando dos veces se obtiene:

$$V_x = \frac{p_3 - p_2}{L} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (14)$$

Las condiciones de contorno para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  son:

$$\text{Cuando } r = R_3 \Rightarrow V_x = 0, \text{ y cuando } r = R_2 \Rightarrow V_x = 0 \quad (15)$$

Una vez halladas las constantes y sustituidas en la ecuación (14), se obtiene:

$$V_x = \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(r^2 - R_3^2)}{4\mu} - \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4\mu \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \quad (16)$$

La ecuación (16) proporciona el perfil de velocidades parabólico existente entre los dos cilindros.

El flujo de fluido en el intersticio existente entre el eje y la carcasa será:

$$Q|_{\text{eje}} = \int_{R_3}^{R_2} V_x \cdot 2\pi r \, dr \quad (17)$$

Sustituyendo la ecuación (16) en la (17), se obtiene:



$$Q|_{\text{eje}} = \int_{R_3}^{R_2} \left[ \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(r^2 - R_3^2)}{4 \mu} - \frac{(p_3 - p_2)}{L} \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4 \mu \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_3}\right) \right] 2 \pi r \, dr \quad (18)$$

De la integración de la ecuación (18), se obtiene:

$$Q|_{\text{eje}} = \frac{\pi (p_3 - p_2)}{8 L \mu} (R_2^2 - R_3^2)^2 - \frac{\pi (p_3 - p_2)}{2 L \mu} \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \left[ \frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right] \quad (19)$$

Obsérvese que la ecuación (19) proporciona el flujo entre los dos cilindros en función de la diferencia de presión existente entre sus extremos, las dimensiones del conjunto y la viscosidad del fluido. La ecuación (11), por otro lado, daba el caudal volumétrico entre dos platos giratorios y paralelos, pero ambos caudales han de ser en todo momento el mismo; en consecuencia, de la igualación de las ecuaciones (11) y (19) se obtendrá la presión en el punto de intersección entre el plato y el eje, presión  $P_2$ , siendo su valor:

$$p_2 = \frac{\frac{p_1 h^3}{3 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - p_3 \left[ \frac{(R_2^2 - R_3^2)^2}{4 L} - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{L \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \left( \frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right) \right]}{\frac{h^3}{3 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} - \left[ \frac{(R_2^2 - R_3^2)^2}{4 L} - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{L \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)} \left( \frac{R_2^2}{2} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - \frac{(R_2^2 - R_3^2)}{4} \right) \right]} \quad (20)$$

Para determinar la distribución de presiones a lo largo del eje de la máquina, se puede utilizar la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cartesianas, aunque el intersticio eje-carcasa tenga la forma de un cilindro hueco. Dicha ecuación en modo unidimensional toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{b^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (21)$$

Su integración da lugar a:

$$P = \frac{\Lambda}{b^3} \mu X + B \quad (22)$$

Para el caso que nos ocupa, el parámetro  $b$  es, en realidad,  $b = (R_2 - R_3)$



Las condiciones de contorno para determinar las constantes A y B son:

$$\text{cuando } X = 0 \Rightarrow p = p_2 \text{ y cuando } X = L \Rightarrow p = p_3 \quad (23)$$

Una vez las constantes han sido halladas y sustituidas en la ecuación (22), se obtiene:

$$P = \frac{(p_3 - p_2)}{L} X + P_2 \quad (24)$$

ecuación que proporciona la caída de presión a lo largo del eje de la máquina. Obsérvese que la presión decae linealmente, tal como se estableció en la ecuación (13).

2. En este segundo apartado, se va aplicar la teoría de cojinetes hidrodinámicos infinitamente largos al eje de la máquina, con el fin de determinar la estabilidad del mismo.

La figura 51.4 muestra el eje en estudio, indicando el posible desplazamiento del mismo. La figura 51.5 presenta una sección transversal del conjunto eje y carcasa, donde se observa la posición relativa del rotor *versus* el estátor.

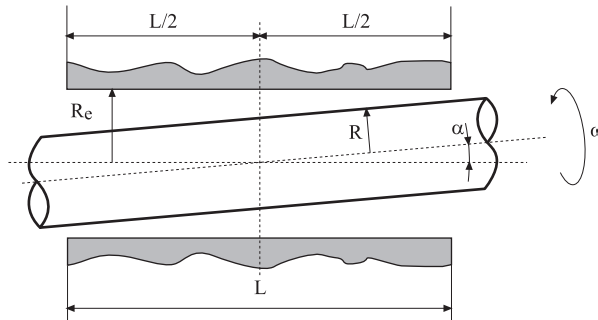


Fig. 51.4  
Desplazamiento  
genérico del eje  
con respecto a la  
carcasa

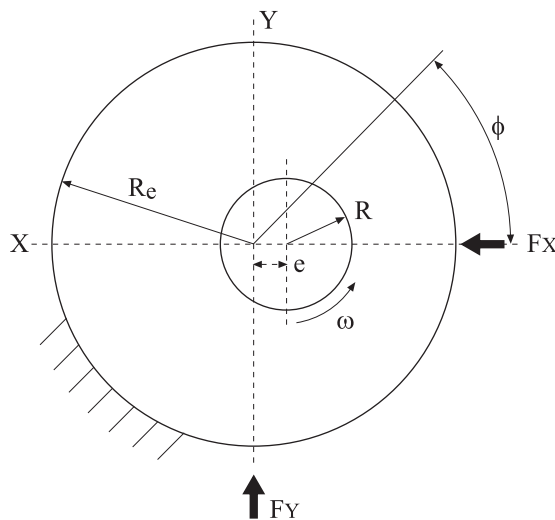


Fig. 51.5  
Posición  
relativa  
genérica del eje  
versus el  
estátor.  
Sección frontal



De acuerdo con las figuras 51.4 y 51.5, se puede definir:

$$\bar{h} = R_e - R \quad (25)$$

$$\psi = \frac{\bar{h}}{R} = \frac{R_e - R}{R} \quad (26)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{h} \quad (27)$$

$$h_{(\varphi)} = \bar{h} (1 - \varepsilon \cos \varphi) \quad (28)$$

Asumiendo el flujo de Couette-Poiseuille, el flujo volumétrico entre estátor y rotor puede expresarse como:

$$\dot{V} = Q = \frac{1}{2} U h_{(\varphi)} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{12 \mu} h_{(\varphi)}^3 \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (29)$$

Para el presente caso:  $dx = R d\varphi$

Integrando la ecuación (29) con respecto a la presión entre 0 y  $2\pi$ , y extrayendo el flujo volumétrico, se obtiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \omega R^2 \psi \frac{I_2}{I_3}; \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (30)$$

donde:

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} d\varphi = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \quad (31)$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} d\varphi = \frac{\pi (2 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \quad (32)$$

Integrando de nuevo la ecuación (29), ahora entre 0 y un ángulo genérico  $\varphi$ , y sustituyendo la ecuación del flujo volumétrico (30) en dicha ecuación (29), se obtiene:

$$p = -6 \frac{\mu}{\psi^2} \frac{\omega \varepsilon \sin \varphi (2 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 (2 + \varepsilon^2)} + C \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (33)$$

La constante de integración que se obtiene en la ecuación (33) debe ser hallada mediante una condición de contorno, que es la presión en una posición angular genérica ( $\varphi = \gamma$ ) conocida, con lo que la ecuación final que caracteriza la distribución de presiones en dirección angular toma la forma:

$$p = -6 \frac{\mu}{\psi^2} \frac{\omega \varepsilon \sin \varphi (2 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)^2 (2 + \varepsilon^2)} + p_{(\gamma)} \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (34)$$





Las fuerzas en las direcciones X e Y (horizontal y vertical) se definen como (v. figura 51.5):

$$F_Y = - \int_0^{2\pi} p \sin \varphi R d\varphi \quad (35)$$

$$F_X = - \int_0^{2\pi} p \cos \varphi R d\varphi \quad (36)$$

La integración de las ecuaciones (35) y (36) da como resultado:

$$F_Y = \frac{6 \mu \omega R}{\Psi} \left( \frac{I_2 I_5 - I_3 I_4}{I_3} \right) \quad (37)$$

$$F_X = \frac{6 \mu \omega R}{\Psi^2} \left( \frac{I_6 I_3 - I_7 I_2}{I_3} \right) \quad (38)$$

donde:

$$I_4 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \cos \varphi d\varphi = \frac{I_2 - I_1}{\varepsilon} \quad (39)$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \cos \varphi d\varphi = \frac{I_3 - I_2}{\varepsilon} \quad (40)$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-1} d\varphi = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{1/2}} \quad (41)$$

$$I_6 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-2} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (42)$$

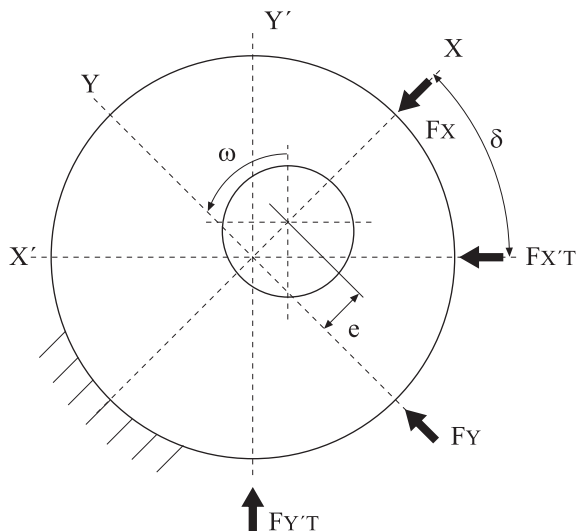
$$I_7 = \int_0^{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi)^{-3} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad (43)$$

El valor de las integrales  $I_2$  e  $I_3$  se ha dado en las ecuaciones (31) y (32). Obsérvese que la fuerza  $F_x$  para la posición estudiada tiene un valor nulo.

Asúmase ahora que el eje está situado en una posición genérica definida por el ángulo  $\delta$ , tal y como muestra la figura 51.6. Las fuerzas horizontales y verticales quedarán ahora definidas como:



Fig. 51.6  
Vista frontal del  
cojinete  
hidrodinámico.  
El eje se ha  
situado ahora  
en una posición  
genérica

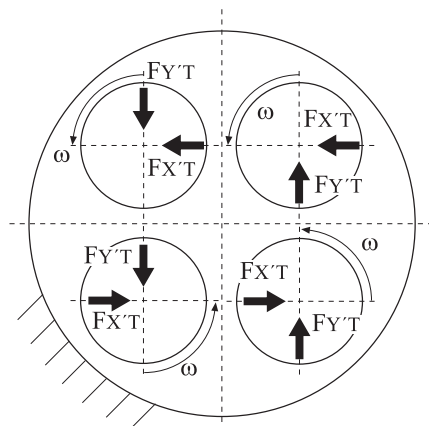


$$F_{Y'T} = F_Y \cos \delta - F_X \sin \delta \quad (44)$$

$$F_{X'T} = -F_Y \sin \delta - F_X \cos \delta \quad (45)$$

Puesto que, en este segundo apartado, lo que se quiere es evaluar la estabilidad del eje, el siguiente paso será visualizar las fuerzas que actúan sobre el eje para cualquier posición del mismo. La figura 51.7 presenta la fuerza resultante horizontal y vertical que actúa sobre el eje en función de la posición del mismo. Obsérvese que el eje tenderá a moverse hacia arriba o hacia abajo dependiendo de la posición temporal en que se encuentre. Es de esperar que el eje se mueva en forma elíptica dentro de su alojamiento.

Fig. 51.7  
Direcciones de  
las fuerzas  
actuantes  
sobre el eje, en  
función de la  
posición  
relativa del  
mismo



Con el fin de clarificar este efecto, las figuras 51.8 y 51.9 presentan las fuerzas verticales y horizontales actuantes sobre el eje, en función de su posición relativa con respecto al estátor y para una excentricidad  $e$  dada. Obsérvese que dichas fuerzas cambian en magnitud y dirección dependiendo de la posición del eje, tal como se ha mostrado en la figura 51.7.

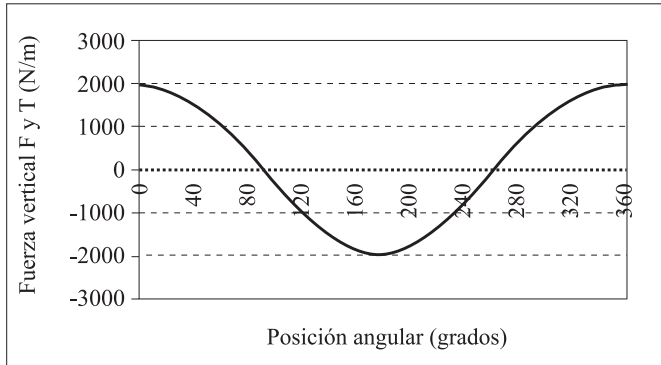


Fig. 51.8  
Fuerza horizontal  $F_y T$  como función de la posición del eje central, definida por el ángulo  $\delta$ . Los parámetros utilizados en el cálculo son: radio del eje  $R = 0,01$  m; la velocidad de giro 5000 rad/s; distancia media entre eje y carcasa  $h = R_e - R = 10$  micras; excentricidad  $e = 1$  micra; fluido de trabajo aire, viscosidad  $1,983 \text{ E-5 (Kg/m s)}$

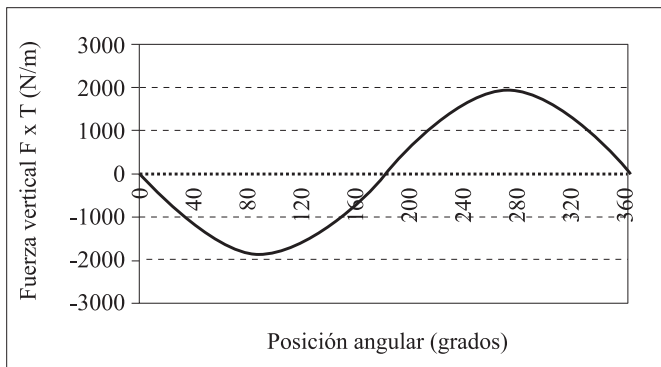


Fig. 51.9  
Fuerza horizontal  $F_x T$  como función de la posición del eje central, definida por el ángulo  $\delta$ . Los parámetros utilizados en el cálculo son: radio del eje  $R = 0,01$  m; la velocidad de giro 5000 rad/s; distancia media entre eje y carcasa  $h = R_e - R = 10$  micras; excentricidad  $e = 1$  micra; fluido de trabajo aire, viscosidad  $1,983 \text{ E-5 (Kg/m s)}$

Las fuerzas calculadas hasta este punto son fuerzas por unidad de longitud del eje. Así, para determinar el par que tiende a equilibrar el eje y mantenerlo en posición horizontal, se debería entender que las fuerzas calculadas actúan sobre un elemento diferencial de longitud del eje. En lo que sigue, se va a dividir el eje en varias porciones y se determinará el par que se crea en cada una de las porciones, par debido a las fuerzas horizontales y verticales que actúan sobre cada porción de eje, cuya excentricidad es conocida; considerando además para cada caso y, a efecto de la realización de cálculos, la distancia central de cada porción. El par total será la suma de los pares asociados a cada una de las porciones de eje, (v. figura 51.10).

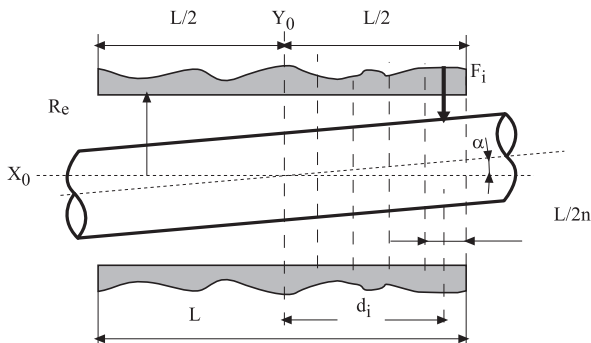


Fig. 51.10  
Posición genérica del eje, la mitad del cual ha sido dividido en varias porciones



A continuación, se definirán los pares individuales creados en cada una de las porciones del eje. Es necesario remarcar que cada porción de eje lleva asociada una excentricidad media y una posición del eje con respecto al plano coordenado (figura 51.7), las cuales se utilizan para realizar los cálculos de las fuerzas actuantes sobre la porción de eje considerada. Asimismo, debe remarcarse que cada par lleva su propio signo asociado.

Primer caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo  $0 < \delta < 90^\circ$  (v. figura 51.11). Los pares con respecto a los tres ejes coordenados producidos por una porción del eje situado en una posición definida en la figura 51.11 se definen del modo siguiente. (Los ejes  $X_0$  e  $Y_0$  se han definido en la figura 51.10; el eje  $Z$  es perpendicular al plano del papel).

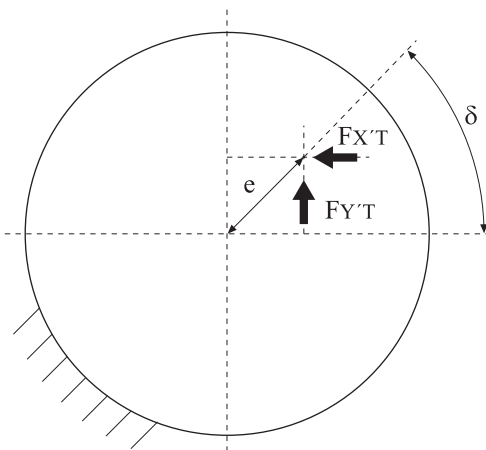
$$M_{iZ_0} = F_{iY'T} * d_i \quad (\text{empuja el eje hacia arriba}) \quad (46)$$

$$M_{iX_0} = F_{iX'T} * e * \sin \delta + F_{iY'T} * e * \cos \delta$$

$$M_{iY_0} = F_{iX'T} * d_i$$

Recuérdese que las unidades de la fuerza y el par son  $F_i = \left[ \frac{N}{m} \right]$ ;  $M_i = \left[ \frac{N * m}{m} \right]$

Fig. 51.11  
Ejemplo de  
situación del  
eje para el  
primer caso



Segundo caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo  $90^\circ < \delta < 180^\circ$  (v. figura 51.12). Los pares resultantes son ahora:

$$M_{iZ_0} = F_{iY'T} * d_i \quad (\text{empuja el eje hacia abajo}) \quad (47)$$

$$M_{iX_0} = F_{iX'T} * e * \sin(180 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(180 - \delta)$$

$$M_{iY_0} = F_{iX'T} * d_i$$

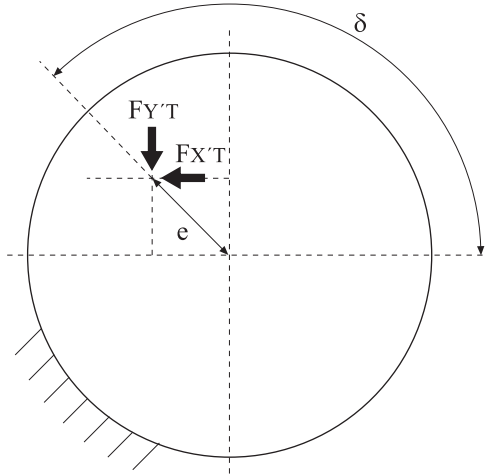


Fig. 51.12  
Ejemplo de  
situación del  
eje para el  
segundo caso

Tercer caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo  $180^\circ < \delta < 270^\circ$  (v. figura 51.13). Para este caso, se obtiene:

$$M_{iZ_0} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia abajo)} \quad (48)$$

$$M_{iX_0} = F_{iX'T} * e * \sin(270 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(270 - \delta)$$

$$M_{iY_0} = F_{iX'T} * d_i$$

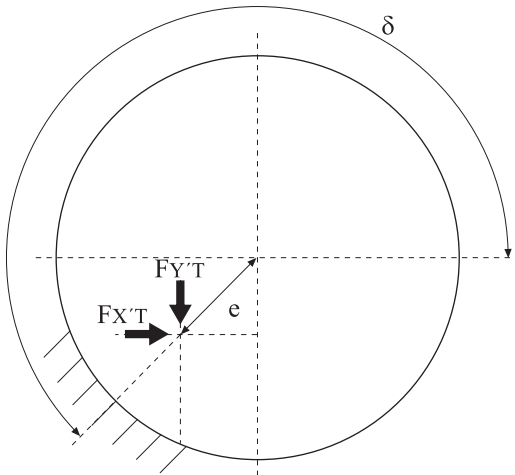


Fig. 51.13  
Ejemplo de  
situación del  
eje para el  
tercer caso

Cuarto caso. La posición del eje está localizada entre un ángulo  $270^\circ < \delta < 360^\circ$  (v. figura 51.14).

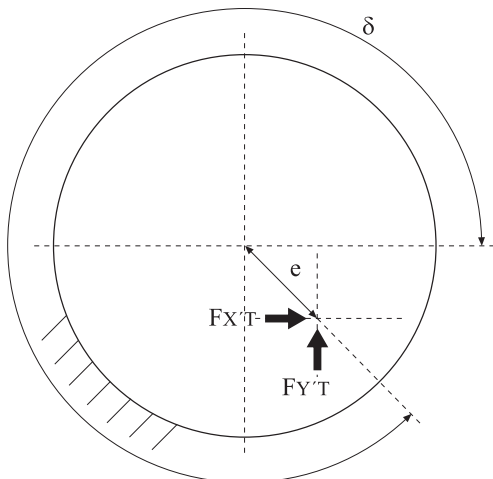
$$M_{iZ_0} = F_{iY'T} * d_i \text{ (empuja el eje hacia arriba).} \quad (49)$$

$$M_{iX_0} = F_{iX'T} * e * \sin(360 - \delta) + F_{iY'T} * e * \cos(360 - \delta)$$

$$M_{iY_0} = F_{iX'T} * d_i$$



Fig. 51.14  
Ejemplo de  
situación del  
eje para el  
cuarto caso



Para calcular el par producido por todo el colectivo de porciones de eje, es necesario determinar para cada caso la distancia  $d_i$  entre el centro del pedazo de eje considerado y el punto de giro del eje de la turbina.

Considerando que el número de porciones de eje es  $n$  y que la excentricidad máxima es  $e_{\max}$ , la excentricidad del centro de cada porción de eje será:

$$e_i = \frac{e_{\max} \frac{L}{n} \left( \frac{n-2i}{2} \right)}{\frac{L}{n} \frac{n}{2}} = \frac{e_{\max}}{n} (n-2i) = e_{\max} \left( 1 - \frac{2i}{n} \right) \quad (50)$$

donde  $0 < i < \frac{n-2}{2}$

La figura 51.15 presenta el par restaurador total ( $M_{ZOT}$ ) actuante sobre el eje de la turbina para tres configuraciones de eje diferentes, para una misma excentricidad  $e$  y en función de la velocidad de giro del eje. Las tres configuraciones del eje son (v. figuras 51.7 y 51.10-51.14).

- Un extremo del eje está situado en la parte inferior derecha, ángulo de  $(315^\circ)$  (v. figura 51.14), y el otro extremo del eje está situado en la parte superior izquierda, siendo su posición angular  $(135^\circ)$  (v. figura 51.12).
- Un extremo del eje está situado en la parte inferior izquierda, formando un ángulo de  $(225^\circ)$  (v. ver figura 51.13), mientras que el extremo opuesto del eje está situado en la parte superior derecha del plano, formando un ángulo de  $(45^\circ)$  (v. figura 51.11).
- En este tercer caso, se supone que los extremos opuestos de los ejes están situados en las posiciones angulares de  $(270^\circ)$  y  $(90^\circ)$ , respectivamente.

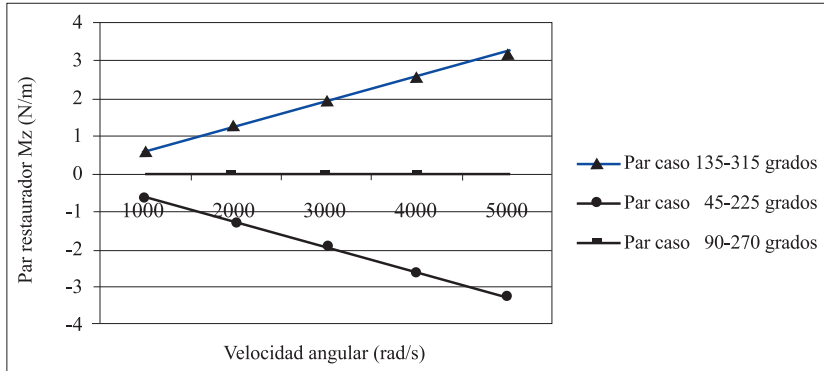


Fig. 51.15  
Relación entre el par total actuante sobre el eje (M<sub>ZoT</sub>) en función de la velocidad de giro del mismo y para las tres configuraciones de los ejes establecidas

Finalmente, es necesario remarcar que los cojinetes hidrodinámicos, suelen tener una ranura longitudinal cortada en el estátor, a través de la cual se inyecta fluido en el intersticio rotor-estátor. La presión del fluido a la salida de dicha ranura (fluido entrante en el cojinete) ha de tener un valor mínimo, con el fin de evitar la aparición de cavitación en el fluido circulante dentro del cojinete. En el presente caso, si el fluido de trabajo es aire, no existe riesgo de cavitación. No obstante, la ranura longitudinal podría ser utilizada para introducir aire presurizado en el sistema. La presión de alimentación ha de entenderse como un parámetro que permite modificar la rigidez del sistema, y que puede ayudar a estabilizar el movimiento del eje.

## Problema 52

### Enunciado

Sea un patín deslizante (patín de Michel) que se desplaza a lo largo de una placa plana. La distancia mínima entre placa y patín debe ser de  $h = 0,15 \text{ mm}$  y su inclinación se ha estipulado en  $\alpha = 0,2^\circ$ , su longitud es de  $L_p = 0,05 \text{ m}$ . El patín debe soportar  $850 \text{ N}$ . El fluido entre patín y placa es aceite SAE 10 cuya viscosidad a  $20^\circ$  es  $\mu = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Kg}}{\text{ms}}$ .

Si se desea que la velocidad de desplazamiento del patín sea de  $80 \text{ m/s}$ . Halle:

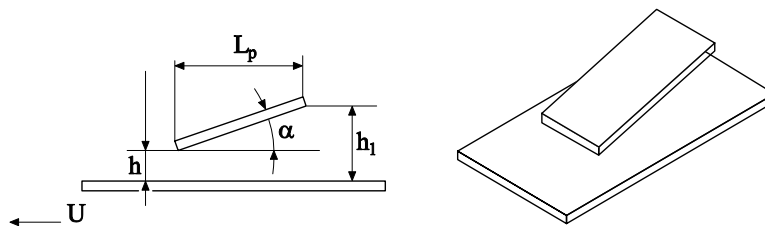


Fig. 52.1  
Esquema del patín de Michel propuesto

1. La profundidad que deberá tener dicho patín.
2. La fuerza de arrastre necesaria para desplazar dicho patín.
3. ¿Está dicho patín optimizado?. ¿Por qué?



## Resolución

1. Se establece la relación:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1 - h}{L_p} = \frac{\Delta h}{L_p}$$

$$\Delta h = 0,05 \operatorname{tg}(0,2) = 0,000174 \text{ m}$$

La relación de alturas es:  $K = \frac{h_1}{h} = \frac{0,00032}{0,00015} = 2,13$

La fuerza de sustentación por unidad de profundidad y en forma paramétrica viene dada por la ecuación (parámetro K).

$$L = \frac{1}{h^2} \frac{6\mu U L_p^2}{(K-1)^2} \left[ \ln(K) - \frac{2(K-1)}{K+1} \right]$$

$$L = \frac{1}{0,00015^2} \frac{6 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot U \cdot 0,05^2}{(2,13-1)^2} \left[ \ln(2,13) - \frac{2(2,13-1)}{2,13+1} \right]$$

$$L = 515,95 \cdot 80 = 41.276,64 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$$

Si el patín ha de soportar un total de 8500 N, la profundidad del mismo será:

$$\frac{850}{41276,64} = 0,0206 \text{ m}$$

2. La fuerza de arrastre en forma paramétrica viene dada por:

$$D = \frac{2\mu U L_p}{(K-1)h} \left[ 2 \ln(K) - \frac{3(K-1)}{K+1} \right]$$

$$D = \frac{2 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 0,05}{(2,13-1) \cdot 0,00015} \left[ 2 \ln(2,13) - \frac{3(2,13-1)}{2,13+1} \right]$$

$$D = 587,09 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Teniendo en cuenta la profundidad del patín, se obtiene una fuerza de arrastre de:

$$D_{\text{total}} = 587,09 \cdot 0,0206 = 12,08 \text{ N}$$

3. Un patín se considera optimizado cuando la fuerza de sustentación respecto al pará-

metro  $K = \frac{h_1}{h}$  es máxima; si se deriva  $\frac{dL}{dK} = 0$ , se obtendrá el valor de K óptimo, que

es de  $\boxed{K = 2,2}$



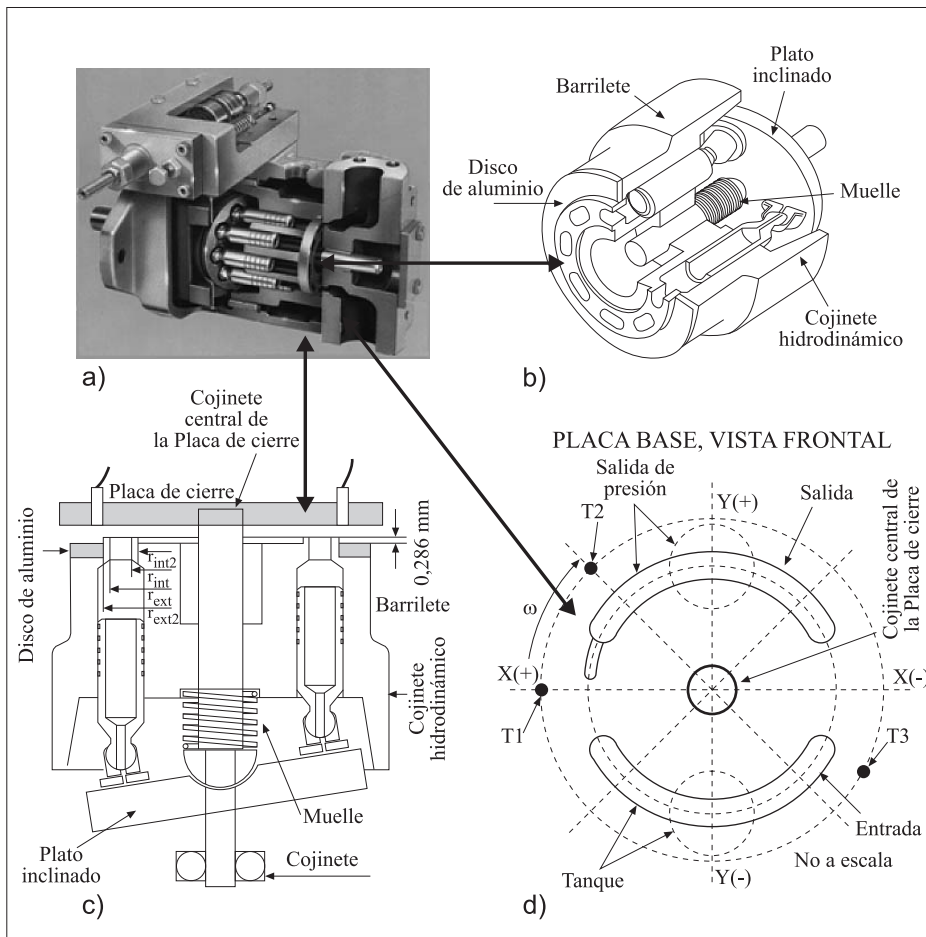


Para este problema se tiene que  $K = 2,13$ , con lo cual se establece que el patín de Michel no está optimizado, aunque no está lejos de estarlo.

## Problema 53

### Enunciado

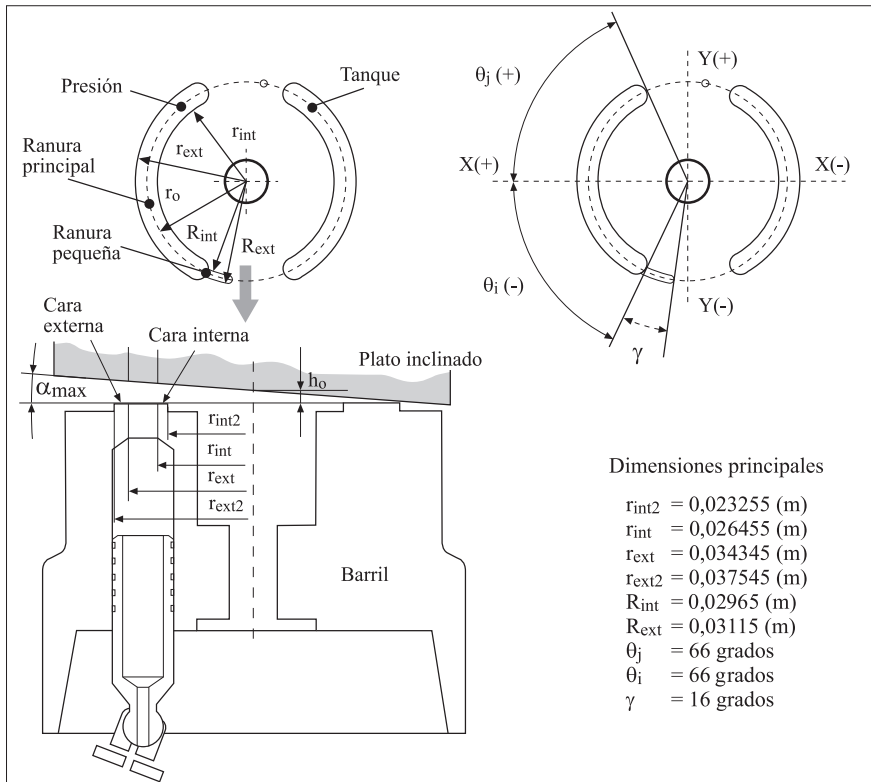
En bombas hidráulicas de pistones, se ha observado que, a través del intersticio existente entre el barrilete y la placa de cierre, se fuga una cierta cantidad de fluido, lo cual hace que el rendimiento volumétrico de la máquina disminuya. En este problema, se quiere estudiar cuál es el caudal de fugas existente entre el barrilete y la placa base, dada una posición genérica entre ambos; se quiere asimismo determinar las fuerzas que la película de fluido crea sobre el barrilete, así como los pares generados por dichas fuerzas.





La figura 53.1c muestra el intersticio teórico existente entre la placa base o placa de cierre (*port plate*) y el barrilete (*barrel*). Dicho intersticio es teórico, puesto que, en dicha figura, parece que sea independiente del radio y de la posición angular. En realidad, esto no es así, y en la figura 53.2 se muestra la situación real del barrilete con respecto a la placa base, obsérvese que existe una pequeña inclinación entre ambos. Las dimensiones principales están definidas en la figura 53.2.

Fig. 53.2  
Inclinación  
entre el barril  
y la placa base, y  
sus dimensio-  
nes principales.



## Resolución

De las figuras 53.1 y 53.2, se desprende que el fluido que, en realidad, debería ir desde la cámara del pistón hacia la brida de impulsión de la bomba, pasando por la placa base, parcialmente se fuga por el intersticio existente entre el barrilete y la placa de cierre. Obsérvese, en la figura 53.2, que el fluido ha de atravesar una región de una anchura comprendida entre  $r_{ext2}$  y  $r_{ext}$  para fluir en dirección radial hacia el exterior de la bomba, pero también se puede fugar hacia el eje de la bomba, lo cual implica que la región a atravesar, en este caso, tiene una anchura comprendida entre  $r_{int}$  y  $r_{int2}$ . El fluido también puede fugarse en ambas direcciones mencionadas, pero partiendo de la ranura pequeña situada a la entrada de la ranura grande. Para este caso, el fluido deberá atravesar una anchura entre placas comprendida entre  $r_{ext2}$  y  $R_{ext}$  si se fuga hacia el



exterior, y entre  $R_{\text{int}}$  y  $r_{\text{int}2}$  si la fuga es hacia el eje de la bomba. Nótese, además que, los diversos intersticios por donde se puede fugar el fluido tienen una altura variable, tanto en dirección radial como en dirección angular, debido a la inclinación del barrilete con respecto a la placa base.

La ecuación que determina la altura variable del intersticio por donde se fuga el fluido se ha definido en la ecuación 1.

$$h = h_0 + \alpha r_m \cos \theta \quad (1)$$

Los valores de  $h_0$ ,  $\alpha_{\text{max}}$ , y  $\theta$ , se han definido en la figura 53.2, siendo  $r_m$  el radio medio entre los radios mayor y menor de cada superficie en estudio. Por ejemplo, para la superficie externa, *cara externa*, dicho radio medio será  $r_{m \text{ ext}} = \frac{r_{\text{ext}} + r_{\text{ext}2}}{2}$ . Obsérvese que el ángulo de inclinación  $\alpha$  tiene su valor máximo  $\alpha_{\text{max}}$  en la dirección del eje X(+).

La derivada de la ecuación (1) con respecto al ángulo  $\theta$  da lugar a:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -\alpha r_m \sin \theta \quad (2)$$

Por otro lado, la ecuación de lubricación de Reynolds en coordenadas cilíndricas ha de permitir determinar la distribución de presiones en dirección radial y dentro de un intersticio genérico delimitado por los radios exterior e interior. Dicha ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r h^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 6\mu \omega r \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1) y (2) en (3), y procediendo a realizar la primera de las integraciones, se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{3\mu \omega \alpha r_m \sin \theta r}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} + \frac{c_1}{r (h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \quad (4)$$

La segunda integración da lugar a:

$$p = -\frac{3\mu \omega \alpha r_m \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \frac{r^2}{2} + \frac{c_1}{(h_0 + \alpha r_m \cos \theta)^3} \ln r + c_2 \quad (5)$$

La ecuación (5) puede aplicarse a cada una de las cuatro superficies por donde existe fuga de fluido, superficies delimitadas por los radios  $r_{\text{ext}2}$  y  $r_{\text{ext}}$ , *cara externa*;  $r_{\text{int}}$  y  $r_{\text{int}2}$ , *cara interna*,  $r_{\text{ext}2}$  y  $R_{\text{ext}}$ , *ranura pequeña, cara externa*; y  $R_{\text{int}}$  y  $r_{\text{int}2}$ , *ranura pequeña, cara interna*, “small groove, internal land”. Para la resolución de la ecuación (5) en cada uno de estos casos, se deberán aplicar las condiciones de contorno apropiadas para cada caso, con el fin de determinar las constantes de integración. Así, para las caras externa e interna asociadas a la ranura mayor, las condiciones de contorno serán:



*Cara externa.*

$$r = r_{\text{ext}} \quad p = p_{\text{int}} \quad (6)$$

$$r = r_{\text{ext}2} \quad p = p_{\text{ext}} = p_{\text{tank}}$$

$$r_{m \text{ ext}} = \frac{r_{\text{ext}} + r_{\text{ext}2}}{2}$$

*Cara interna.*

$$r = r_{\text{int}} \quad p = p_{\text{int}} \quad (7)$$

$$r = r_{\text{int}2} \quad p = p_{\text{ext}} = p_{\text{tank}}$$

$$r_{m \text{ int}} = \frac{r_{\text{int}} + r_{\text{int}2}}{2}$$

De la aplicación de las condiciones de contorno (6) para la cara externa, se obtiene:

$$p_{\text{int}} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m \text{ ext}} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ ext}} \cos \theta)^3} \frac{r_{\text{ext}}^2}{2} + \frac{c_1}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ ext}} \cos \theta)^3} \ln r_{\text{ext}} + c_2 \quad (8)$$

$$p_{\text{ext}} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m \text{ ext}} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ ext}} \cos \theta)^3} \frac{r_{\text{ext}2}^2}{2} + \frac{c_1}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ ext}} \cos \theta)^3} \ln r_{\text{ext}2} + c_2 \quad (9)$$

Y, aplicando las condiciones de contorno (7) para la cara interna, se llega a:

$$p_{\text{int}} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m \text{ int}} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ int}} \cos \theta)^3} \frac{r_{\text{int}}^2}{2} + \frac{c_3}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ int}} \cos \theta)^3} \ln r_{\text{int}} + c_4 \quad (10)$$

$$p_{\text{ext}} = -\frac{3\mu\omega\alpha r_{m \text{ int}} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ int}} \cos \theta)^3} \frac{r_{\text{int}2}^2}{2} + \frac{c_3}{(h_0 + \alpha r_{m \text{ int}} \cos \theta)^3} \ln r_{\text{int}2} + c_4 \quad (11)$$

De las ecuaciones (8) y (9), se obtienen los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$ , y de las ecuaciones (10) y (11), se obtienen los valores de las constantes  $C_3$  y  $C_4$ . Estos valores son:



$$c_1 = \left[ p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} - \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{m ext}} \sin\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3} \frac{(r_{\text{ext}2}^2 - r_{\text{ext}}^2)}{2} \right] \frac{(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \quad (12)$$

$$c_3 = \left[ p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} - \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{m int}} \sin\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{m int}} \cos\theta)^3} \frac{(r_{\text{int}2}^2 - r_{\text{int}}^2)}{2} \right] \frac{(h_0 + \alpha r_{\text{m int}} \cos\theta)^3}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} \quad (13)$$

$$c_2 = p_{\text{int}} \left( 1 - \frac{\ln r_{\text{ext}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \right) + p_{\text{ext}} \frac{\ln r_{\text{ext}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{m ext}} \sin\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3} \frac{1}{2} \left[ r_{\text{ext}}^2 + \frac{\ln r_{\text{ext}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} (r_{\text{ext}2}^2 - r_{\text{ext}}^2) \right] \quad (14)$$

$$c_4 = p_{\text{int}} \left( 1 - \frac{\ln r_{\text{int}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} \right) + p_{\text{ext}} \frac{\ln r_{\text{int}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{m int}} \sin\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{m int}} \cos\theta)^3} \frac{1}{2} \left[ r_{\text{int}}^2 + \frac{\ln r_{\text{int}}}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} (r_{\text{int}2}^2 - r_{\text{int}}^2) \right] \quad (15)$$

Sustituyendo los valores de las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , y  $C_4$ , en las ecuaciones (8)-(11), se obtiene la distribución de presiones en función del radio.

Para la cara externa,  $r_{\text{extr}} < r < r_{\text{exter}2}$ :

$$p_{\text{cara ext}} = p_{\text{int}} \left( 1 + \frac{\ln \frac{r}{r_{\text{ext}}}}{\ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}} \right) + p_{\text{ext}} \frac{\ln \frac{r_{\text{ext}}}{r}}{\ln \frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{m ext}} \sin\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3} \frac{1}{2} \left[ (r_{\text{ext}}^2 - r^2) + \frac{(r_{\text{ext}2}^2 - r_{\text{ext}}^2) \ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \right] \quad (16)$$



Para la cara interna,  $r_{int2} < r < r_{int}$ :

$$p_{cara\ int} = p_{int} \left( 1 + \frac{\ln \frac{r}{r_{int2}}}{\ln \frac{r_{int}}{r_{int2}}} \right) + p_{ext} \frac{\ln \frac{r_{int}}{r}}{\ln \frac{r_{int}}{r_{int2}}} + \frac{3\mu\omega\alpha r_{m\ int} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{m\ int} \cos \theta)^3 2} \left[ (r_{int}^2 - r^2) + \frac{(r_{int2}^2 - r_{int}^2) \ln \left( \frac{r_{int}}{r} \right)}{\ln \left( \frac{r_{int}}{r_{int2}} \right)} \right] \quad (17)$$

El mismo procedimiento ha de ser utilizado para determinar las distribuciones de presión en las caras interior y exterior en contacto con la ranura pequeña. Las condiciones de contorno para este caso son:

Para la *cara externa, ranura pequeña*

$$r = R_{ext}; \quad p = p_{int} \quad (18)$$

$$r = r_{ext2}; \quad p = p_{ext} = p_{tank}$$

$$R_{m\ ext} = \frac{R_{ext} + r_{ext2}}{2}$$

Para la *cara interna, ranura pequeña*

$$r = R_{int}; \quad p = p_{int} \quad (19)$$

$$r = r_{int2}; \quad p = p_{ext} = p_{tank}$$

$$R_{m\ int} = \frac{R_{int} + r_{int2}}{2}$$

Aplicando las nuevas ecuaciones de contorno (18) y (19) en la ecuación (5), y después de repetir el proceso detallado hasta el momento, se obtiene:

Para la cara externa, ranura pequeña,  $R_{ext} < r < r_{ext2}$ :

$$p_{cara\ ext\ sg} = p_{int} \left( 1 + \frac{\ln \frac{r}{R_{ext}}}{\ln \frac{R_{ext}}{r_{ext2}}} \right) + p_{ext} \frac{\ln \frac{r_{ext}}{r}}{\ln \frac{R_{ext}}{r_{ext2}}} + \frac{3\mu\omega\alpha R_{m\ ext} \sin \theta}{(h_0 + \alpha R_{m\ ext} \cos \theta)^3 2} \left[ (R_{ext}^2 - r^2) + \frac{(r_{ext2}^2 - R_{ext}^2) \ln \left( \frac{R_{ext}}{r} \right)}{\ln \left( \frac{R_{ext}}{r_{ext2}} \right)} \right] \quad (20)$$



Para la cara interna, ranura pequeña,  $r_{int2} < r < R_{int}$ :

$$p_{cara\ int_{sg}} = p_{int} \left( 1 + \frac{\ln \frac{r}{R_{int}}}{\ln \frac{R_{int}}{r_{int2}}} \right) + p_{ext} \frac{\ln \frac{R_{int}}{r}}{\ln \frac{R_{int}}{r_{int2}}} + \frac{3\mu\omega\alpha R_{m\ int} \sin \theta}{(h_0 + \alpha R_{m\ int} \cos \theta)^3} \frac{1}{2} \left[ (R_{int}^2 - r^2) + \frac{(r_{int2}^2 - R_{int}^2) \ln \left( \frac{R_{int}}{r} \right)}{\ln \left( \frac{R_{int}}{r_{int2}} \right)} \right] \quad (21)$$

Una vez determinadas las distribuciones de presiones, el siguiente paso es hallar el caudal que fluye a través de cada uno de los cuatro intersticios considerados.

La distribución de velocidades, en función de la altura genérica y para un intersticio dado, se define de acuerdo con la ley de Poiseuille. Así, para la cara externa e interna de la ranura principal, se puede establecer:

Para la *cara externa, ranura principal*:

$$v_e = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y - h) \quad (22)$$

donde:

$$h = h_0 + \alpha r_{m\ ext} \cos \theta \quad (23)$$

Para la *cara interna, ranura principal*:

$$v_i = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \frac{y}{2} (y - h) \quad (24)$$

donde:

$$h = h_0 + \alpha r_{m\ int} \cos \theta \quad (25)$$

Los términos  $\frac{dp}{dr}$  establecidos en las ecuaciones (22) y (24) son, en realidad, la primera derivada de la ecuación (3), es decir, la ecuación (4). Recuértese que la constante asociada a la ecuación (4) es diferente para cada una de las caras. Así, para la cara externa, se tiene:

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{3\mu\omega\alpha r_{m\ ext} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{m\ ext} \cos \theta)^3} + \frac{c_1}{r (h_0 + \alpha r_{m\ ext} \cos \theta)^3} \quad (26)$$



Y, para la cara interna, se define:

$$\frac{dp}{dr} = \left[ -\frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{mint}} \sin\theta r}{(h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos\theta)^3} + \frac{c_3}{r(h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos\theta)^3} \right] * (-1) \quad (27)$$

El signo negativo asociado a la ecuación (27) se utiliza para denotar que, en la cara interna, la presión disminuye al disminuir el radio.

El caudal de fugas que fluye por las caras externa e interna, asociadas a la ranura principal, se definirá como:

$$Q_{\text{fugas}} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_0^h v_e r \, dy \, d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_0^h v_i r \, dy \, d\theta = Q_{\text{ext}} + Q_{\text{int}} \quad (28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (22-23) y (26) en la primera integral de la ecuación (28), y realizando la integración en dirección Y, se obtiene:

Para la cara externa:

$$Q_{\text{ext}} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} -\frac{(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3}{12\mu} r \left[ -\frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{m ext}} \sin\theta r}{(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3} + \frac{c_1}{r(h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3} \right] d\theta \quad (29)$$

Si se considera la entalla principal como simétrica, es decir,  $|\theta_j| = |-\theta_i|$  entonces, la ecuación (29) toma la forma:

$$Q_{\text{ext}} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \frac{(p_{\text{ext}} - p_{\text{int}})}{12\mu \ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} (h_0 + \alpha r_{\text{m ext}} \cos\theta)^3 d\theta \quad (30)$$

cuya integración da lugar a:

$$Q_{\text{ext}} = \frac{(p_{\text{ext}} - p_{\text{int}})}{12\mu \ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} * \left[ h_0^3 [\theta]_{-\theta_i}^{\theta_j} + 3h_0^2 \alpha r_{\text{m ext}} [\sin\theta]_{-\theta_i}^{\theta_j} + 3h_0 \alpha^2 r_{\text{m ext}}^2 \left[ \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{\theta}{2} \right]_{-\theta_i}^{\theta_j} + \alpha^3 r_{\text{m ext}}^3 \left[ \frac{1}{12} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin\theta \right]_{-\theta_i}^{\theta_j} \right] \quad (31)$$





Sustituyendo ahora las ecuaciones (24-25) y (27) en la segunda integral de la ecuación (28), y realizando la integración en dirección Y, se obtiene:

$$Q_{\text{int}} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \frac{(h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos \theta)^3}{12 \mu} r \left[ -\frac{3 \mu \omega \alpha r_{\text{mint}} \sin \theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos \theta)^3} + \frac{c_3}{r (h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos \theta)^3} \right] d\theta \quad (32)$$

Si se considera la entalla principal como simétrica, es decir,  $|\theta_j| = |-\theta_i|$ , entonces la ecuación (32) tomará la forma:

$$Q_{\text{int}} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} -\frac{(p_{\text{ext}} - p_{\text{int}})}{12 \mu \ln \left( \frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}} \right)} (h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos \theta)^3 d\theta \quad (33)$$

De la integración de la ecuación (33), se obtiene:

$$Q_{\text{int}} = -\frac{(p_{\text{ext}} - p_{\text{int}})}{12 \mu \ln \left( \frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}} \right)} * \left[ h_0^3 [\theta]_{-\theta_i}^{\theta_j} + 3 h_0^2 \alpha r_{\text{mint}} [\sin \theta]_{-\theta_i}^{\theta_j} + 3 h_0 \alpha^2 r_{\text{mint}}^2 \left[ \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{\theta}{2} \right]_{-\theta_i}^{\theta_j} + \alpha^3 r_{\text{mint}}^3 \left[ \frac{1}{12} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin \theta \right]_{-\theta_i}^{\theta_j} \right] \quad (34)$$

Tal como indica la ecuación (28), el caudal total de fugas a través de las caras interior y exterior que están a ambos lados de la entalla principal se obtendrá de la suma algebraica de los caudales obtenidos mediante las ecuaciones (31) y (34).

Para la obtención de las ecuaciones que caracterizan los caudales de fugas a través de las dos caras en contacto con la ranura pequeña, se utilizará un procedimiento similar al empleado para la obtención de los caudales equivalentes en la ranura principal. Es decir, ecuaciones homólogas a las definidas como (22-27) han de ser ahora definidas para las dos caras en contacto con la ranura pequeña. Dichas ecuaciones deberán ser sustituidas en la ecuación que caracteriza el caudal de fugas para el presente caso, ecuación (35), que es la ecuación homóloga a la (28). Una vez realizado este proceso y sustituidas las constantes de integración por su equivalente, se obtienen las ecuaciones que caracterizan los caudales de fugas para cada una de las dos caras en contacto con la ranura pequeña. Dichas ecuaciones se han definido como las ecuaciones (36) y (37). Obsérvese que el caudal total de fugas debido al efecto de la ranura pequeña es la suma del caudal obtenido mediante las ecuaciones (36) y (37).



$$Q_{\text{fugas}_{sg}} = \int_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \int_0^h v_c r \, dy \, d\theta + \int_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \int_0^h v_i r \, dy \, d\theta = Q_{\text{ext}_{sg}} + Q_{\text{int}_{sg}} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}_{sg}} &= \frac{3\omega\alpha R_{\text{mint}} R_{\text{int}}^2}{12} [\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i + \gamma))] \\ &+ \frac{3\omega\alpha R_{\text{mint}}}{12 \ln\left(\frac{R_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} \frac{(r_{\text{int}2}^2 - R_{\text{int}}^2)}{2} [\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i + \gamma))] \\ &- \frac{p_{\text{ext}} - p_{\text{int}}}{12 \mu \ln\left(\frac{R_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} * \\ &\left[ h_0^3 [-\theta_i - (-(\theta_i + \gamma))] + 3h_0^2 \alpha R_{\text{mint}} [\sin(-\theta_i) - \sin(-(\theta_i + \gamma))] + \right. \\ &3h_0 \alpha^2 R_{\text{mint}}^2 \left[ \frac{1}{4} \sin(2 * (-\theta_i)) + \frac{-\theta_i}{2} - \frac{1}{4} \sin(2 * (-(\theta_i + \gamma))) - \frac{-(\theta_i + \gamma)}{2} \right] + \\ &\left. \alpha^3 R_{\text{mint}}^3 \left[ \frac{1}{12} \sin(3 * (-\theta_i)) + \frac{3}{4} \sin(-\theta_i) - \frac{1}{12} \sin(3 * (-(\theta_i + \gamma))) - \frac{3}{4} \sin(-(\theta_i + \gamma)) \right] \right] \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{ext}_{sg}} &= \frac{3\omega\alpha R_{\text{mext}} R_{\text{ext}}^2}{12} [\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i + \gamma))] \\ &- \frac{3\omega\alpha R_{\text{mext}}}{12 \ln\left(\frac{R_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \frac{(r_{\text{ext}2}^2 - R_{\text{ext}}^2)}{2} [\cos(-\theta_i) - \cos(-(\theta_i + \gamma))] \\ &+ \frac{p_{\text{ext}} - p_{\text{int}}}{12 \mu \ln\left(\frac{R_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} * \\ &\left[ h_0^3 [-\theta_i - (-(\theta_i + \gamma))] + 3h_0^2 \alpha R_{\text{mext}} [\sin(-\theta_i) - \sin(-(\theta_i + \gamma))] + \right. \\ &3h_0 \alpha^2 R_{\text{mext}}^2 \left[ \frac{1}{4} \sin(2 * (-\theta_i)) + \frac{-\theta_i}{2} - \frac{1}{4} \sin(2 * (-(\theta_i + \gamma))) - \frac{-(\theta_i + \gamma)}{2} \right] + \\ &\left. \alpha^3 R_{\text{mext}}^3 \left[ \frac{1}{12} \sin(3 * (-\theta_i)) + \frac{3}{4} \sin(-\theta_i) - \frac{1}{12} \sin(3 * (-(\theta_i + \gamma))) - \frac{3}{4} \sin(-(\theta_i + \gamma)) \right] \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Una vez determinadas las distribuciones de presiones y los caudales de fugas existentes entre la placa base y el barrilete, se pueden determinar fácilmente la fuerza y los momentos respecto a los dos ejes principales X,Y del barrilete. Para ello, únicamente será necesario integrar las diversas distribuciones de presiones a lo largo del dominio correspondiente, tal como indican las ecuaciones (38-43).



Para la ranura principal:

La fuerza que el fluido ejerce sobre el barrilete se define como:

$$F = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} P_{int} r d\theta dr + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{int2}}^{r_{int}} P_{cara int} r d\theta dr + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{ext}}^{r_{ext2}} P_{cara ext} r d\theta dr \quad (38)$$

donde  $P_{int}$  es la presión en el interior de la ranura, que se considerará como constante, y  $P_{cara ext}$ ,  $P_{cara int}$  son las distribuciones de presiones definidas por las ecuaciones (16) y (17), respectivamente.

Los momentos con respecto a los dos ejes principales del barrilete, X,Y, creados por la distribución de presiones existente en las dos caras en contacto con la ranura principal, se definen como:

$$M_{XX} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} P_{int} r^2 \sin \theta dr d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{int2}}^{r_{int}} P_{cara int} r^2 \sin \theta dr d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{ext}}^{r_{ext2}} P_{cara ext} r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (39)$$

$$M_{YY} = \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} P_{int} r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{int2}}^{r_{int}} P_{cara int} r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \int_{r_{ext}}^{r_{ext2}} P_{cara ext} r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (40)$$

Caso ranura pequeña:

La fuerza que el fluido ejerce sobre el fluido se define como:

$$F_{sg} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} P_{int} r d\theta dr + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{r_{int2}}^{R_{int}} P_{cara int sg} r d\theta dr + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{R_{ext}}^{r_{ext2}} P_{cara ext sg} r d\theta dr \quad (41)$$

Los momentos creados por la distribución de presiones actuante sobre las caras en contacto con la ranura pequeña quedan definidos por las ecuaciones (42) y (43).

$$M_{XX_{sg}} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} P_{int} r^2 \sin \theta dr d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{r_{int2}}^{R_{int}} P_{cara int sg} r^2 \sin \theta dr d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{R_{ext}}^{r_{ext2}} P_{cara ext sg} r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (42)$$

$$M_{YY_{sg}} = \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} P_{int} r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{r_{int2}}^{R_{int}} P_{cara int sg} r^2 \cos \theta dr d\theta + \int_{-(\theta_i+\gamma)}^{-\theta_i} \int_{R_{ext}}^{r_{ext2}} P_{cara ext sg} r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (43)$$

Obsérvese que las distribuciones de presión definidas como  $P_{cara ext sg}$ ,  $P_{cara int sg}$  han sido previamente obtenidas y dadas en forma de ecuaciones (20) y (21).



Las ecuaciones resultantes de realizar las integrales definidas en las ecuaciones (38-43) dan lugar a:

Ranura principal:

$$\begin{aligned}
 F &= P_{\text{int}} \frac{(\theta_j - (-\theta_i))}{4} \left[ \frac{(r_{\text{ext}}^2 - r_{\text{ext}2}^2)}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} - \frac{(r_{\text{int}}^2 - r_{\text{int}2}^2)}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} \right] + P_{\text{ext}} \frac{(\theta_j - (-\theta_i))}{2} [r_{\text{ext}2}^2 - r_{\text{int}2}^2] + \\
 &P_{\text{ext}} \frac{(\theta_j - (-\theta_i))}{4} \left[ \frac{(r_{\text{int}}^2 - r_{\text{int}2}^2)}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} - \frac{(r_{\text{ext}}^2 - r_{\text{ext}2}^2)}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \right] \quad (44) \\
 M_{XX} &= \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{mint}} \sin^2 \theta d\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{mint}} \cos \theta)^3} * \left[ \frac{r_{\text{int}}^2}{6} (r_{\text{int}}^3 - r_{\text{int}2}^3) - \frac{(r_{\text{int}}^5 - r_{\text{int}2}^5)}{10} + \right. \\
 &\left. \frac{(r_{\text{int}2}^2 - r_{\text{int}}^2)}{6} (r_{\text{int}}^3 - r_{\text{int}2}^3) \frac{\ln(r_{\text{int}})}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} - \frac{(r_{\text{int}2}^2 - r_{\text{int}}^2)}{2 \ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} \left[ \frac{(r_{\text{int}2}^3 - r_{\text{int}}^3)}{9} + \frac{r_{\text{int}}^3 \ln(r_{\text{int}}) - r_{\text{int}2}^3 \ln(r_{\text{int}2})}{3} \right] \right] \\
 &+ \int_{-\theta_i}^{\theta_j} \frac{3\mu\omega\alpha r_{\text{mext}} \sin^2 \theta d\theta}{(h_0 + \alpha r_{\text{mext}} \cos \theta)^3} * \left[ \frac{r_{\text{ext}}^2}{6} (r_{\text{ext}2}^3 - r_{\text{ext}}^3) - \frac{(r_{\text{ext}2}^5 - r_{\text{ext}}^5)}{10} + \frac{(r_{\text{ext}2}^2 - r_{\text{ext}}^2)}{6} (r_{\text{ext}2}^3 - r_{\text{ext}}^3) * \right. \\
 &\left. \frac{\ln(r_{\text{ext}})}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} - \frac{(r_{\text{ext}2}^2 - r_{\text{ext}}^2)}{2 \ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \left[ \frac{(r_{\text{ext}}^3 - r_{\text{ext}2}^3)}{9} + \frac{r_{\text{ext}2}^3 \ln(r_{\text{ext}2}) - r_{\text{ext}}^3 \ln(r_{\text{ext}})}{3} \right] \right] \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{YY} &= \frac{p_{\text{int}} [\sin \theta]_{-\theta_i}^{\theta_j}}{9} \left[ \frac{(r_{\text{int}2}^3 - r_{\text{int}}^3)}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} + \frac{(r_{\text{ext}}^3 - r_{\text{ext}2}^3)}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \right] \\
 &+ \frac{p_{\text{ext}} [\sin \theta]_{-\theta_i}^{\theta_j}}{9} \left[ -\frac{(r_{\text{int}2}^3 - r_{\text{int}}^3)}{\ln\left(\frac{r_{\text{int}}}{r_{\text{int}2}}\right)} - \frac{(r_{\text{ext}}^3 - r_{\text{ext}2}^3)}{\ln\left(\frac{r_{\text{ext}}}{r_{\text{ext}2}}\right)} \right] + \frac{p_{\text{ext}} [\sin \theta]_{-\theta_i}^{\theta_j}}{3} [r_{\text{ext}2}^3 - r_{\text{int}2}^3] \quad (46)
 \end{aligned}$$



Para la ranura pequeña, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 F_{sg} = & P_{int} \frac{(-\theta_i - (-(\theta_i + \gamma)))}{4} \left[ \frac{(R_{ext}^2 - r_{ext2}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)} - \frac{(R_{int}^2 - r_{int2}^2)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} \right] \\
 & + P_{ext} \frac{(-\theta_i - (-(\theta_i + \gamma)))}{2} [r_{ext2}^2 - r_{int2}^2] + \\
 & P_{ext} \frac{(-\theta_i - (-(\theta_i + \gamma)))}{4} \left[ \frac{(R_{int}^2 - r_{int2}^2)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} - \frac{(R_{ext}^2 - r_{ext2}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)} \right] \\
 & + \int_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \frac{3\mu\omega\alpha R_{mint} \sin\theta}{(h_0 + \alpha R_{mint} \cos\theta)^3} d\theta * \\
 & \left\{ \left( R_{int}^2 - r_{int2}^2 \right)^2 \left[ \frac{1}{8} - \frac{\ln(R_{int})}{4 \ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} - \frac{1}{8} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{r_{int2}^2 - R_{int}^2}{4} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{int}}{r_{int2}}\right)} (r_{int2}^2 \ln(r_{int2}) - R_{int}^2 \ln(R_{int})) \right\} + \\
 & \int_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \frac{3\mu\omega\alpha R_{mext} \sin\theta}{(h_0 + \alpha R_{mext} \cos\theta)^3} d\theta * \\
 & \left\{ \left( r_{ext2}^2 - R_{ext}^2 \right)^2 \left[ -\frac{1}{8} + \frac{\ln(R_{ext})}{4 \ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)} + \frac{1}{8} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{r_{ext2}^2 - R_{ext}^2}{4} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{r_{ext2}}\right)} (r_{ext2}^2 \ln(r_{ext2}) - R_{ext}^2 \ln(R_{ext})) \right\} \quad (47)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 M_{XX_{sg}} = & \frac{p_{ext}}{3} (r_{ext2}^3 - r_{int2}^3) * [-\cos \theta]_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \\
 & + \frac{(p_{int} - p_{ext})}{9} \left[ \frac{r_{int2}^3 - R_{int}^3}{\ln \left( \frac{R_{int}}{r_{int2}} \right)} + \frac{R_{ext}^3 - r_{ext2}^3}{\ln \left( \frac{R_{ext}}{r_{ext2}} \right)} \right] * [-\cos \theta]_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} + \\
 & \int_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \frac{3\mu\omega\alpha R_{mint} \sin^2 \theta d\theta}{(h_0 + \alpha R_{mint} \cos \theta)^3} * \left[ \frac{(R_{int}^5 - r_{int2}^5)}{15} - \frac{(r_{int2}^2 - R_{int}^2)(r_{int2}^3 - R_{int}^3)}{18 \ln \left( \frac{R_{int}}{r_{int2}} \right)} \right] + \\
 & + \int_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \frac{3\mu\omega\alpha R_{mext} \sin^2 \theta d\theta}{(h_0 + \alpha R_{mext} \cos \theta)^3} * \left[ \frac{(r_{ext2}^5 - R_{ext}^5)}{15} - \frac{(r_{ext2}^2 - R_{ext}^2)(R_{ext}^3 - r_{ext2}^3)}{18 \ln \left( \frac{R_{ext}}{r_{ext2}} \right)} \right]
 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 M_{YY_{sg}} = & \frac{p_{ext}}{3} (r_{ext2}^3 - r_{int2}^3) * [\sin \theta]_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} + \frac{(p_{int} - p_{ext})}{9} \left[ \frac{r_{int2}^3 - R_{int}^3}{\ln \left( \frac{R_{int}}{r_{int2}} \right)} + \frac{R_{ext}^3 - r_{ext2}^3}{\ln \left( \frac{R_{ext}}{r_{ext2}} \right)} \right] * \\
 & [\sin \theta]_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} + \frac{3\mu\omega\alpha R_{mint}}{h_0^3} \left[ \frac{(R_{int}^5 - r_{int2}^5)}{15} - \frac{(r_{int2}^2 - R_{int}^2)(r_{int2}^3 - R_{int}^3)}{18 \ln \left( \frac{R_{int}}{r_{int2}} \right)} \right] * \\
 & \left[ \frac{1}{\left( \frac{\alpha R_{mint}}{h_0} \right)^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\alpha R_{mint}}{h_0} \cos \theta} - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{\alpha R_{mint}}{h_0} \cos \theta \right)^2} \right]_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \right] + \\
 & \frac{3\mu\omega\alpha R_{mext}}{h_0^3} \left[ \frac{(r_{ext2}^5 - R_{ext}^5)}{15} - \frac{(r_{ext2}^2 - R_{ext}^2)(R_{ext}^3 - r_{ext2}^3)}{18 \ln \left( \frac{R_{ext}}{r_{ext2}} \right)} \right] * \\
 & \left[ \frac{1}{\left( \frac{\alpha R_{mext}}{h_0} \right)^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\alpha R_{mext}}{h_0} \cos \theta} - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{\alpha R_{mext}}{h_0} \cos \theta \right)^2} \right]_{-(\theta_i + \gamma)}^{-\theta_i} \right]
 \end{aligned} \quad (49)$$



Véase que, en algunas de las ecuaciones obtenidas, quedan algunas integrales por realizar. Dichas integrales han de ser resueltas numéricamente.

La fuerza y los pares resultantes sobre el barrilete serán la suma algebraica de las fuerzas y los pares que aporta cada una de las ranuras.

A continuación, se presentan algunos de los resultados que pueden obtenerse directamente de las ecuaciones determinadas en este problema.

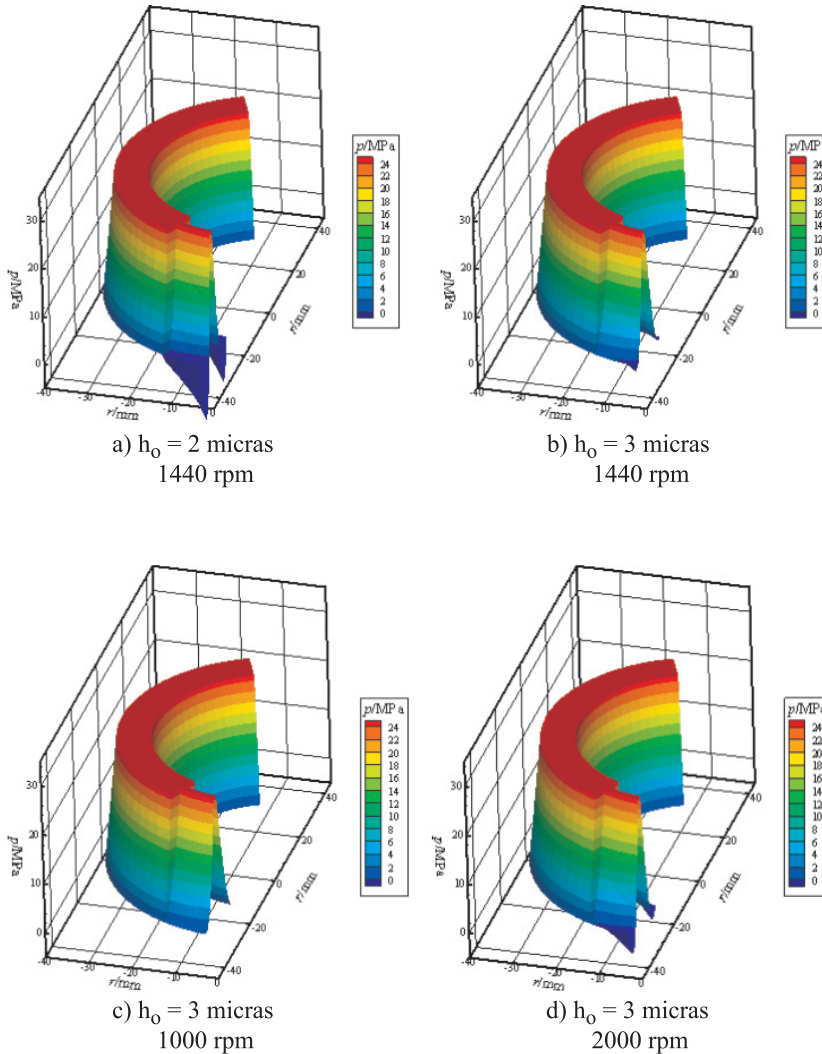


Fig. 53.3  
Distribución de presión teórica a lo largo de las caras en contacto con la ranura principal y pequeña. Máxima inclinación posible del barrilete

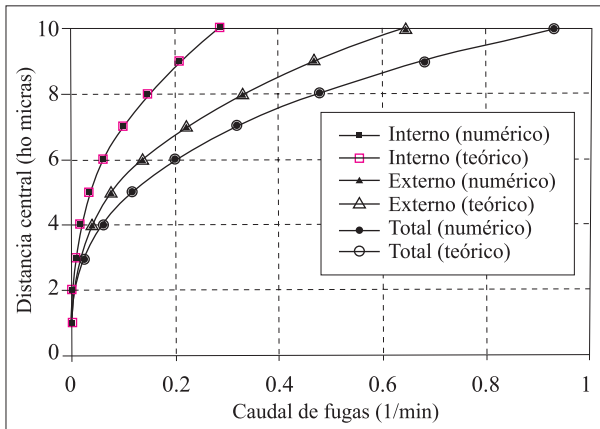
La figura 53.3 presenta distribuciones de presión en las cuatro caras en contacto, bien con la ranura principal, bien con la ranura pequeña, distribución obtenida mediante las ecuaciones (16, 17) y (20, 21). La presión en el interior de las ranuras es de 25 MPa. Se evalúan diferentes distancias centrales entre el barrilete y la placa de cierre, así como



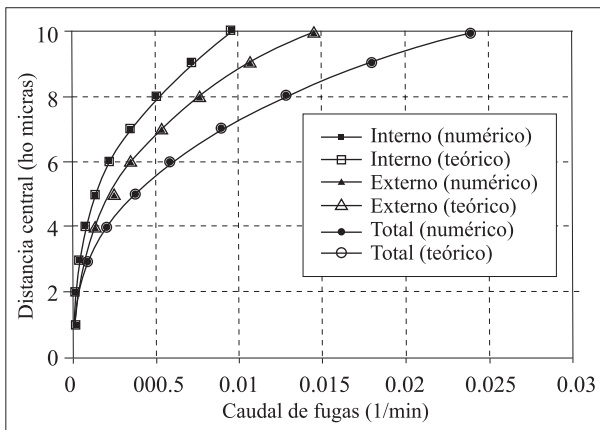
diferentes velocidades de giro de la bomba. En todo momento, se ha considerado la máxima inclinación posible del barrilete,  $\alpha_{\max}$  (v. figura 53.2). Obsérvese que, a medida que la velocidad de giro aumenta y/o la distancia central entre barrilete y placa de cierre disminuye, existe una mayor tendencia a la aparición de cavitación.

La figura 53.4 presenta los diversos caudales de fugas a través de las caras interna y externa en contacto con la ranura principal y con la ranura pequeña. Los caudales presentados están en función de la distancia central ( $h_0$ ) entre el barrilete y la placa de cierre. La presión en el interior de las ranuras es de 25 MPa, y para cada caso se ha considerado la inclinación máxima del barrilete. Obsérvese que el caudal de fugas creado por la ranura pequeña es insignificante cuando se compara con el generado por la ranura principal. Las ecuaciones utilizadas para la determinación de estos caudales son la (31) y la (34) para la ranura principal, y la (36) y la (37) para la ranura secundaria o pequeña.

Fig. 53.4  
Caudales de fugas a través de las ranuras principal y pequeña, en función de la distancia central entre la placa de cierre y el barrilete. La presión en el interior de las ranuras es de 25 MPa, y para cada caso se ha considerado el ángulo máximo posible,  $\alpha_{\max}$ .



a) Ranura principal



b) Ranura pequeña





La figura 53.5 presenta la fuerza que actúa sobre el barrilete debido a la aportación de las caras en contacto con la ranura principal y con la ranura pequeña (*timing groove*), ecuaciones (38), (41), (44) y (47). Obsérvese que las ecuaciones (44) y (47), caracterizan respectivamente, las dos últimas integrales de las ecuaciones (38) y (41). En la misma figura, se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante ecuaciones y los obtenidos mediante una modelización numérica basada en la ecuación de lubricación de Reynolds, modelización que no se ha presentado en este problema. Asimismo, se introduce en la misma figura, la fuerza total actuante sobre el barrilete cuando son cuatro o cinco los pistones en contacto con la ranura principal y la pequeña.

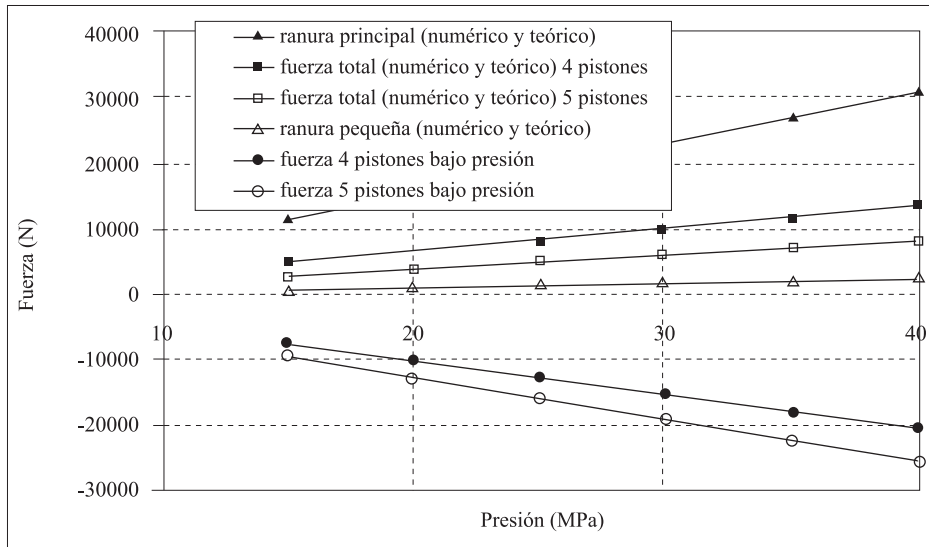
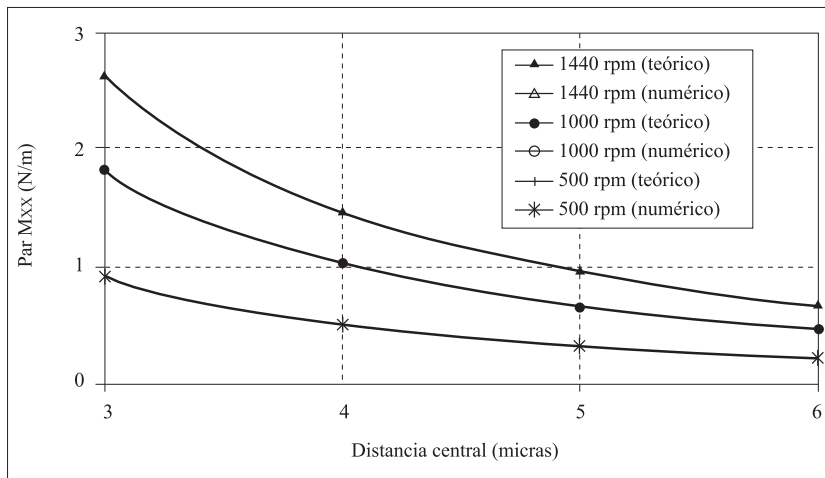


Fig. 53.5 Promedio de la fuerza que actúa sobre el barrilete en función del número de pistones en contacto con las ranuras de alta presión, bien la principal, bien la pequeña. Comparación entre el resultado obtenido mediante las ecuaciones presentadas en este problema y el obtenido mediante una modelización numérica (no presentada en este problema) utilizando la ecuación de lubricación de Reynolds.  $P = 25 \text{ MPa}$

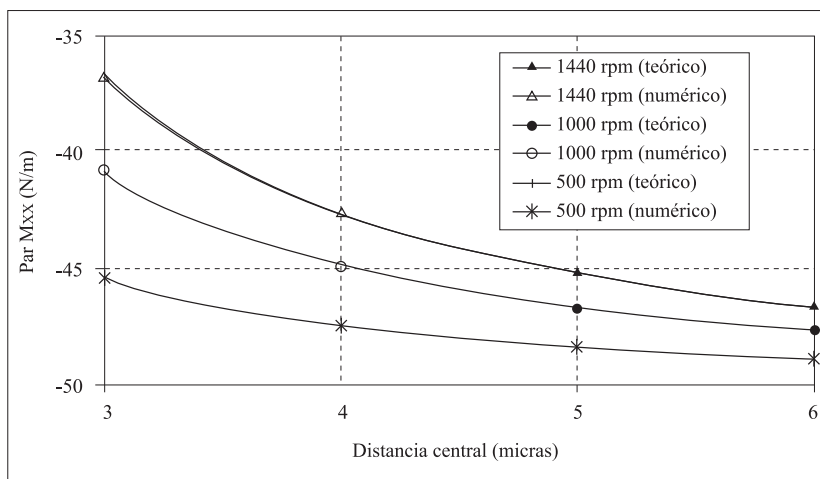
Las figuras 53.6 y 53.7 presentan los pares con respecto a los ejes X e Y actuantes sobre la cara del barrilete, en función de la distancia central entre el barrilete y la placa de cierre, y para diferentes velocidades de giro. La presión de alimentación es de 25 Mpa. En todo momento se ha considerado la inclinación máxima del barrilete  $\alpha_{\max}$ . Véase que cada figura consiste en dos subfiguras que caracterizan el par creado por las caras en contacto con la ranura principal y las que están en contacto con la ranura pequeña. Las ecuaciones utilizadas para realizar dichas gráficas son la (45) y la (48) para la figura 53.6, y la (46) y la (49) para la figura 53.7. Obsérvese, además, que sendas figuras comparan el resultado de estas ecuaciones con el obtenido mediante una modelización numérica no presentada en este problema.



Fig. 53.6  
Par Mxx debido a  
las aportaciones de  
la ranura principal y  
la ranura pequeña.  
En todo momento  
se ha considerado  
la inclinación  
máxima del  
barrilete,  $P = 25\text{MPa}$   
 $\alpha_{\text{max}}$

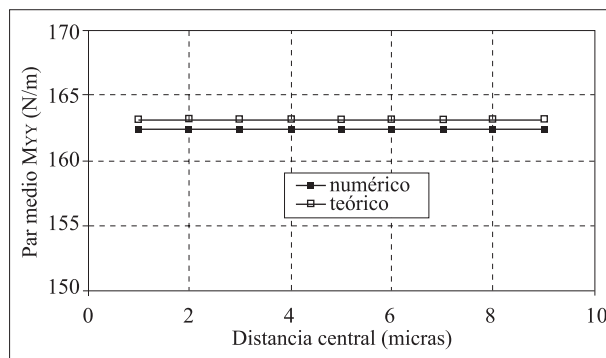


a) Ranura principal

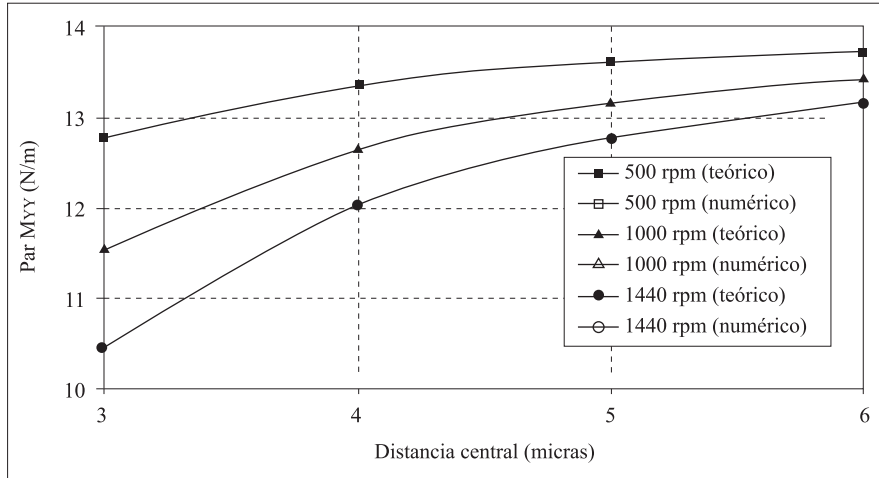


b) Ranura pequeña

Fig. 53.7  
Par Myy debido al  
efecto de las dos  
ranuras,  
 $\alpha_{\text{max}}$ ,  $P = 25\text{MPa}$



a) Ranura principal



b) Ranura pequeña

## Problema 54

### Enunciado

El esquema de la figura 54.1 muestra un patín deslizante, formado por una placa inclinada y una placa plana. El patín se desplaza por encima de una superficie lisa plana a una velocidad constante  $U$ . Se sabe que la distribución de presiones a lo largo del eje  $X$ , en la zona de la placa inclinada, está dada por:

$$P_1^* = \frac{-\mu 6U}{(Tg\alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{Tg\alpha} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{Tg\alpha} - X\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{h_1}{Tg\alpha} - X\right)} \right] - \frac{C_3\mu}{(Tg\alpha)^3} \frac{1}{2\left(\frac{h_1}{Tg\alpha} - X\right)^2} + C_4$$

donde  $C_3$  y  $C_4$  son constantes por determinar.

De la aplicación de la ecuación de la lubricación de Reynolds para la zona donde la placa está inclinada se obtiene:

$$-6UTg\alpha X = \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial X} + C_3$$

donde  $h$  es la altura entre placas para una posición genérica de  $X$  (zona de placa inclinada).

Considere como datos:  $\alpha, h_1, h_2, L_1, L_2, \mu, U$



Halle:

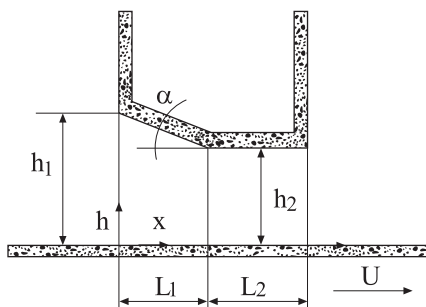
1. La ecuación que da la distribución de presiones a lo largo del eje X, tanto para la zona de la placa inclinada como para la zona de la placa plana. Determine las constantes de integración.
2. La fuerza ascensorial o capacidad de carga por unidad de longitud del cojinete.

### Resolución

La ecuación de la lubricación de Reynolds para flujo unidimensional es:

$$6U \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Fig. 54.1



en la zona de la placa plana  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ :

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} = C_1 \quad (3)$$

Distribución de presiones a lo largo de una placa:

$$P_2^* = \frac{C_1 \mu}{h_2^3} x + C_2 \quad (4)$$

Condiciones de contorno

$$x = (L_1 + L_2); P_2^* = 0$$

$$x = L_1; P_2^* = P_1^*$$





$$x = A + B \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right) + C \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^2$$

$$x = A + B \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - Bx + C \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - 2 \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} xC + Cx^2$$

$$0 = C \quad C = 0$$

$$1 = -B - 2 \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} C \quad B = -1$$

$$0 = A + B \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} + C \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \quad A = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\int \frac{x dx}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^3} = \int \frac{\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} dx}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^3} + \int \frac{-dx}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^2} = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^{-3+1}}{-3+1} (-1) + \frac{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^{-2+1}}{-2+1} \quad (9)$$

de donde la distribución de presiones queda, en la zona de la placa inclinada

$$P_1^* = \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg} \alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - X \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - X \right)} \right] - \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - X \right)^2} + C_4 \text{ (dato del problema)} \quad (10)$$

Condiciones de contorno:

$$x = 0 ; \quad P_1^* = 0$$

$$x = L_1 ; \quad P_1^* = P_2^*$$

El caudal másico en la placa plana viene dado por la expresión:

$$\dot{m} = \rho U \frac{h}{2} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h^3$$

según la ecuación (3), como  $C_1 = \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x}$ :



$$\dot{m}_2 = \rho \frac{U h}{2} - \frac{C_1}{12} \rho$$

El caudal másico para una placa inclinada:

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} - \rho \frac{\Delta P^*}{\Delta x} \frac{1}{12\mu} h^3(x)$$

Según la ecuación (7):

$$-6 \operatorname{tg} \alpha \, x = \frac{h^3(x)}{\mu} \frac{\partial P^*}{\partial x} + C_3$$

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} - \rho \frac{1}{12} (-6 U \operatorname{tg} \alpha \, x - C_3)$$

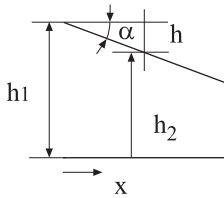


Fig. 54.2

$$x \operatorname{tg} \alpha = h_1$$

$$h(x) = h_1 - x \operatorname{tg} \alpha$$

$$x \operatorname{tg} \alpha = h_1 - h(x)$$

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} - \frac{\rho}{12} (-6U(h_1 - h(x)) - C_3)$$

$$\dot{m}_1 = \rho U \frac{h(x)}{2} + \frac{\rho}{12} 6U(h_1 - h(x)) + \frac{\rho}{12} C_3$$

Puesto que el caudal másico ha de mantenerse, se ha de cumplir  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$  para  $h(x) = h_2$ , punto de intersección de las dos placas.

$$\rho \frac{U h_2}{2} - \rho \frac{C_1}{12} = \rho \frac{U h_2}{2} + \frac{\rho}{12} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{12} C_3$$

$$-\rho \frac{C_1}{12} = \frac{\rho}{12} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{12} C_3$$

$$-C_1 - C_3 = 6U(h_1 - h_2) \quad (11)$$

Aplicando las condiciones de contorno en la ecuación (4)

$$x = (L_1 + L_2); \quad P_2^* = 0$$

$$0 = \frac{C_1 \mu}{h_2^3} (L_1 + L_2) + C_2 \quad (12)$$



Haciendo lo mismo para la ecuación (10)

$$x = 0; \quad P_1^* = 0$$

$$0 = \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg} \alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)} \right] - \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} + C_4$$

$$0 = \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg} \alpha)^2} \left[ \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2h_1} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h_1} \right] - \frac{C_3 \mu}{h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2} + C_4$$

$$0 = \frac{\mu 6U}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2h_1} - \frac{C_3 \mu}{h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2} + C_4 \quad (13)$$

La última de las condiciones se establece cuando:

$$x = L_1; \quad P_1^* = P_2^*$$

$$\frac{-\mu 6U \operatorname{Tg} \alpha}{(\operatorname{Tg} \alpha)^3} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{Tg} \alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{Tg} \alpha} - L_1 \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{Tg} \alpha} - L_1 \right)} \right] - \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{Tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{Tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + C_4 = \frac{C_1 \mu}{h_2^3} L_1 + C_2 \quad (14)$$

Sustituyendo (11), (12) y (13) en (14), se obtiene lo siguiente:

Sustituyendo primero la (12):

$$\underbrace{\frac{-\mu 6U \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)} \right] - \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2}}_A + C_4 = \frac{C_1 \mu}{h_2^3} L_1 - \frac{C_1 \mu}{h_2^3} (L_1 + L_2) = -\frac{C_1 \mu}{h_2^3} L_2$$

Utilizando ahora la (11) y la (13):

$$A - \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + \frac{C_3 \mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\mu L_2}{h_2^3} [6U(h_1 - h_2) + C_3]$$





despejando  $C_3$

$$A + C_3 \left[ -\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3} \right] = \frac{\mu L_3}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha}$$

con lo cual:

$$C_3 = \frac{\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}}$$

de (11):  $C_1 = -C_3 - 6U(h_1 - h_2)$

$$C_1 = -\frac{\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - 6U(h_1 - h_2)$$

de (12):  $C_2 = -\frac{C_1 \mu}{h_2^3} (L_1 + L_2)$

$$C_2 = -\frac{\mu(L_1 + L_2)}{h_2^3} \left[ \frac{-\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - 6U(h_1 - h_2) \right]$$

de (13)  $C_4 = \frac{C_3 \mu}{h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2} - \frac{\mu 6U}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2h_1}$

$$C_4 = \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{\frac{\mu L_2}{h_2^3} 6U(h_1 - h_2) + \frac{\mu 6U}{2h_1 \operatorname{tg} \alpha} - A}{-\frac{\mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - L_1 \right)^2} + \frac{\mu}{2h_1^2 \operatorname{tg} \alpha} - \frac{\mu L_2}{h_2^3}} - \frac{\mu 6U}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2h_1}$$



La fuerza ascensorial o capacidad de carga por unidad de longitud vale:

$$F_y = \int_{x=0}^{x=l_1} P_1^* dx + \int_{x=l_1}^{x=(l_1+l_2)} P_2^* dx$$

$$F_y = \int_{x=0}^{x=l_1} \frac{-\mu 6U}{(\operatorname{tg} \alpha)^2} \left[ \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)} \right] dx - \int_{x=0}^{x=l_1} \left( \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2 \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)^2} + C_4 \right) dx +$$

$$+ \int_{x=l_1}^{x=(l_1+l_2)} \left( \frac{C_1 \mu}{h_2^3} x + C_2 \right) dx$$

$$F_y = \frac{-\mu 6 U \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \left[ \frac{h_1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \frac{1}{\left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right)} + \ln \left( \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x \right) \right]_{x=0}^{x=L_1}$$

$$- \frac{C_3 \mu}{(\operatorname{tg} \alpha)^3} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} - x} \right]_{x=0}^{x=L_1} + C_4 [x]_{x=0}^{x=L_1} + \left[ \frac{C_1 \mu x^2}{h_2^3 2} + C_2 x \right]_{x=L_1}^{x=(L_1+L_2)}$$

## Problema 55

### Enunciado

Sea la válvula de asiento cónico descrita en la figura 55.1. Considérese la longitud del asiento,  $l$ , mucho mayor que la distancia entre placas,  $H$  ( $l \gg H$ ), tal que el flujo a través del intersticio pueda considerarse laminar.

Determine las ecuaciones que rigen:

1. El caudal que fluye a través de la válvula, si se conocen las presiones a la entrada y salida de la misma.
2. La distribución de presiones a lo largo del asiento cónico.
3. La fuerza que el fluido ejerce sobre la corredera.

### Resolución

Considérese la válvula de asiento cónico de la figura 55.1.

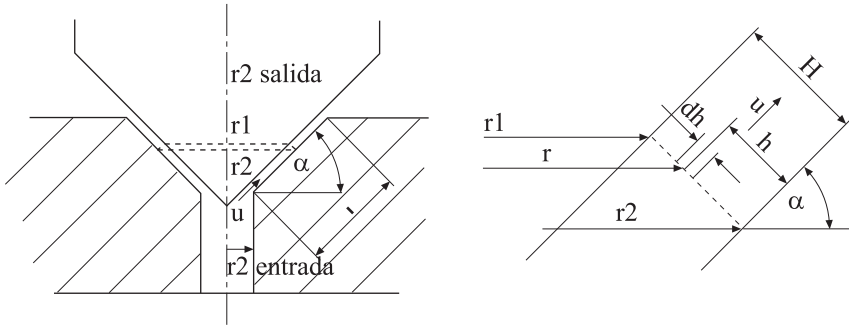


Fig. 55.1  
Vista general de  
una válvula de  
asiento cónico

1. El diferencial de superficie se puede establecer como:

$$ds = 2\pi r dh$$

El flujo volumétrico a través del intersticio será:

$$Q = \int_0^H V 2\pi r dh$$

$$Q = \int_0^H V 2\pi (r_2 - h \cos(90 - \alpha)) dh \quad (1)$$

y se cumplirá  $r = r_2$ ,  $h = 0$  y  $r = r_1$ ,  $h = H$

La distribución de velocidades entre las dos placas, de acuerdo con la ecuación de Poiseuille se define:

$$V = -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} (H - h) \quad (2)$$

De donde el flujo a través del intersticio cónico será:

$$Q = \int_0^H -\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2} (H - h) 2\pi (r_2 - h \cos(90 - \alpha)) dh \quad (3)$$

cuya integración da lugar a:

$$Q = -\frac{\pi}{\mu} \frac{dp}{dx} \left[ r_2 H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12} \right] \quad (4)$$

La distribución de presiones a lo largo del asiento cónico se define:

$$\int_0^L \frac{dx}{r_2 H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} = \int_{P_{entrada}}^{P_{salida}} -\frac{\pi}{\mu} \frac{dp}{Q} \quad (5)$$

Conociendo que  $x=0$ ,  $r_2 = r_2$  (entrada); y  $x=l$ ,  $r_2 = r_2$  (salida).

$$\cos \alpha = \frac{r_2(\text{salida}) - r_2(\text{entrada})}{l}; \cos \alpha = \frac{r_2 - r_2(\text{entrada})}{x}; r_2 = \cos \alpha x + r_2(\text{entrada}) \quad (6)$$



con lo cual la distribución de presión queda:

$$\int_0^L \frac{dx}{(\cos \alpha x + r_2(\text{entrada})) H^3 \frac{1}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} = \int_{P_{\text{entrada}}}^{P_{\text{salida}}} -\frac{\pi dp}{\mu Q} \quad (7)$$

De la integración se llega a:

$$Q = (P_{(\text{entrada})} - P_{(\text{salida})}) \frac{\pi}{\mu} \cos \alpha \frac{H^3}{6} \frac{1}{\ln \left[ \frac{L \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]} \quad (8)$$

2. Si la presión en un punto genérico situado a una distancia  $x$  del origen de coordenadas es  $P$ , se define:

$$Q = (P_{(\text{entrada})} - P) \frac{\pi}{\mu} \cos \alpha \frac{H^3}{6} \frac{1}{\ln \left[ \frac{x \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]} \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones (8) y (9), se puede concluir:

$$P = P_{(\text{entrada})} - (P_{(\text{entrada})} - P_{(\text{salida})}) \frac{\ln \left[ \frac{x \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]}{\ln \left[ \frac{L \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(\text{entrada})} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90-\alpha) \frac{1}{12}} \right]} \quad (10)$$

La ecuación (10) da la distribución de presión a lo largo del asiento cónico. La representación de esta ecuación para aceite hidráulico ISO 32, una distancia entre placas de 3 micras, una presión diferencial de 100 bar y todo un colectivo de longitudes de asiento cónico se detalla en la figura 55.2. Obsérvese que la distribución de presiones no es lineal; por otro lado, a medida que el ángulo del cono aumenta, la caída de presión por unidad de longitud es mayor para radios pequeños.



Este comportamiento es perfectamente entendible, puesto que para ángulos de cono pequeños la variación de área con el radio es menor que para ángulos grandes, por tanto, la resistencia al paso de fluido es mayor.

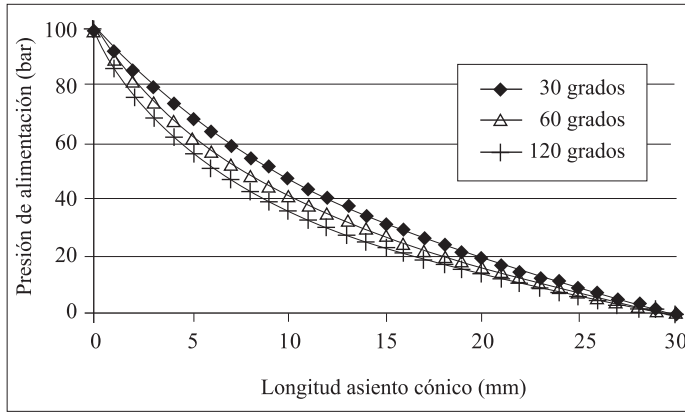
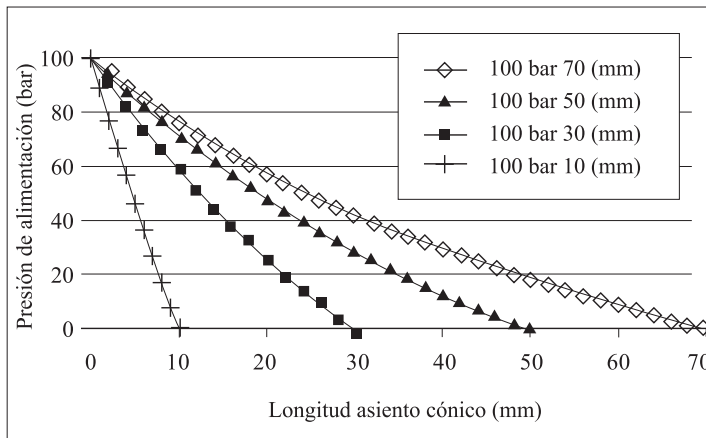


Fig. 55.2  
Variación de la distribución de presión a lo largo del asiento cónico, aceite ISO 32, presión = 100 bar, distancia entre placas = 3 micras

a) Ángulo del cono: 30°, 60°, 120°



b) Longitud del asiento cónico: 10, 30, 50, 70 mm,  $\alpha=45^\circ$

En la figura 55.3 está representada la ecuación (8), la cual muestra el flujo a través de la válvula para un colectivo de distancias entre platos, presiones diferenciales y ángulos de cono, la longitud del asiento cónico se mantuvo constante en 30 mm. Véase que el caudal aumenta con la presión diferencial, la distancia entre placas y el ángulo del cono.

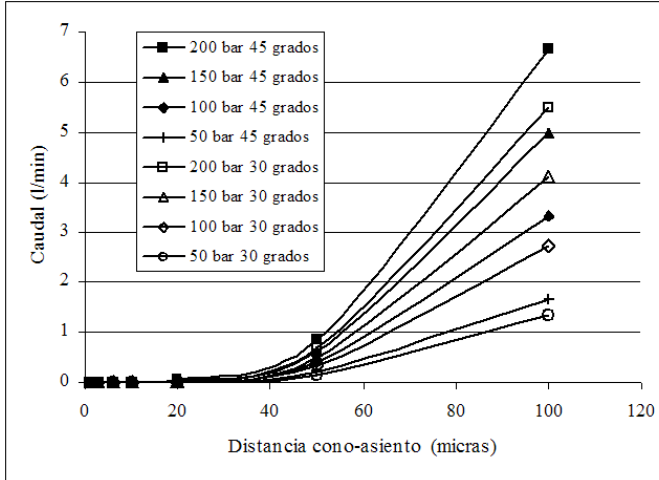
Este comportamiento se explica cuando se tiene en cuenta que, al aumentar el ángulo del cono, la sección de paso aumenta mucho más rápidamente con la distancia respecto al vértice del cono.

Se ha de tener en cuenta además a medida que el ángulo del cono aumenta, el cambio de cantidad de movimiento experimentado será mayor; asimismo, las líneas de corrien-



te a la entrada de la zona cónica se comprimirán. Estos efectos tenderán a disminuir ligeramente el flujo a través de la válvula, a medida que el ángulo aumente, creando además una ligera disminución de presión a la entrada de la parte cónica. Este efecto ya fue descrito por Urata y por Mokhtarzardeh-Dehghan.

Fig. 55.3  
Características de  
flujo en función de  
la distancia entre  
placas, para  
diferentes  
presiones de  
alimentación y  
ángulos del asiento  
cónico,  
 $\alpha = 45^\circ$  y  $30^\circ$



### 3. Fuerzas que actúan sobre la corredera de asiento cónico

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento en dirección del eje de la válvula, tomando como sección entrante la sección anular de la válvula y como sección saliente la sección de la salida del cono de la válvula, se puede establecer:

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_{\text{entrada}}} P_{\text{entrada}} d\vec{A} + \int_{A_{\text{salida}}} P_{\text{salida}} d\vec{A} \cos(90 - \alpha) + \int_{A_{\text{cono}}} P_{\text{superficie del cono}} d\vec{A} \cos \alpha + \\
 & \int_{A_{\text{asiento cónico}}} P_{\text{asiento cónico}} d\vec{A} \cos \alpha + \int_{A_{\text{cono \& asiento}}} \bar{\tau} dA \sin \alpha + \\
 & + m \vec{g} = \int_{A_{\text{saliente}}} \rho \vec{V}_j \vec{V} d\vec{A} + \int_{A_{\text{entrante}}} \rho \vec{V}_j \vec{V} d\vec{A}
 \end{aligned} \quad (11)$$

despreciando las fuerzas másicas, la fuerza sobre la corredera queda:

$$\begin{aligned}
 F_{\text{corredera } j} = & - \int_{A_{\text{cono}}} P_{\text{superficie cono}} dA \cos \alpha - \int_{A_{\text{cono \& asiento}}} \tau dA \sin \alpha = \int_{A_{\text{salida}}} \rho V_j V dA \\
 & - \int_{A_{\text{entrada}}} \rho V_j V dA - \int_{A_{\text{entrada}}} P_{\text{entrada}} dA + \int_{A_{\text{salida}}} P_{\text{salida}} dA \cos(90 - \alpha) - \\
 & - \int_{A_{\text{asiento cónico}}} P_{\text{asiento cónico}} dA \cos \alpha
 \end{aligned} \quad (12)$$

Stone y Urata indicaron que, para evaluar las fuerzas de flujo sobre una corredera con asiento cónico, es preciso tener en cuenta la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico. Véase que el último término de la ecuación (12) proporciona dicha fuerza. Dado que la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico está proporcionada por la ecuación (10), su integración dará lugar a las fuerzas de presión sobre el asiento cónico.



Al resolver la ecuación (12), la distribución de velocidades se va a asumir parabólica tanto en la entrada como en la salida del volumen de control, puesto que se considera que el flujo es laminar en todo momento.

En la entrada, la distribución de presión se considera:

$$V = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_{2 \text{ entrada}}} \right)^2 \right] \quad (13)$$

Con lo cual, la fuerza debida a la cantidad de movimiento en la entrada será:

$$-\int_{A \text{ entrada}} \rho V_j V dA = -\int_0^{r_{2 \text{ entrada}}} \rho V^2 2\pi r dr = -\rho \pi V_0^2 r_{2 \text{ entrada}}^2 \frac{4}{3} \quad (14)$$

La cantidad de movimiento en la superficie de salida se determinará partiendo de la distribución de velocidades dada por la ecuación (2) y la distribución de presiones dada por la ecuación (10), cuya derivada es:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_{\text{salida}} - p_{\text{entrada}}}{K_3} \times \frac{K_1}{K_1 + K_2} \quad (15)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son constantes dadas por:

$$K_1 = \cos \alpha \frac{H^3}{6} \quad (16)$$

$$K_2 = r_{2 \text{ entrada}} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12} \quad (17)$$

$$K_3 = \ln \left[ \frac{1 \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2 \text{ entrada}} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2 \text{ entrada}} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right] \quad (18)$$

con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{A \text{ salida}} \rho V_j V dA &= \int_0^H \rho V^2 \sin \alpha (r_{2 \text{ salida}} - h \cos(90 - \alpha)) 2\pi dh = \\ \rho 2\pi \sin(\alpha) \frac{1}{\mu^2} &\left[ \frac{K_1^2 (P_{\text{salida}}^2 + P_{\text{entrada}}^2 - 2P_{\text{salida}} P_{\text{entrada}})}{K_3^2 (1K_1 + K_2)^2} \right] * \\ \int_0^H &\frac{h^2}{4} (H-h)^2 (r_{2 \text{ salida}} - h \cos(90 - \alpha)) dh \end{aligned} \quad (19)$$



siendo el resultado de la integración:

$$\int_{A_{salida}} \rho V_j V dA = \rho 2 \pi \sin(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[ \frac{K_1^2 (P_{salida}^2 + P_{entrada}^2 - 2 P_{salida} P_{entrada})}{K_3^2 (1K_1 + K_2)^2} \right] \left( \frac{H^5}{120} r_{2salida} - \cos(90 - \alpha) \frac{H^6}{240} \right) \quad (20)$$

La fuerza debida a la presión a la entrada será:

$$-\int_{A_{entrada}} P_{entrada} dA = -\int_0^{r_{2entrada}} P_{entrada} 2 \pi r dr = -P_{entrada} \pi r_{2entrada}^2 \quad (21)$$

y la fuerza debida a la presión a la salida será:

$$\begin{aligned} \int_{A_{salida}} P_{salida} dA \cos(90 - \alpha) &= \int_0^H P_{salida} 2 \pi (r_{2salida} - h \cos(90 - \alpha)) \cos(90 - \alpha) dh = \\ &= P_{salida} 2 \pi \cos(90 - \alpha) \left[ r_{2salida} H - \frac{H^2}{2} \cos(90 - \alpha) \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Tomando en consideración que  $P_{asiento\ cónico}$  está dado por la ecuación (10), las fuerzas sobre el asiento cónico estarán dadas por

$$\begin{aligned} -\int_{A_{asiento\ cónico}} P_{asiento\ cónico} dA \cos \alpha &= -\int_0^1 P_{asiento\ cónico} 2 \pi \cos \alpha (\cos \alpha x + r_{2entrada}) dx = (23) \\ &= \int_0^1 - \left[ 2 \pi \cos \alpha (\cos \alpha x + r_{2(entrada)}) \right] \{ P_{(entrada)} - (P_{(entrada)} - P_{(salida)})^* \} \\ &\quad \ln \left[ \frac{x \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right] \\ &\quad - \ln \left[ \frac{l \cos \alpha \frac{H^3}{6} + r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}}{r_{2(entrada)} \frac{H^3}{6} - H^4 \cos(90 - \alpha) \frac{1}{12}} \right] \} dx \end{aligned}$$

Utilizando las mismas constantes,  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , representadas en las ecuaciones (16), (17) y (18), el resultado de la integración da:

$$\begin{aligned} -\int_{A_{asiento\ cónico}} P_{asiento\ cónico} dA \cos \alpha &= -2 \pi \cos \alpha \left\{ P_{entrada} r_{2entrada} l + P_{entrada} \cos \alpha \frac{l^2}{2} + \right. \\ &+ \frac{r_{2entrada}}{k_3} \left[ \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - 1 \right] [P_{salida} - P_{entrada}] \\ &+ \left. \frac{\cos \alpha}{k_3} \left[ \frac{1}{2} \left( l^2 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{k_2}{k_1} l \right) \right] [P_{salida} - P_{entrada}] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$





Los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico se pueden expresar:

$$\int_{A \text{ asiento cónico}} \tau|_{h=0} dA \sin \alpha \quad (25)$$

Asumiendo fluido newtoniano y utilizando las ecuaciones (2) y (15) los esfuerzos cortantes se pueden dar:

$$\tau|_{h=0} = \frac{(P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}) k_1}{k_3} \frac{1}{x k_1 + k_2} \frac{H}{2} \quad (26)$$

con lo cual la fuerza debida a los esfuerzos cortantes sobre el cono será:

$$\begin{aligned} \int_{A \text{ asiento cónico}} \tau|_{h=0} dA \sin \alpha &= \left[ \frac{(P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}) k_1}{k_3} \frac{2 \pi H \sin \alpha}{2} \right] * \\ &* \left[ \frac{r_{2\text{entrada}}}{k_1} \ln \left( \frac{1 k_1 + k_2}{k_2} \right) + \cos \alpha \left\{ \frac{1}{k_1} - \frac{k_2}{k_1^2} \ln \left( \frac{1 k_1 + k_2}{k_2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Obsérvese que los esfuerzos cortantes valen cero cuando la longitud del asiento cónico es cero.

La fuerza total que actúa sobre la corredera con asiento cónico requerirá de la adición de los términos de las fuerzas de cantidad de movimiento, los términos de presión estática y los términos debidos a los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico, obteniendo:

$$\begin{aligned} F_{\text{corredera } j} &= \rho 2 \pi \sin(\alpha) \frac{1}{\mu^2} \left[ \frac{K_1^2 (P_{\text{salida}}^2 + P_{\text{entrada}}^2 - 2 P_{\text{salida}} P_{\text{entrada}})}{K_3^2 (1 K_1 + K_2)^2} \right] \\ &+ \left( \frac{H^5}{120} r_{2\text{salida}} - \cos(90 - \alpha) \frac{H^6}{240} \right) \\ &- \rho \pi V_0^2 r_{2\text{entrada}}^2 \frac{4}{3} - P_{\text{entrada}} \pi r_{2\text{entrada}}^2 + P_{\text{salida}} 2 \pi \cos(90 - \alpha) [r_{2\text{salida}} H - \frac{H^2}{2} \cos(90 - \alpha)] \\ &- 2 \pi \cos \alpha P_{\text{entrada}} r_{2\text{entrada}} l - 2 \pi \cos \alpha P_{\text{entrada}} \cos \alpha \frac{l^2}{2} \\ &- 2 \pi \cos \alpha \frac{r_{2\text{entrada}}}{k_3} \left[ \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - 1 \right] [P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}}] \\ &- 2 \pi \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{k_3} \left[ \frac{1}{2} \left( l^2 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{k_1}{k_2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{l^2}{2} - \frac{k_2}{k_1} l \right) \right] [P_{\text{salida}} - P_{\text{entrada}}] + \\ &+ \left[ \frac{(P_{\text{entrada}} - P_{\text{salida}}) k_1}{k_3} \frac{2 \pi H \sin \alpha}{2} \right] \\ &+ \left[ \frac{r_{2\text{entrada}}}{k_1} \ln \left( \frac{1 k_1 + k_2}{k_2} \right) + \cos \alpha \left\{ \frac{1}{k_1} - \frac{k_2}{k_1^2} \ln \left( \frac{1 k_1 + k_2}{k_2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$



De la ecuación (28) se observa que:

- El primer término representa las fuerzas de cantidad de movimiento a la salida del volumen de control.
- El segundo término da las fuerzas de cantidad de movimiento a la entrada.
- El tercer y cuarto términos representan las fuerzas de presión a la entrada y a la salida, respectivamente.
- El resto de los términos, excepto el último, están relacionados con las fuerzas de presión sobre el asiento cónico.
- El último término evalúa los esfuerzos cortantes sobre el asiento cónico.

Todas las figuras que se muestran a continuación tienen los siguientes parámetros comunes:  $r_{2 \text{ entrada}} = 2 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 45$  grados. Todas las fuerzas representadas mantienen el mismo signo que se estableció en la ecuación (28), con lo cual representan las fuerzas de reacción.

La figura 55.4 representa la cantidad de movimiento a la entrada y a la salida del volumen de control en función de la longitud del asiento cónico y para un colectivo de presiones diferenciales y distancias entre platos.

Véase que, para longitudes de asiento pequeñas, de pocos milímetros, la cantidad de movimiento saliente aumenta notoriamente a medida que la longitud del asiento disminuye.

De hecho, la cantidad de movimiento saliente aumenta asimismo con la presión de alimentación y con la distancia entre platos.

A priori, se observa el mismo efecto sobre la cantidad de movimiento entrante, aunque los signos son opuestos. Por otro lado, la magnitud de la cantidad de movimiento entrante es mucho menor que la saliente.

Las fuerzas de cantidad de movimiento tenderán a cerrar la válvula, esto sucederá en mayor medida para pequeñas longitudes del asiento cónico, altas presiones de alimentación y distancias entre platos grandes.

En estos casos, la inestabilidad del flujo se prevé mayor. La relevancia de lo expuesto queda esclarecida si se tiene en cuenta que las válvulas limitadoras se construyen actualmente con longitudes de asiento inferiores a de 3 mm.

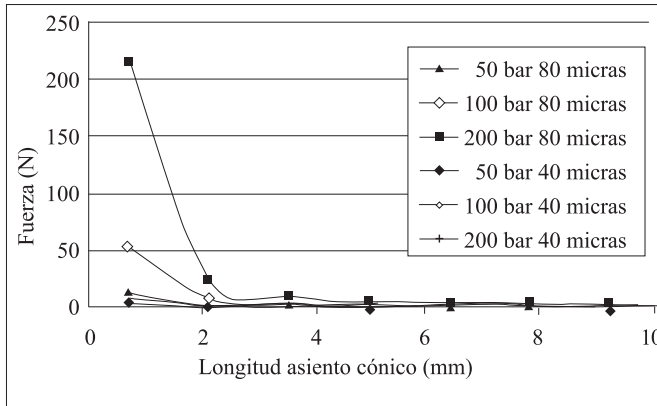
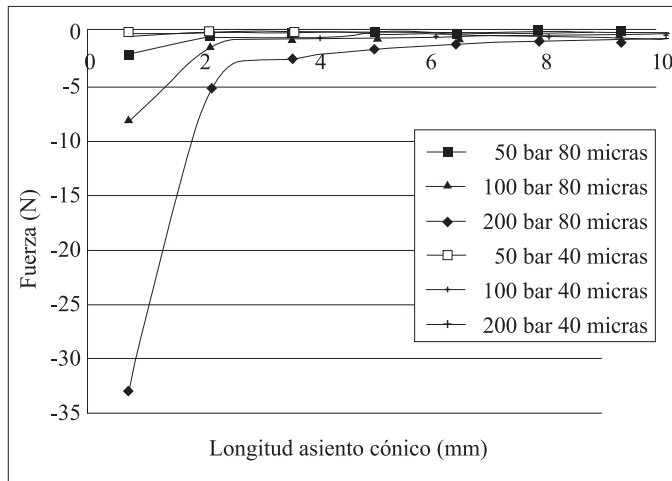


Fig. 55.4  
Cantidad de  
movimiento  
entrante/saliente,  
para  
 $r_2$  entrada = 2 mm,  
distancia entre platos  
80-40 micras  
 $\alpha = 45$  grados,  
presión de  
alimentación  
50, 100, 200 bar

#### a) Salida



#### b) Entrada

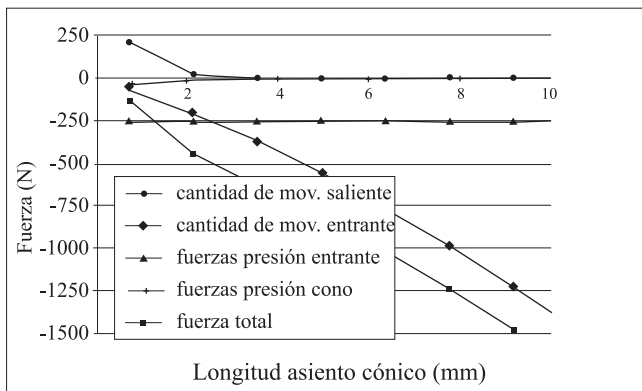
Un término muy importante a tener en cuenta, según Urata, es el que evalúa las fuerzas de presión sobre el asiento cónico. Este término, definido por la ecuación (24) ha sido representado en la figura 55.5. En el mismo gráfico se evalúan asimismo las diferentes fuerzas que actúan sobre la corredera, es decir, todos los términos de la ecuación (28). Obsérvese que la fuerza total sobre la corredera se debe principalmente a la fuerza de presión sobre el asiento cónico, y la actuante sobre la sección de entrada. A medida que la longitud del asiento se incrementa, la fuerza sobre el asiento cónico se vuelve predominante. Por otro lado, cuando la longitud del asiento cónico es inferior a 2 mm, aproximadamente, son las fuerzas de cantidad de movimiento las que juegan un papel decisivo, forzando a la curva de fuerzas resultante a seguir la trayectoria marcada por la curva de fuerzas de cantidad de movimiento. En algunos casos, (v. figura 55.5b), esto conduce a un cambio de signo de la fuerza resultante.



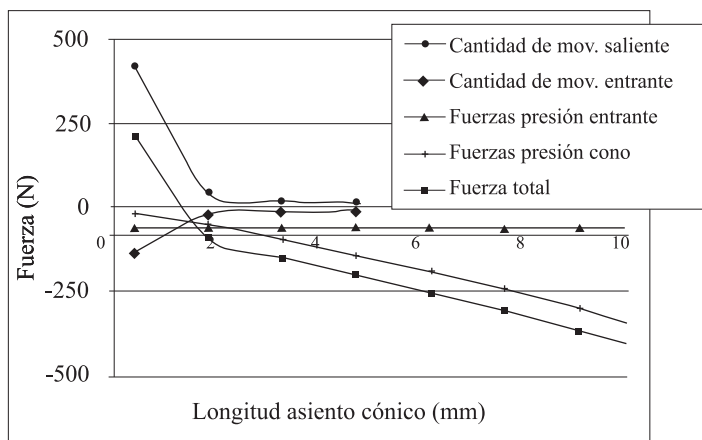
Aunque no queda reflejado en la figura 55.5, se ha de remarcar que las fuerzas sobre el asiento cónico experimentan cambios poco significativos cuando se modifica la distancia entre la corredera y la base cónica. Estas fuerzas, por otro lado, cambian sustancialmente al modificar la presión de alimentación. Este efecto podría predecirse si se comprueba la distribución de presiones a lo largo del asiento cónico, se observa que la distribución de presiones permanece prácticamente constante para el rango de distancias entre platos estudiado y varía drásticamente con la presión de alimentación.

El efecto del diámetro de entrada y el ángulo del cono es estudiado en la figura 55.6, donde se observa que la fuerza resultante sobre la corredera queda afectada al modificar la sección de entrada. Véase que, al aumentar el diámetro de entrada, las curvas no sólo experimentan un desplazamiento, sino que además su pendiente aumenta, (figura 55.6a). De hecho, la pendiente de la curva de fuerzas resultante cambia con la presión de alimentación y con la sección de entrada.

Fig. 55.5  
Fuerzas en  
dirección axial  
sobre la corredera,  
término a término



a) Presión de alimentación 200 bar, distancia cono/asiento 80 micras



b) 50 bar, 160 micras

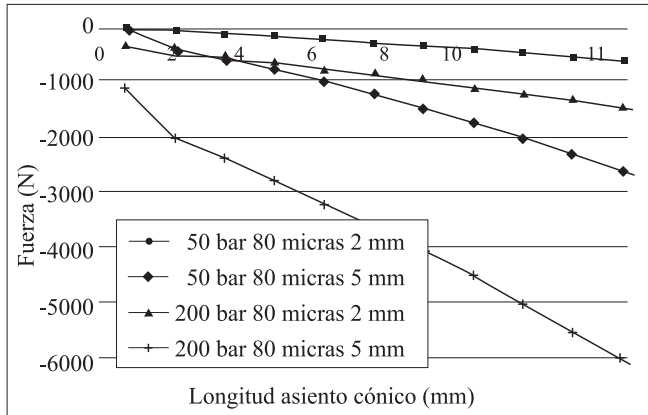
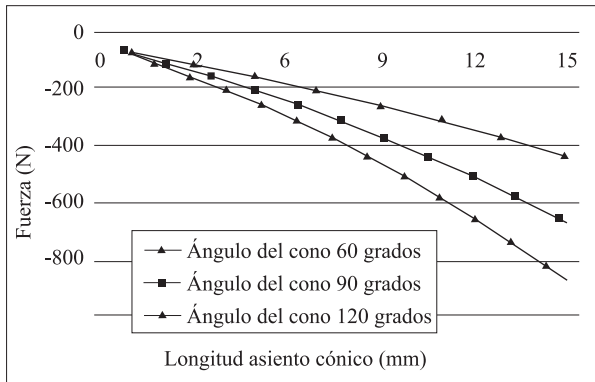


Fig. 55.6  
Fuerza total  
sobre la corredera,  
para una serie  
de diámetros  
de entrada,  
ángulos del cono,  
y una distancia  
cono /asiento de  
80 micras

a) Radio de entrada, 2, 5 mm



b) Ángulos del cono 60,90,120; presión entrada = 50 bar

La figura 55.6b muestra la fuerza total sobre la corredera en función del ángulo del cono. Véase que, a medida que el ángulo del cono aumenta, aumenta la fuerza sobre la corredera. Para entender mejor este gráfico, se ha de recordar que para una longitud de asiento cónico dada, cuanto mayor sea el ángulo del cono mayor será el radio de salida ( $r_{2 \text{ salida}}$ ), (v. figura 55.1), con lo cual la componente de la fuerza en dirección axial será asimismo mayor.





## Análisis adimensional

### 9.1 Introducción

Hasta el momento se ha visto que las ecuaciones en forma integral o diferencial resuelven muchos de los problemas de mecánica de fluidos. No obstante, la resolución de problemas de flujo complejos requiere de la experimentación. Antes de realizar cualquier ensayo experimental, es básico conocer cuáles son las variables que intervienen en el fenómeno y compactarlas en forma de grupos adimensionales. Si se grafican los resultados experimentales, utilizando gráficas adimensionales, se observa que, por un lado, se reduce notoriamente el tiempo de experimentación y, por otro lado, las gráficas halladas son mucho más genéricas que sus homólogas dimensionales.

Los grupos adimensionales que caracterizan un fenómeno físico dado se determinan mediante la técnica de análisis adimensional. El análisis adimensional reduce el número de variables que se deben considerar en una investigación, compactando las variables originales en paquetes convenientes denominados *grupos adimensionales*. El análisis adimensional proporciona las herramientas para decidir a priori si es probable que un flujo sea laminar o turbulento, o si las suposiciones como la consideración de la compresibilidad en un fluido son acertadas.

Con el fin de demostrar la potencia del análisis dimensional en la experimentación, se propone realizar el siguiente experimento. Sea el fenómeno de movimiento de una esfera en un fluido viscoso; la fuerza de arrastre es función de las variables  $F = f(D, V, \rho, \mu)$ . Para hallar la relación entre la fuerza de arrastre y dichas variables, se deberían hacer una serie de ensayos experimentales modificando cada una de las variables, los diámetros de la esfera, las velocidades, las densidades y las viscosidades. Por tanto, se deberían realizar un número elevadísimo de gráficas dimensionales que relacionasen la fuerza con una de estas variables, por ejemplo la velocidad del fluido, y para diferentes diámetros de la esfera, manteniendo constante el fluido de trabajo. Basta con considerar que se deberían realizar gráficas para todos los fluidos de trabajo existentes, para tener una idea del coste de la experimentación.

Mediante el análisis dimensional, se llega a demostrar que estas variables se pueden relacionar de la siguiente forma:

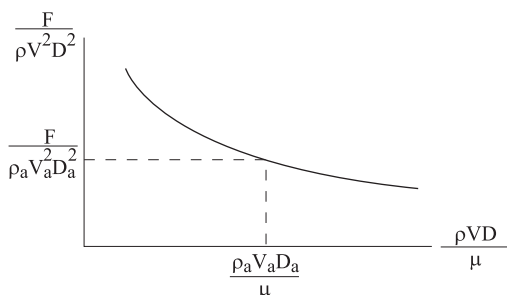


$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)$$

La función  $f$  que relaciona estos dos grupos adimensionales se puede determinar gracias a ensayos experimentales.

Mediante la realización de un ensayo experimental para un diámetro de esfera  $D$  y un fluido dados, variando únicamente la velocidad del fluido y para cada caso midiendo la fuerza de arrastre, se puede realizar el gráfico siguiente.

Fig. T 9.1



Véase que únicamente se ha realizado un experimento para un diámetro de esfera y fluido dados, pero la información obtenida expuesta en modo adimensional permitirá extrapolar resultados para cualquier diámetro de esfera y fluido, reduciendo así notablemente los ensayos realizados y ampliando la aplicabilidad de los mismos.

## 9.2 Fundamentos del análisis adimensional

El principio de homogeneidad dimensional (PHD), establece que cualquier ecuación que describe por completo un fenómeno físico debe ser dimensionalmente homogénea. En Mecánica de Fluidos, se han utilizado tradicionalmente ecuaciones que no cumplían el principio de homogeneidad dimensional, bien porque englobaban variables que tenían que ser dadas en diferentes sistemas de unidades o bien porque necesitaban de constantes dimensionales. En la actualidad, el empleo de dicho tipo de ecuaciones ha quedado reducido a casos muy concretos, con lo que la gran mayoría de ecuaciones utilizadas en Mecánica de Fluidos cumplen el PHD.

Existen tres métodos para hallar los grupos adimensionales que caracterizan un fenómeno:

- Método de  $\pi$  o Buckingham
- Método Matricial o de Rayleigh
- Método de Normalización de ecuaciones

En los apartados siguientes, se expondrán las líneas básicas de actuación de cada uno de estos métodos.



### 9.3 Teorema de $\pi$ ó Buckingham

Si se sabe que un proceso físico está gobernado por una relación dimensionalmente homogénea que comprende  $n$  parámetros dimensionales (variables que intervienen en el fenómeno), tales como:

$X_1 = f(X_2, X_3, \dots, X_n)$ , donde las  $X_i$  son variables dimensionales, existe una relación equivalente que contiene un número menor  $(n-K)$  de parámetros adimensionales.

$K$  es, generalmente, el número de magnitudes fundamentales contenido en las  $X$  (variables originales) y nunca puede ser mayor que dicho número de magnitudes fundamentales. El valor de  $K$  queda, en realidad, establecido por el rango de la matriz dimensional del proceso.

Los grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno físico objeto de estudio, se denominan  $\pi$  y se pueden dar en la forma  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{(n-K)})$ . Para la determina-

ción de los grupos adimensionales  $\pi$  se elegirán unas variables fundamentales tales que entre todas ellas abarquen las magnitudes fundamentales. No obstante, se ha de cumplir que ninguna combinación de las variables fundamentales elegidas dé lugar a un grupo adimensional. El número de variables fundamentales es, generalmente, igual al número de magnitudes fundamentales, aunque queda definido por el valor de  $K$ .

Cada uno de los grupos adimensionales  $\pi$  estará formado por cada una de las variables fundamentales elevadas a un exponente desconocido y multiplicadas por una de las variables restantes. Una vez determinados los exponentes, se tiene el grupo adimensional en cuestión. En el ejemplo siguiente, se detalla cada uno de los pasos a seguir.

#### 9.3.1 Caso de cálculo de las pérdidas de energía en una tubería (No se considera la transferencia de calor)

1. Las variables que influyen en el fenómeno son:  $y = g \cdot h = f(L, D, V, \rho, \mu, \epsilon)$

$y = g \cdot h$  = pérdida de energía mecánica entre dos puntos de un conducto

Utilizando el sistema  $[M L T]$ , las dimensiones de cada una de las variables se expresan:

$$\left[ \frac{L^2}{T^2} \right] = f \left( [L], [L], \left[ \frac{L}{T} \right], \left[ \frac{M}{L^3} \right], \left[ \frac{M}{L T} \right], [L] \right);$$

2. Determinación del número de parámetros adimensionales que se requieren construir.

El número de dimensiones fundamentales que se obtiene de la determinación del mayor determinante no nulo hallado partiendo de la matriz de dimensiones de las variables (rango de la matriz dimensional) es 3,  $K=3$ , M, L, T.



Si se eligen  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ , como variables fundamentales, la masa sólo aparece en  $\rho$  y el tiempo sólo en  $V$ , de tal manera que ninguna combinación de  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$  puede ser adimensional.

El número de parámetros adimensionales que caracterizan este fenómeno es  $n - K = 7 - 3 = 4$

3. Si se eligen como variables fundamentales  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ , los grupos adimensionales serán:

$$\pi_1 = y \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[ \frac{L^2}{T^2} \right] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$

Como  $\pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$ , igualando los exponentes de ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$\begin{array}{l} M \longrightarrow a = 0 \\ L \longrightarrow 2 - 3a + b + c = 0 \\ T \longrightarrow -2 - b = 0 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Siendo el resultado: } \overline{\pi_1} = \underbrace{\frac{L^2}{T^2}}_y \cdot \underbrace{\left[ \frac{L}{T} \right]^{-2}}_{V^{-2}} = y \cdot V^{-2} = \overline{\frac{y}{V^2}};$$

Realizando el mismo proceso para las restantes tres variables no elegidas como fundamentales, se obtiene:

$$\pi_2 = L \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$

$$\begin{array}{l} M \longrightarrow a = 0 \\ L \longrightarrow -b = 0 \\ T \longrightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right. \left\| \overline{\pi_2} = \overline{\frac{L}{D}};$$

$$\pi_3 = \mu \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[ \frac{M}{LT} \right] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$

$$\begin{array}{l} M \longrightarrow 1 + a = 0 \\ L \longrightarrow -1 - b = 0 \\ T \longrightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \quad \left\| \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array} \right. \left\| \overline{\pi_3} = \mu \cdot \rho^{-1} \cdot V^{-1} \cdot D^{-1} = \overline{\frac{\mu}{\rho VD}};$$

$$\pi_4 = \varepsilon \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$



$$\begin{array}{l} M \longrightarrow a = 0 \\ L \longrightarrow -b = 0 \\ T \longrightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \left\| \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right\| \left\| \overline{\pi_4} = \frac{\varepsilon}{D} \right\|;$$

Definiendo uno de los grupos adimensionales en función de los demás:  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$ , y sustituyendo los valores de  $\pi$  por su equivalente, se llega a:

$$\frac{y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\mu}{\rho VD}; \frac{\varepsilon}{D}\right) = f\left(\frac{L}{D}; \frac{1}{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right);$$

Obsérvese que, en realidad, mediante el análisis adimensional se obtiene una colección de grupos adimensionales, sin que se conozca la relación entre ellos. La función que relaciona dichos grupos adimensionales se puede obtener, por ejemplo, multiplicando por una constante cualquiera alguno o varios de los grupos adimensionales, o bien elevando a cualquier potencia cualquiera de los grupos.

El colectivo de grupos adimensionales hallados se puede dar:  $\frac{y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; Re; \frac{\varepsilon}{D}\right)$ ,

dado que, desde el punto de vista adimensional,  $\frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\rho V D}$

Puesto que, la pérdida de energía del fluido en el conducto, se observa, es directamente proporcional a la longitud del mismo se puede decir:

$$y = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot f\left(Re \cdot \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Ecuación que se denomina ecuación de *Darcy-Weisbach*. El número 2 se obtiene de la contrastación experimental, y la función restante, que depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, deberá ser hallada experimentalmente.

## 9.4 Extensión del ejemplo utilizando el método matricial

Sea el caso anterior, donde se quieren evaluar las pérdidas de energía en un conducto.

Las variables que intervenían en el fenómeno eran:  $y = (L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$

El sistema dimensional que debe ser empleado es  $[MLT]$ ; tras establecer el rango de la matriz dimensional del proceso, se observa que este es 3, con lo que, al igual que en el caso precedente, se deben elegir tres variables como fundamentales, se eligen  $D, \rho, V$ . El método consiste, inicialmente, en crear la matriz de dimensiones poniendo las tres variables fundamentales en las tres columnas iniciales, tal como muestra la tabla



adjunta; posteriormente, se sitúan en la parte inferior de la primera de las columnas, la columna de dimensiones, las tres variables fundamentales elegidas, en el mismo orden en que están situadas en la primera de las filas. Finalmente, el método establece que si se consigue, mediante la combinación de cualquiera de las tres filas de dimensiones, denominadas filas (A), (B), (C), que la matriz formada por las tres variables fundamentales situadas en los dos ejes coordenados de la matriz, sea una matriz diagonal, entonces, las demás columnas de la matriz definirán los grupos adimensionales característicos del problema. Obsérvese, en la tabla siguiente, que para conseguir la diagonalización de la matriz de variables fundamentales se ha multiplicado la primera fila, (A), por tres y se le ha sumado la fila (B) y la (C). La segunda fila de la matriz de variables fundamentales se consigue trasladando la fila (A), mientras que la tercera y última fila se consigue trasladando la fila (C) y multiplicándola por (-1).

	$D$	$\rho$	$V$	$y$	$\varepsilon$	$L$	$\mu$
(A) $M$	0	1	0	0	0	0	1
(B) $L$	1	-3	1	2	1	1	-1
(C) $T$	0	0	-1	-2	0	0	-1
(3A+B+C) $D$	1	0	0	0	1	1	1
(A) $\rho$	0	1	0	0	0	0	1
-(C) $V$	0	0	1	2	0	0	1

$$\pi_1 = \frac{y}{V^2}; \quad \pi_2 = \frac{\varepsilon}{D}; \quad \pi_3 = \frac{L}{D}; \quad \pi_4 = \frac{\mu}{D\rho V};$$

Véase que los grupos adimensionales se obtienen de dividir la variable de cada columna no diagonalizada por la variable o las variables de las filas diagonalizadas. Los grupos adimensionales hallados son los mismos que los obtenidos en el apartado anterior.

## 9.5 Método de normalización de las ecuaciones o método del análisis inspeccional

El tercer método para la determinación de grupos adimensionales consiste en la transformación de las ecuaciones diferenciales para que queden escritas en forma adimensional. A partir de estas, se determinarán los coeficientes numéricos que afectan los diferentes términos. Estos coeficientes serán los invariantes de semejanza de los fenómenos físicos regidos por las ecuaciones diferenciales iniciales, es decir, los grupos adimensionales característicos del fenómeno físico regido por la ecuación diferencial.



A modo de ejemplo, se determinarán los grupos adimensionales englobados en la ecuación de Navier-Stokes para fluido incompresible, laminar y en régimen transitorio.

Las variables que intervienen en esta ecuación hacen referencia a la naturaleza del fluido, a sus propiedades de transporte, a su estado termodinámico y a su estado de movimiento. Las soluciones de esta ecuación dependen de las condiciones de contorno y de su valor inicial; esto hace que esta ecuación no tenga, hasta la fecha, una solución general, sino muchas de particulares.

Para adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes, se adoptarán una serie de magnitudes de referencia que se detallan a continuación.

$\bar{T}$  = Se define como el tiempo característico durante el cual el fluido experimenta variaciones de velocidad, por ejemplo, de orden unidad.

$\bar{V}$  = Es el valor medio espacial de la velocidad, dentro del volumen de control.

$\bar{L}$  = Se define como una longitud característica.

$\bar{P}$  = Se define como la presión de estancamiento del fluido.

Partiendo de estas magnitudes de referencia, se pueden definir las siguientes variables adimensionales:

$$t_* = \frac{t}{\bar{T}}; \quad \bar{V}_* = \frac{\bar{V}}{\bar{V}}; \quad P_* = \frac{P}{\bar{P}}; \quad z_* = \frac{z}{\bar{L}};$$

Además de la adimensionalización de las variables, se deberán adimensionalizar los operadores diferenciales existentes en la ecuación de Navier-Stokes; así:

El operador diferencial nabla  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ ;

se adimensionalizará de la siguiente forma:  $\nabla = \frac{\partial}{\partial(x_* \cdot L)} = \frac{1}{L} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_*} + \frac{\partial}{\partial y_*} + \frac{\partial}{\partial z_*} \right)$ ;

$$\nabla \cdot L = \nabla_*$$

Asimismo, el operador diferencial laplaciano:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  se adimensionalizará:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial(x_* L)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(y_* L)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(z_* L)^2} = \frac{1}{L^2} \nabla_*^2$$

La ecuación vectorial de Navier-Stokes para fluido incompresible toma la forma:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\nabla \frac{P}{\rho} - \nabla(gz) + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \bar{V}$$

Sustituyendo los parámetros acabados de hallar en la ecuación de Navier-Stokes, se tiene:



$$\frac{\bar{V}}{\bar{T}} \cdot \frac{\partial \bar{V}_*}{\partial t_*} + \frac{\bar{V}^2}{\bar{L}} (\bar{V}_* \cdot \nabla_*) \cdot \bar{V}_* = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\bar{L}} \nabla_* (\bar{P} P_* + \rho g \bar{L} z_*) + \frac{\mu}{\rho} \cdot \frac{\langle V \rangle}{\bar{L}^2} \cdot \nabla_*^2 \cdot \bar{V}_*$$

Obsérvese que la viscosidad  $\mu$  y la densidad  $\rho$  del fluido no han sido adimensionalizadas, puesto que según los considerándolos iniciales, se consideran constantes.

Dividiendo los dos términos de la ecuación adimensionalizada por  $\frac{\bar{V}^2}{\bar{L}}$ , se obtiene:

$$\frac{\bar{L}}{\bar{V} \bar{T}} \cdot \frac{\partial \bar{V}_*}{\partial t_*} + (\bar{V}_* \cdot \nabla_*) \cdot \bar{V}_* = -\frac{\bar{P}}{\rho \bar{V}^2} \cdot \nabla_* \cdot P_* - \frac{g \bar{L}}{\bar{V}^2} \cdot \nabla_* \cdot z_* + \frac{\mu}{\rho \bar{V} \bar{L}} \cdot \nabla_*^2 \cdot \bar{V}_*$$

Véase que la ecuación resultante es la ecuación de Navier-Stokes adimensionalizada, la cual está multiplicada por unos grupos adimensionales, que son:

$$\frac{\bar{L}}{\bar{V} \bar{T}}; \frac{\bar{P}}{\rho \bar{V}^2}; \frac{g \bar{L}}{\bar{V}^2}; \frac{\mu}{\rho \bar{V} \bar{L}};$$

Estos son los grupos adimensionales de las magnitudes características definitorias del fenómeno. Dichos grupos son:

$$\frac{\bar{L}}{\bar{V} \bar{T}}; \quad \text{número de Strouhal}$$

Es el cociente entre aceleración local debida a la no estacionariedad del movimiento, asociada a un tiempo característico  $\bar{T}$  y la aceleración convectiva.

Para un proceso casi estacionario, el tiempo característico de la no estacionariedad  $\bar{T}$  es mucho mayor que el tiempo que una partícula tarda en recorrer la longitud característica del proceso  $\frac{\bar{L}}{\bar{V}}$ .

El número de Strouhal se acostumbra a dar como:

$$St = \frac{f \cdot x}{\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}}, \text{ dónde:}$$

$$f = \text{frecuencia (ciclos/s)}; \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \text{velocidad (m/s)}; x = \text{distancia (m)}$$

$\frac{\bar{P}}{\rho \bar{V}^2}$ ; número de Euler. Representativo de todo proceso de transformación de energía de presión en energía cinética caso fluido incompresible.

$\frac{g \bar{L}}{\bar{V}^2} = \frac{1}{F^2}$ ,  $F$  = número de Froude. Se define como el cociente entre las fuerzas de inercia y las gravitatorias.



$\frac{\mu}{\rho \bar{V} L} = \frac{1}{Re}$ ,  $Re$  = número de Reynolds. Representa la relación entre las fuerzas de inercia y las fuerzas viscosas.

Estos cuatro números caracterizan el movimiento de un fluido real e incompresible, en régimen transitorio y bajo la acción de las fuerzas gravitatorias.

## 9.6 Algunos de los grupos adimensionales más comunes en Mecánica de Fluidos son:

$$Re = \frac{\rho V \ell}{\mu} = \text{número de Reynolds}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}}$ ; representa los efectos de la viscosidad sobre el flujo.

$$M = \frac{V}{\sqrt{\beta/\rho}} = \text{número de Mach}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas elásticas de compresión}}$ ; relaciona la velocidad del fluido y la del sonido.

$\beta$  es el módulo de compresibilidad volumétrica.

$$W = \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma} = \text{número de Weber}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas de tensión superficial}}$ ; representa los efectos de la tensión superficial (que es importante cuando existe una interfaz entre dos fluidos). La tensión superficial actúa únicamente a pequeñas escalas.

$$F = \frac{V}{\sqrt{g \ell}} = \text{número de Froude}$$

$\frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas másicas}}$ ; representa los efectos de una superficie libre, si esta no existe se puede omitir dicho grupo adimensional.

En fenómenos donde hay oscilaciones de flujo es interesante utilizar el n° de Strouhal.

$$S = \frac{f x}{V} = \frac{\left(\frac{x}{V}\right)}{\left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{\text{Tiempo característico de flujo}}{\text{Tiempo característico de oscilación}}$$



En transferencia de calor, uno de los números más empleados sería el número de Prandtl, que indica la importancia relativa entre dos fenómenos de transporte similares: la difusión viscosa o difusión de cantidad de movimiento y la difusión de calor por conducción.

$$Pr = \frac{C_p \mu}{K} = \frac{\text{Disipación}}{\text{Conducción}}$$

Otro grupo adimensional ampliamente utilizado sería el número de Péclet. El cual da la relación entre el calor por convección y el calor recibido por conducción.

$$Pe = \frac{\rho V C_p L}{K}$$

Obsérvese que se cumple la relación: Péclet= Prandtl \* Reynolds.

Otro colectivo de grupos especialmente relevante en flujo externo se define:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2} \rightarrow \text{coeficiente de resistencia}$$

$D$  = fuerza de arrastre

$$\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2 = \text{fuerza de inercia}$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2} \rightarrow \text{coeficiente de sustentación}$$

$L$  = Fuerza de sustentación

$$\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2 = \text{Fuerza de inercia}$$

$$C_p = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad \frac{\text{Fuerzas de presión}}{\text{Fuerzas de inercia}} \rightarrow \text{Coeficiente de presión.}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad \frac{\text{Fuerzas debidas a esfuerzos cortantes}}{\text{Fuerzas de inercia}} \rightarrow \text{Coeficiente de fricción.}$$

Estos grupos adimensionales aparecen en una gran cantidad de problemas de mecánica de fluidos. No obstante, existe un enorme número de grupos que tienen un empleo más específico.





## 9.7 Pruebas con modelos, extrapolación de resultados

En función de lo dicho hasta el momento, podría parecer que los grupos adimensionales se utilizan únicamente para realizar gráficas adimensionales. De hecho, su utilización en la extrapolación de resultados entre los ensayos realizados con un modelo y el comportamiento del prototipo es muy amplia.

A la hora de extrapolar resultados entre modelo y prototipo, es necesario que se cumplan los *principios de semejanza*. Existen tres tipos de semejanza: geométrica, cinemática y dinámica.

- a). La semejanza geométrica. Requiere que las formas del modelo y del prototipo sean exactamente las mismas; el modelo cumple todas las relaciones de escala con referencia al prototipo.
- b). Semejanza cinemática. Implica que los triángulos de velocidades entre modelo y prototipo sean homotéticos. Las relaciones de la velocidad del fluido y otras velocidades relevantes deben ser iguales para el modelo y el prototipo. La orientación del flujo con respecto al objeto debe ser la misma. Dos flujos que son geométrica y cinemáticamente similares tienen patrones de líneas de corriente geométricamente similares. Si los efectos de viscosidad, de tensión superficial o de compresibilidad son importantes, la semejanza cinemática está condicionada a que exista semejanza dinámica.
- c). Semejanza dinámica. Implica que los triángulos de fuerzas entre modelo y prototipo sean homotéticos. La relación de fuerzas entre modelo y prototipo ha de ser la misma en puntos correspondientes, y esta relación ha de ser la misma para todos los tipos de fuerzas existentes.

Obsérvese que muchos de los grupos adimensionales relacionan fuerzas, otros, velocidades, y otros, longitudes. se ha de entender que, detrás de cada una de las leyes de semejanza, aparecen unos grupos adimensionales que han de cumplirse.

El principio de semejanza se puede enunciar del modo siguiente:

Si los flujos en el modelo y en el prototipo cumplen con la semejanza geométrica y cinemática de todos los parámetros relevantes, y si existe semejanza dinámica en todos los parámetros de variables independientes relevantes, se tiene entonces semejanza dinámica completa, esto es, todos los parámetros de variables dependientes son iguales.

De hecho, la existencia de semejanza geométrica, cinemática y dinámica entre modelo y prototipo, únicamente implica que la teoría de modelos es aplicable en el caso objeto de estudio, pero esto no quiere decir que el resultado de igualar los grupos adimensionales entre modelo y prototipo dé lugar a un resultado que pueda considerarse satisfactorio, puesto que en la aplicación de la teoría de modelos aparecen muchos problemas asociados. Un ejemplo de ello se define en el caso siguiente.



Se desean extrapolar resultados entre un coche prototipo y su modelo a escala 1:10. Para ello, se dispone de un túnel de viento donde se situará el modelo. Inicialmente, se realiza una única prueba, cuando la velocidad del aire en el túnel de viento es de 80 m/s; se mide, mediante una balanza, la fuerza de resistencia que el fluido crea sobre el modelo, que es de 250 N. Si las condiciones termodinámicas, presión y temperatura del aire, para el modelo y el prototipo se pueden considerar las mismas, determínese la velocidad correspondiente para el prototipo y la resistencia que el prototipo ofrecerá al aire. Se acepta la existencia de semejanza geométrica entre modelo y prototipo.

Antes de empezar a resolver este ejercicio, cabe señalar que, en muchos casos, existen problemas para que se cumpla la semejanza geométrica, puesto que, por ejemplo, el grupo adimensional que relaciona la rugosidad relativa entre el modelo y el prototipo no siempre es físicamente posible que se cumpla.

La fuerza de arrastre está definida en el coeficiente de arrastre  $C_D$ ; a priori, se podría dar este grupo adimensional en función de todo el resto de grupos adimensionales,  $C_D = f(F; Re; M; W; S; P_r; P_e, \dots)$ . No obstante, se observa que los números de Prandtl i el Pecklet, no van a ser relevantes, dado que no se pretende estudiar la transferencia de calor entre el fluido y el coche. El número de Strouhal es, asimismo, irrelevante, puesto que el flujo a estudiar es en régimen permanente. El número de Froude y el número de Weber son irrelevantes, puesto que no existe superficie libre ni efectos de tensión superficial. El número de Mach podría llegar a ser relevante; para analizar esta posibilidad en el presente caso, se determinará el valor de dicho número.

$$M = \sqrt{\frac{V^2}{\frac{\beta}{\rho}}} = \sqrt{\frac{V^2}{C^2}} = \frac{V}{C} = \frac{80 \text{ m/s}}{\sqrt{\gamma RT}} = \frac{80}{\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 293}} = 0,233$$

Véase que se ha considerado que la temperatura del aire es de 20°C.

Puesto que se ha obtenido que  $M < 0,3$ , el fluido se puede tratar como incompresible y, consecuentemente, el número de Mach no es relevante para este estudio.

Así pues, parece que los dos números adimensionales relevantes son  $C_D = f(Re)$ .

$$Re = \frac{\rho V \ell}{\mu}; \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2};$$

Igualando estos dos números adimensionales para el modelo y el prototipo, se obtiene:

$$\left. \frac{\rho V \ell}{\mu} \right|_{\text{modelo}} = \left. \frac{\rho V \ell}{\mu} \right|_{\text{prototipo}} \quad \text{Como el fluido de trabajo y las condiciones termodinámicas}$$

son las mismas, se tiene que  $\rho_m = \rho_p$ ;  $\mu_m = \mu_p$ . Despejando la velocidad del prototipo, se llega a:



$$V_p = \frac{V_m \cdot \ell_m}{\ell_p} = 80 \cdot \frac{1}{10} = 8 \text{ m/s}$$

Es decir, si el ensayo para el modelo se realiza a 80 m/s, en realidad se está simulando el comportamiento del prototipo viajando a 8 m/s. Aquí se observa que la escala del modelo es muy relevante a la hora de aplicar teoría de modelos. Ello explica el porqué en general, se tiende a trabajar con modelos a escalas cercanas a 1:1.

Igualando ahora el coeficiente de arrastre entre modelo y prototipo, se obtiene:

$$\left. \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2} \right|_m = \left. \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2} \right|_p \quad D_p = \frac{D_m \cdot V_p^2 \cdot \ell_p^2}{V_m^2 \cdot \ell_m^2} = \frac{250 \cdot 8^2 \cdot 10^2}{80^2 \cdot 1^2} = 250 \text{ N}$$

con lo que se puede decir que, con este ensayo, se ha simulado el comportamiento del vehículo real moviéndose a una velocidad de 8 m/s, siendo la resistencia que el prototipo ofrece al aire, yendo a esta velocidad, de 250 N.

Ni que decir tiene que la velocidad del modelo debería ser enorme, con el fin de estimar las fuerzas de arrastre en un vehículo real moviéndose a una velocidad real. Se observa, en consecuencia, que existe cierta problemática inherente a la extrapolación de resultados. Problemática que, tal y como se ha mencionado previamente, se minimiza al trabajar a escalas cercanas a 1:1.



## Problema 56

### Enunciado

Aplice el teorema de  $\pi$  para determinar las pérdidas de energía en una tubería. Realice nuevamente el problema utilizando el método matricial.

Conceptos generales del teorema de  $\pi$  o Buckingham.

Si se sabe que un proceso físico está gobernado por una relación dimensionalmente homogénea que comprenda a “n” parámetros dimensionales, tales como:

$$X_1 = f(X_2, X_3, X_4, \dots);$$

donde las X son variables dimensionales, existe una relación equivalente que contiene un número menor (n-k) de parámetros adimensionales tales como:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{(n-k)});$$

$\pi$ : son grupos adimensionales que se constituyen a partir de las X (variables originales)

K: es generalmente el número de dimensionales fundamentales retenido en las X (variables originales)

K nunca puede ser mayor que dicho número de variables originales.

### Resolución

1. Las variables que influyen en el fenómeno de pérdida de energía en un conducto se establecen:

$$Y = g \cdot h = f(L, D, V, \rho, \mu, \epsilon);$$

$Y = g \cdot h$  : pérdida de energía mecánica entre dos puntos de un conducto.

Utilizando el sistema  $[M, L, T]$ , las dimensiones se expresan:

$$\left[ \frac{L^2}{T^2} \right] = f \left( [L], [L], \left[ \frac{L}{T} \right], \left[ \frac{M}{L^3} \right], \left[ \frac{M}{L \cdot T} \right], [L] \right);$$

2. Determinación del número de parámetros adimensionales que se requieren construir.

El número de dimensiones fundamentales es 3 ( $K=3$ ),  $\rightarrow M; L; T$ .

Si se eligen D,  $\rho$ , V, la masa sólo aparecerá en  $\rho$  y el tiempo sólo en V, de tal manera que ninguna combinación de D,  $\rho$ , V, puede ser adimensional, con lo cual  $K=3$ ;



El número de parámetros adimensionales que se requiere construir es:

$$n - k = 7 - 3 = 4$$

3. Si se eligen como variables fundamentales  $D$ ,  $\rho$ ,  $V$ , los grupos adimensionales serán:

$$1.^{\text{r}} \text{ grupo adimensional: } \pi_1 = y \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[ \frac{L^2}{T^2} \right] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$

$$\text{como: } \pi_1 = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow 2 - 3a + b + c = 0 \\ T \rightarrow -2 - b = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Se obtiene: } \pi_1 = \frac{L^2}{T^2} \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^{-2} = \frac{Y}{V^2}$$

$$2.^{\text{o}} \text{ grupo adimensional: } \pi_2 = L \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow -b = 0 \\ T \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Se obtiene: } \pi_2 = \frac{L}{D}$$

$$3.^{\text{r}} \text{ grupo adimensional: } \pi_3 = \mu \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = \left[ \frac{M}{L \cdot T} \right] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$

$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow 1 + a = 0 \\ L \rightarrow -1 - b = 0 \\ T \rightarrow -1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{Se obtiene: } \pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$$

$$4.^{\text{o}} \text{ grupo adimensional: } \pi_4 = \varepsilon \cdot \rho^a \cdot V^b \cdot D^c = [L] \cdot \left[ \frac{M}{L^3} \right]^a \cdot \left[ \frac{L}{T} \right]^b \cdot [L]^c$$



$$\left. \begin{array}{l} M \rightarrow a = 0 \\ L \rightarrow -b = 0 \\ T \rightarrow 1 - 3a + b + c = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -1 \end{array} \right.$$

Se obtiene:  $\pi_4 = \frac{\varepsilon}{D}$

con lo cual se obtiene:  $\pi_1 = \pi_2; \pi_3; \pi_4$

$$\frac{Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}; \frac{\varepsilon}{D}\right) = f\left(\frac{L}{D}; \frac{1}{Re}; \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

4. La ecuación buscada se puede obtener, como ejemplo:

- multiplicando por una constante cualquiera de los grupos adimensionales
- elevando a cualquier potencia cualquiera de los grupos.

con lo cual la relación anterior se puede dar:

$$\frac{2Y}{V^2} = f\left(\frac{L}{D}; Re; \frac{\varepsilon}{D}\right).$$

dado que desde el punto de vista adimensional:  $\frac{1}{Re} = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$ , y también  $\frac{Y}{V^2} \equiv \frac{2 \cdot Y}{V^2}$

El número 2 se obtiene de establecer una contrastación experimental.

puesto que la pérdida de energía es directamente proporcional a la longitud del conducto, se establece:

$$Y = \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2} \cdot f\left(Re; \frac{\varepsilon}{D}\right)$$

Siendo ésta la ecuación que indica la pérdida de energía a lo largo de un conducto cerrado. El término  $f\left(Re; \frac{\varepsilon}{D}\right)$  ha de ser determinado mediante el diagrama de Moody.

### Resolución del problema utilizando el sistema matricial

Las variables que intervienen en el fenómeno son las mismas que en el caso anterior:

$$Y = f(L, D, V, \rho, \mu, \varepsilon)$$

Sistema dimensional  $[M, L, T]$

Las unidades correspondientes a cada parámetro eran:

$$Y = \left[\frac{L^2}{T^2}\right]; \quad D = [L]; \quad \rho = \left[\frac{M}{L^3}\right]; \quad \varepsilon = [L];$$

$$L = [L]; \quad V = \left[\frac{L}{T}\right]; \quad \mu = \left[\frac{M}{T \cdot L}\right];$$

Se eligen como variables fundamentales D,  $\rho$ , V, obteniéndose la tabla siguiente:

		D	$\rho$	V	Y	$\varepsilon$	L	$\mu$
(a)	M	0	1	0	0	0	0	1
(b)	L	1	-3	1	2	1	1	-1
(C)	T	0	0	-1	-2	0	0	-1
(3a+b+c)	D	1	0	0	0	1	1	1
(a)	$\rho$	0	1	0	0	0	0	1
(-c)	V	0	0	1	2	0	0	1

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $\pi_1 = \frac{Y}{V^2} \quad \pi_4 = \frac{\varepsilon}{D} \quad \pi_2 = \frac{L}{D} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$

Véase que los grupos adimensionales son los mismos que en el caso precedente. Siendo el proceso posterior idéntico.

## Problema 57

### Enunciado

Determine los grupos adimensionales que caracterizan la caída de presión de un fluido compresible que fluye en el interior de un conducto.

### Resolución

1. Las variables que influyen en este fenómeno son:

$\Delta p$  = diferencia de presión entre dos puntos del conducto  $\left[ \frac{N}{m^2} \right]$

$l$  = longitud del conducto [m]

$D$  = diámetro del conducto [m]

$\varepsilon$  = rugosidad del tubo [m]

$\rho$  = densidad del fluido  $\left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$

$\mu$  = viscosidad absoluta del fluido  $\left[ \frac{Kg}{m \cdot s} \right]$



$g$  = aceleración de la gravedad  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

$v$  = velocidad del fluido  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$

$\beta$  = módulo de elasticidad del fluido  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

Eligiendo como magnitudes fundamentales MLT y como variables fundamentales  $D$ ,  $V$ ,  $\rho$ , aparecerán  $9 - 3 = 6$  grupos adimensionales. Estos grupos son:

		$D$	$\rho$	$v$	$\Delta p$	$l$	$\varepsilon$	$\mu$	$g$	$\beta$
a	M	0	1	0	1	0	0	1	0	1
b	L	1	-3	1	-1	1	1	-1	1	-1
c	T	0	0	-1	-2	0	0	-1	-2	-2
$3a+b+c$	$D$	1	0	0	0	1	1	1	-1	0
a	$\rho$	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$(-c)$	$v$	0	0	1	2	0	0	1	2	2

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} \quad \frac{l}{D} \quad \frac{\varepsilon}{D} \quad \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \quad \frac{g D}{V^2} \quad \frac{\beta}{\rho V^2}$$

El nombre de estos grupos adimensionales es:

$\frac{\Delta p}{\rho V^2}$  número de Euler

$\frac{l}{D}$  longitud relativa

$\frac{\varepsilon}{D}$  rugosidad relativa

$\frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}$  inversa del número de Reynolds

$\frac{g D}{V^2}$  inversa del número de Froude

La caída de presión entre dos puntos de un conducto vendrá dada por:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f \left( \frac{\mu}{D \rho V}, \frac{\varepsilon}{D}, \frac{l}{D}, \frac{\beta}{\rho V^2}, \frac{g D}{V^2} \right)$$



## Problema 58

### Enunciado

Determine los grupos adimensionales que caracterizan el comportamiento de una turbo máquina que trabaja con un fluido compresible.

### Resolución

1. Las variables características del fenómeno son:

Variables del fluido:

A la entrada de la máquina:  $P_{01}$  = presión de estancamiento  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$T_{01}$  = temperatura de estancamiento [K]

A la salida de la máquina:  $P_{02}$  = presión de estancamiento  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$

$T_{02}$  = temperatura de estancamiento [K]

$\mu$  = viscosidad absoluta del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$

$R$  = constante del gas  $\left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$

$K = \frac{C_p}{C_v}$  relación de calores específicos

Variables de la máquina:

$D$  = diámetro característico [m]

$\Omega$  = velocidad angular  $\left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$

$\dot{m}$  = caudal másico circulante  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{s}} \right]$

$\eta$  = rendimiento del compresor

Como magnitudes fundamentales, se elegirán M L T  $\theta$ .

Se eligen cuatro variables fundamentales que caracterizan las magnitudes fundamentales elegidas. Dichas variables son:  $\dot{m}$ ,  $D$ ,  $\omega$ ,  $T_{01}$ .

Existirán siete grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno. Estos son:



		$\dot{m}$	$D$	$\omega$	$T_{01}$	$P_{01}$	$\mu$	$K$	$R$	$P_{02}$	$\Delta T_0$	$\eta$
a	M	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	L	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
c	T	-1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	-2	0	0
d	$\theta$	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0
a	$\dot{m}$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	$D$	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
$(-1)(c+a)$	$\omega$	0	0	1	0	1	0	0	2	1	0	0
d	$T_{01}$	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0

$$\pi_1 = \frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu D}{\dot{m}} = \frac{\mu D}{Q \rho} = \frac{v D}{s \rho} = \frac{v 4}{\pi D V} \equiv \frac{1}{Re} \quad \text{inversa del número de Reynolds}$$

$$\pi_3 = K \quad \text{índice de politropía.}$$

$$\pi_4 = \frac{R T_{01}}{D^2 \omega^2}$$

$$\pi_5 = \frac{P_{02} D}{\dot{m} \omega}$$

$$\pi_6 = \frac{\Delta T}{T_{01}} \quad \text{relación de temperaturas}$$

$$\pi_7 = \eta \quad \text{rendimiento de la máquina}$$

Una combinación de números adimensionales es asimismo un número adimensional, con lo cual se tiene:

$$\frac{\Pi_1}{\sqrt{\Pi_4}} = \frac{\frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}}{\sqrt{\frac{R T_{01}}{D^2 \omega^2}}} = \frac{P_{01} D^2}{\dot{m} \sqrt{T_{01} R}}; \quad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\dot{m} \sqrt{T_{01} R}}{P_{01} D^2}; \quad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\sqrt{T_{01} R}}{\frac{P_{01} D^2}{\dot{m}}}$$

Este nuevo número adimensional es función del número de Mach a la entrada de la máquina.

Por otro lado:



$$\frac{\Pi_5}{\Pi_1} = \frac{\frac{P_{02} D}{\dot{m} \omega}}{\frac{P_{01} D}{\dot{m} \omega}} = \frac{P_{02}}{P_{01}}; \text{ relación de presiones, salida-entrada de la máquina.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi_4}} = \sqrt{\frac{D^2 \omega^2}{R T_{01}}} = \frac{\omega D}{\sqrt{R T_{01}}};$$

este número es proporcional a la relación entre la velocidad del álabe y la velocidad del sonido. Vendría a ser el número de Mach del álabe.

Del colectivo de números adimensionales hallados, se eligen tres como básicos, los restantes son función de los elegidos.

Por otro lado, dichos grupos básicos han de definir el comportamiento del fluido. Por tanto incluirán  $P_{02}$ ;  $\eta$ ;  $\Delta T_0$ . Así, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}}; \eta; \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f \left[ \frac{\omega D}{\sqrt{R T_{01}}}; \frac{\dot{m} \sqrt{R T_{01}}}{P_{01} D^2}; \frac{\dot{m}}{\mu D}; K \right]$$

Estos números adimensionales relacionan características de ventiladores que trabajen con: presiones diferentes, temperaturas diferentes, medidas diferentes, gases diferentes, etc.

## Problema 59

### Enunciado

Halle los grupos adimensionales que caracterizan el flujo de un fluido incompresible a través de un vertedero triangular. Determine la altura  $h$  que tendría el líquido diferente al original y para un modelo a escala. Determine asimismo la relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido entre modelo y prototipo.

### Resolución

1. Las variables que intervienen en el fenómeno son:

Variables geométricas:

$\alpha$  = ángulo del vertedero

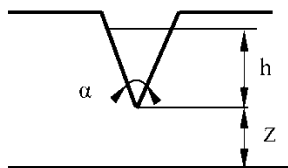
$h$  = altura del nivel del líquido respecto al vértice del vertedero [m]

$Z$  = altura desde la base al vértice del vertedero [m]



Variables cinemáticas:  $Q$  = caudal volumétrico que atraviesa el vertedero.  $\left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$

Fig. 59.1



Variables dinámicas:

$\rho$  = densidad del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right]$

$\mu$  = viscosidad del fluido  $\left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}} \right]$

$g$  = aceleración de la gravedad  $\left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

$P$  = presión  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{m s}^2} \right]$

$\sigma$  = tensión superficial  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{Kg}}{\text{s}^2} \right]$

Las magnitudes fundamentales elegidas son M, L, T.

Se eligen las variables fundamentales como:  $h$ ,  $Q$ ,  $\rho$ , con lo cual han de aparecer cinco grupos adimensionales, estos son:

		$h$	$Q$	$\rho$	$\alpha$	$Z$	$\mu$	$g$	$P$	$\sigma$
a	M	0	0	1	0	0	1	0	1	1
b	L	1	3	-3	0	1	-1	1	-1	0
c	T	0	-1	0	0	0	-1	-2	-2	-2
$b+3c+3a$	$h$	1	0	0	0	1	-1	-5	-4	-3
-c	$Q$	0	1	0	0	0	1	2	2	2
a	$\rho$	0	0	1	0	0	1	0	1	1

$$\alpha \quad \frac{z}{h} \quad \frac{\mu h}{Q \rho} \quad \frac{g h^5}{Q^2} \quad \frac{p h^4}{Q^2 \rho} \quad \frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho}$$

Los números adimensionales obtenidos son:

$\alpha$  ángulo del vertedero

$\frac{z}{h}$  longitud relativa



$$\frac{\mu h}{Q \rho} = \frac{1}{\text{Re}} \text{ inversa del número de Reynolds}$$

$$\frac{g h^5}{Q^2} = \frac{1}{F_r^2} \text{ inversa del número de Froude al cuadrado}$$

$$\frac{p h^4}{Q^2 \rho} \text{ número de Euler.}$$

(Puesto que se trata de un flujo con superficie libre, el número de Euler se puede desestimar.)

$$\frac{\sigma h^3}{Q^2 \rho} \text{ inversa del número de Weber}$$

(Este número sería relevante si la lámina de fluido fuese delgada.)

2. Suponiendo que la lámina de fluido fuese suficientemente gruesa, los números adimensionales relevantes serían:

$$\frac{\mu h}{Q \rho} = \frac{\mu_1 h_1}{Q_1 \rho_1}; \quad \frac{v h}{Q} = \frac{v_1 h_1}{Q_1}; \quad \frac{v}{v_1} = \frac{Q h_1}{Q_1 h}$$

$$\frac{g h^5}{Q^2} = \frac{g h_1^5}{Q_1^2}; \quad \frac{Q^2}{Q_1^2} = \frac{h^5}{h_1^5};$$

de donde

$$\frac{v}{v_1} = \frac{h_1}{h} \frac{h_1^{\frac{5}{2}}}{h_1^2} = \frac{h_1^{\frac{3}{2}}}{h_1^2};$$

siendo ésta la relación entre las viscosidades cinemáticas y las alturas de la lámina de fluido.

3. La relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido para dos vertederos a escala es:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{h_1}{h} \frac{Q}{Q_1}; \quad \frac{h}{h_1} = \frac{Q^{\frac{2}{5}}}{Q_1^{\frac{2}{5}}};$$

así:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{Q_1^{\frac{2}{5}}}{Q^{\frac{2}{5}}} \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q^{\frac{3}{5}}}{Q_1^{\frac{3}{5}}};$$



## Problema 60

### Enunciado

Se quiere realizar un ensayo con un barco a escala 1/30 con el fin de calcular la potencia necesaria en los motores del prototipo. Se conoce que el prototipo tiene una longitud de 30 m y que ha de desplazarse a una velocidad de 30 km/h. Si las variables que intervienen en el fenómeno son:

- Longitud del barco,  $L$ .
- Velocidad del barco,  $V$ .
- Fuerza de arrastre del barco,  $F$ .
- Densidad del fluido,  $\rho$ .
- Viscosidad absoluta del fluido,  $\mu$ .
- Gravedad,  $g$ .

Determine:

1. Los grupos adimensionales que caracterizan dicho fenómeno.
2. La potencia necesaria en los motores del prototipo, suponiendo que se conoce para el modelo la fuerza de arrastre medida en la balanza.

Considere para el agua  $\nu = 1,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

### Resolución

1 Utilizando como magnitudes fundamentales  $M$ ,  $L$ ,  $T$ , se tiene que las variables que intervienen en el fenómeno se pueden representar:

	$F$	$V$	$L$	$\rho$	$\mu$	$g$
$M$	1	0	0	1	1	0
$L$	1	1	1	-3	-1	1
$T$	-2	-1	0	0	-1	-2

Se eligen como variables fundamentales, las cuales contienen todas las magnitudes fundamentales, como:  $L$ ,  $\rho$ ,  $V$ . El número de grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno es de tres, los cuales se obtienen:



	L	$\rho$	V	F	$\mu$	g
M	0	1	0	1	1	0
L	1	-3	1	1	-1	1
T	0	0	-1	-2	-1	-2
L	1	0	0	2	1	-1
$\rho$	0	1	0	1	1	0
v	0	0	1	2	1	2
				$\Pi_1$	$\Pi_2$	$\Pi_3$

con lo que los grupos adimensionales tienen la forma:

$$\Pi_1 = \frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot V^2} \longrightarrow \text{Este número es el coeficiente de arrastre } C_D.$$

$$\Pi_1 = \frac{\mu}{L \cdot \rho \cdot V} = \frac{v}{V \cdot L} \longrightarrow \text{Es la inversa del número de Reynolds } \frac{1}{Re};$$

$$\Pi_3 = \frac{g \cdot L}{V^2} \longrightarrow \text{Es la inversa del número de Froude al cuadrado. } \frac{1}{F_r^2}.$$

Los grupos adimensionales obtenidos permiten establecer relaciones entre modelo y prototipo.

Puesto que se ha de cumplir similitud geométrica en lo que respecta a la porción sumergida del barco, es necesario que se cumpla el número de Froude:

$$\left. \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}} \right|_m = \left. \frac{v}{\sqrt{g \cdot L}} \right|_p$$

de donde:

$$v_m = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} v_p; \quad v_m = \sqrt{\frac{1}{30} \cdot \frac{30}{3,6}} = 1,521 \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad a la que ha de desplazarse el modelo durante el ensayo.

Asumiendo que el fluido de trabajo para el modelo y el prototipo es el mismo, los números de Reynolds para el modelo y el prototipo valen:

$$R_{em} = \left. \frac{v \cdot L}{\nu} \right|_m = \frac{1,521}{1,02 \cdot 10^{-6}} = 1.491.176$$



$$R_{e_p} = \frac{v \cdot L}{\nu} \bigg|_p = \frac{\frac{30}{3,6} \cdot 30}{1,02 \cdot 10^{-6}} = 245.098.039$$

Se observa que el valor del número de Reynolds para el modelo y el prototipo son, en ambos casos, muy elevados, es decir, en ambos casos la zona de trabajo es la característica para flujo turbulento desarrollado. Y aunque es cierto que ambos valores del número de Reynolds no son iguales, en ambos casos las fuerzas de inercia son las únicas relevantes, con lo que el fenómeno a estudiar es similar en ambos casos. Se entiende que la no igualdad del número de Reynolds no afecta al transporte de información entre modelo y prototipo y, por tanto, el número de Reynolds no aporta información adicional.

De la igualación de los coeficientes de arrastre se tiene:

$$\frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot v^2} \bigg|_m = \frac{F}{L^2 \cdot \rho \cdot v^2} \bigg|_p$$

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{L_p^2 \cdot v_p^2}{L_m^2 \cdot v_m^2}$$

Del número de Froude, se ha obtenido la relación:

$$\frac{v_p}{v_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}};$$

con lo que:

$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{L_p^2}{L_m^2} \cdot \frac{L_p}{L_m} = \frac{L_p^3}{L_m^3},$$

La potencia a la que se quiere para desplazar el prototipo será:

$$Na_p = v_p F_p = v_m \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^{\frac{1}{2}} F_m \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^3 = v_m \cdot F_m \left( \frac{L_p}{L_m} \right)^{\frac{7}{2}} = 1,521 F_m (30)^{\frac{7}{2}} = 224933,2 F_m \cdot$$

Cuando en esta ecuación se sustituye la fuerza medida sobre el modelo, se obtiene la potencia necesaria en los motores del prototipo para que la velocidad del mismo sea de 30 km/h.





→ 10

## Flujo interno

### 10.1 Introducción

Uno de los temas más directamente relacionados con la ingeniería industrial es el cálculo de sistemas de tuberías, que aquí se denominará *flujo interno*. El flujo se considerará incompresible y en régimen permanente, de modo que bajo estos considerandos la ecuación de la energía queda reducida a la ecuación de Bernoulli. Los conceptos de pérdidas de energía lineales y singulares, de longitud equivalente, de diámetro hidráulico y de factor de fricción, entre otros, serán definidos en este capítulo.

### 10.2 Tipos de flujo

Se distinguen los siguientes tipos de flujo.

**Flujo laminar:** las capas de fluido se deslizan una sobre otra. el flujo es de naturaleza ordenada. Las fuerzas viscosas asociadas al fluido son de un orden de magnitud mayor que las fuerzas de inercia; el número de Reynolds tendrá valores bajos, en general, para flujo interno; el límite para régimen laminar se acepta como  $Re < 2500$ .

La definición del número de Reynolds para conductos cerrados de sección circular es

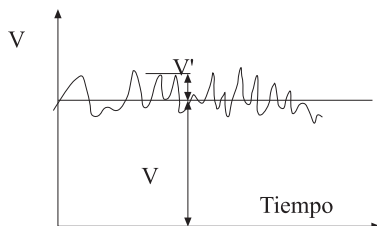
$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

**Flujo turbulento:** el flujo es inestable; se desarrollan fluctuaciones irregulares del flujo; existe un enorme intercambio de cantidad de movimiento entre partículas de fluido. Aunque es cierto que, en este tipo de flujo, las fuerzas de inercia son predominantes, las fuerzas viscosas siguen jugando un cierto papel. Los valores del número de Reynolds para los cuales este tipo de flujo aparece, se acepta que son, en flujo interno, de



$4500 < Re < 10^5$ . Las propiedades del fluido han de ser definidas por un valor medio más una fluctuación con respecto dicho valor  $V = \bar{V} + V'$ . En este capítulo, no obstante, se trabajará con valores medios de la velocidad.

Fig T 10.1  
Fluctuación de  
velocidad para  
flujo turbulento



**Flujo turbulento desarrollado:** Este tipo de flujo aparece para valores de  $Re > 10^5$ . Su característica es que las fuerzas de inercia son muchísimo mayores que las fuerzas viscosas; tanto es así que las fuerzas viscosas no juegan ningún papel. La teoría de flujo potencial tiene muchas similitudes con el flujo en este estado.

Para valores del número de Reynolds comprendidos entre  $2500 < Re < 4500$ , las fuerzas de inercia y viscosas son de un mismo orden de magnitud. En dicha zona, es imposible determinar con precisión características asociadas al flujo como esfuerzos cortantes, debido al carácter inestable del propio fluido. No existe repetibilidad en la realización de mediciones.

Es interesante recordar que los límites definidos no son precisos y que, en experimentos de laboratorio, se ha podido obtener flujo laminar en conductos para valores de Reynolds de 40 000. Se ha comprobado, no obstante, que, en conductos comerciales, para valores de  $Re < 2500$  el flujo es necesariamente laminar.

En este capítulo, se aceptará que el fluido se puede estudiar como incompresible. Se trabajará, en todo momento, con velocidades medias, y el flujo se considerará completamente desarrollado.

### 10.3 Establecimiento de flujo en un conducto

El efecto de la capa límite en el interior de conductos provoca que, a lo largo del tramo inicial en la entrada del conducto, la distribución radial de velocidades sea diferente, hasta llegar a un punto donde el flujo está completamente establecido. Un flujo está completamente establecido cuando el perfil de velocidades es el mismo en todas las secciones transversales. Al inicio del conducto, la capa límite es laminar, y evoluciona a lo largo del conducto hasta que toda la sección del conducto forma parte de la capa límite. En este punto, aparece la condición de flujo totalmente establecido.

De hecho, es necesario tener en cuenta que, cuando se pretende instalar instrumentos para la medición de algún parámetro asociado al flujo, es imprescindible situar dichos instrumentos en una zona del conducto donde el flujo esté completamente establecido.

Sea  $L$  la distancia desde la entrada del conducto hasta el punto donde se tiene un flujo completamente establecido.

Para régimen turbulento, la longitud de establecimiento de flujo viene dada por  $L = 4,4 \text{Re}_D^{\frac{1}{4}} \cdot D$ . Si, por otro lado, el régimen es laminar, la longitud de establecimiento de flujo vendrá dada por  $L = 0,06 \text{Re} \cdot D$ .

La longitud de desarrollo más larga se obtiene, en régimen laminar, para  $\text{Re} \approx 2300$ :

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\text{máx}} \approx 140$$

En régimen turbulento, para valores de Reynolds alrededor de  $10^4$ ,  $10^5$ , la longitud de desarrollo es de:

$$\left(\frac{L}{D}\right) \approx 25$$

Cabe destacar que, las diversas singularidades que se puedan encontrar en cualquier circuito, originan desviaciones de la distribución de velocidades con respecto a la distribución para flujo completamente establecido; así, después de una singularidad, es necesario dejar una longitud equivalente a la longitud de desarrollo, con el fin de que el flujo vuelva a homogeneizarse. Esto es especialmente útil cuando lo que se quiere es realizar una medición de alguna propiedad del fluido después de una singularidad.

## 10.4 Primera ley de la termodinámica aplicada al flujo en tuberías

Sea el conducto de la figura por el que fluye un caudal de fluido conocido.

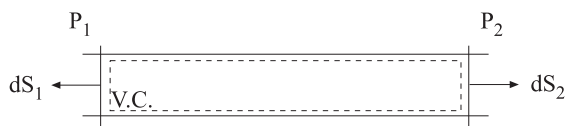


Fig. T 10.2  
Volumen de control para un conducto

La ecuación de la energía para régimen permanente aplicada al volumen de control (conducto) será:

$$\delta \dot{Q} - (\delta \dot{W}_{\text{eje}} + \delta \dot{W}_{\tau}) = \delta \dot{m} \left( \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} + u_2 + gz_2 \right) - \delta \dot{m} \left( \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} + u_1 + gz_1 \right)$$

$$q - (w_{\text{eje}} + w_{\tau}) = (u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}$$



ecuación válida tanto para fluido compresible como incompresible.

El término  $\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1}$  representa el trabajo del fluido realizado sobre la partícula en el viaje que esta realiza de 1 a 2.

Los términos  $(u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$  se definen como la ganancia neta de la energía intrínseca de la partícula.

El término  $q - (w_{\text{eje}} + w_{\tau})$  representa la energía neta transferida a la partícula durante su viaje de 1 a 2.

Recordando que

$$\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} = \int_1^2 d\left(\frac{P}{\rho}\right) = \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho} dP + P d\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \int_1^2 \frac{1}{\rho} dP + \int_1^2 P dv$$

la ecuación de la energía se puede dar como:

$$q - (w_{\text{eje}} + w_{\tau}) = (u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dP + \int_1^2 P dv$$

o bien:

$$-\left[(u_2 - u_1) + \int_1^2 P dv - q\right] - (w_{\text{eje}} + w_{\tau}) = g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{\rho} dP$$

El término  $\left[(u_2 - u_1) + \int_1^2 P dv - q\right] = \Delta y$  representa la pérdida de potencial al realizar un trabajo útil. Su valor puede ser positivo o cero para un proceso ideal. La acción viscosa del fluido queda representada en este término.

Obsérvese que el término  $w_{\tau} = \frac{1}{\delta m} \oint_{\text{S volumen de control}} \bar{V}(\bar{\tau} d\bar{S}) = 0$  tiene un valor nulo, puesto que la velocidad del fluido en las paredes del volumen de control es nula.

De donde se obtiene

$$-w_{\text{eje}} - \Delta y - \int_1^2 \frac{1}{\rho} dP = g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

Esta ecuación se define como la ecuación de la energía aplicada al volumen de control formado por un conducto de sección rectilínea y para fluido compresible.

Si el fluido se puede considerar incompresible, la ecuación tomaría la forma:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 - w_{\text{eje}} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \Delta y$$

Es necesario, en este punto, recordar el convenio de signos de termodinámica en lo que hace referencia al trabajo comunicado o cedido por el eje, que no es más que denotar que el trabajo comunicado al sistema se considera como negativo.

Se observa que, en el volumen de control objeto de estudio, no existe trabajo aportado o cedido por el eje  $w_{\text{eje}} = 0$ , con lo que la ecuación más simple y que tiene en cuenta las pérdidas de energía entre los dos puntos del conducto será:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \Delta y$$

Esta ecuación, recibe el nombre de ecuación de Bernoulli generalizada.

## 10.5 El término de pérdidas

El término  $\Delta h$  o bien  $\Delta y$  se denominan *términos de pérdidas*, los cuales se descomponen en pérdidas lineales y pérdidas singulares. Las primeras caracterizan los conductos mientras que las segundas obedecen a las singularidades que se puedan hallar en una instalación, codos, válvulas, etc. Se cumple que:

$$\Delta y = \Delta h \cdot g; \quad \Delta h = \frac{\Delta y}{g};$$

donde:

$$\Delta h \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}_g \text{ g}} \right] = [\text{m}], \text{ Energía por unidad de peso}$$

$$\Delta y \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}_g} \right] = \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right], \text{ Energía por unidad de masa}$$

Por otro lado, de la ecuación de la energía dada en forma de energía por unidad de peso, se pueden definir sus diversos términos como:

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \text{altura de presión}; \quad \frac{V^2}{2g} = \text{altura de energía cinética}; \quad \Delta z = \text{altura de energía potencial}$$

En el capítulo de análisis adimensional, se ha demostrado que la pérdida de energía entre dos puntos situados a lo largo de un conducto viene dada por la ecuación:

$$\Delta Y = \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} f \left( \frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$



donde aparece una función desconocida  $f\left(\frac{\rho v D}{\mu}, \frac{\varepsilon}{D}\right)$ , que depende del número de Reynolds y la rugosidad relativa y que se conoce como factor de fricción  $f$ . De modo que la ecuación de la pérdida de energía tomará la forma:

$$\Delta Y = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}; \left[ \frac{J}{K_g g} \right] = \left[ \frac{m^2}{s^2} \right]. \text{ O bien: } \Delta h = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2 g}; \left[ \frac{J}{K_g g} \right] = [m]$$

Esta expresión recibe el nombre de ecuación de Darcy-Weisbach, y puede utilizarse tanto para flujo laminar como turbulento; únicamente debe tenerse en cuenta el valor de  $f$  en cada caso.

La relación entre el factor de fricción y los esfuerzos cortantes que aparecen en las paredes del conducto se obtiene igualando la fuerza ejercida por el gradiente de presión, con la fuerza debida a los esfuerzos cortantes, de donde:

$$\Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau \pi D L$$

Como  $\Delta P = \Delta Y \rho$  y  $\Delta Y = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$ ,

el valor del factor de fricción  $f$  se puede dar en función de los esfuerzos cortantes  $\tau$  actuantes en las paredes del conducto, y se obtiene:

$$f = \frac{8\tau}{V^2 \rho}; \quad \tau = f \frac{V^2 \rho}{8};$$

Relación esfuerzo cortante-factor de fricción para cualquier tipo de flujo.

El primer investigador que determina experimentalmente el valor del factor de fricción es Nikuradse, utilizando conductos forrados interiormente con arena de granulidades establecidas, realiza el primer diagrama que establece el valor del factor de fricción en función del número de Reynolds asociado a la velocidad media del fluido y la rugosidad relativa del conducto. De los resultados que obtiene, se observa que, cuando el flujo es laminar, el factor de fricción depende únicamente del número de Reynolds, su relación esta dada por la ecuación:

$$f = \frac{64}{Re}$$

Así, para el estudio del flujo laminar en conductos, la ecuación de Darcy-Weisbach toma la forma:



$$\Delta Y = f \frac{L V^2}{D 2} = \frac{64 L V^2}{Re D 2} = \frac{64 \mu L V^2}{VD \rho D 2} = \frac{64 \mu L V}{D \rho D 2} = 64 \frac{\mu L}{\rho D^2} \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4} 2} = 128 \frac{\mu L Q}{\rho D^4 \pi}$$

expresión que da las pérdidas de energía entre dos puntos de un conducto y para flujo laminar. Véase que la relación entre la pérdida de energía del fluido y el caudal circulante es lineal.

Mientras que el diagrama de Nikuradse se realizó en conductos con rugosidades artificiales, Moody realiza un diagrama similar para conductos comerciales, obteniendo el diagrama que lleva su nombre:

El diagrama de Moody, figura T 10.3, presenta tres zonas completamente diferenciadas: la zona laminar, la zona de transición y la zona para flujo turbulento desarrollado. Véase que, en esta última zona, el factor de fricción depende únicamente de la rugosidad relativa.

Obsérvese que, para  $2500 < Re < 4000$  (que delimita, aproximadamente, una zona que sería de transición entre flujo laminar y turbulento), las curvas están difusas. Para estos valores, el valor de  $f$  no se puede precisar, debido a la no existencia de repetibilidad en la realización de mediciones. Las fuerzas de inercia y viscosas tienen un mismo orden de magnitud.

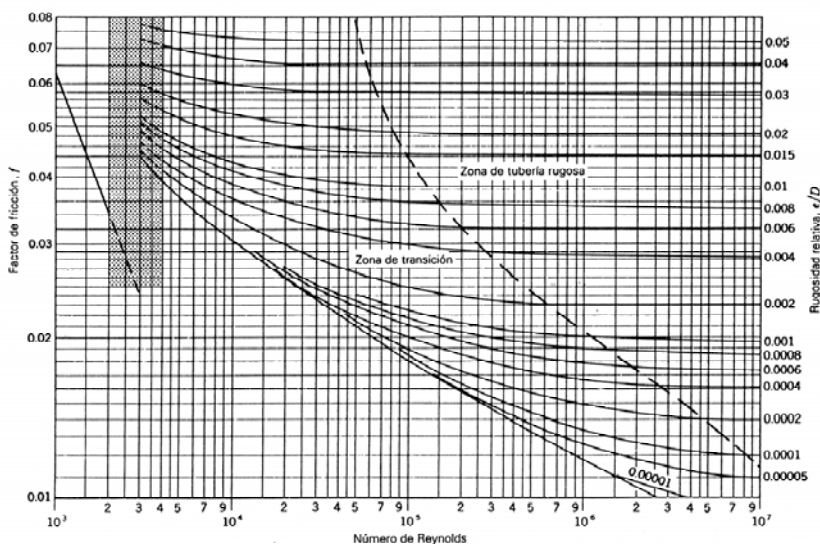


Fig. T 10.3  
Diagrama de  
Moody.  
Fuente:  
Irving H Shames,  
McGraw Hill  
Edición 1995

El diagrama de Moody puede darse, asimismo, en función de un colectivo de ecuaciones. Para régimen laminar, Moody obtiene la misma ecuación que la que presenta Nikuradse en su diagrama,  $f = \frac{64}{Re}$ .



El colectivo de ecuaciones que caracterizan al diagrama de Moody son:

Tipo de tubería	Régimen	Expresión	Autor
Lisa y Rugosa	Laminar	$f = \frac{64}{Re}$	Poiseulle
Lisa	Turbulento $Re_D < 100000$	$f = \frac{0,316}{Re_D^{1/4}}$	Blasius
Lisa	Turbulento $Re_D > 100000$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(Re_D \sqrt{f}) - 0,8$	Karman-Prandtl
Rugosa	Turbulento (Transición)	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,14 - 2 \log\left(\frac{\varepsilon}{D} + \frac{9,35}{Re \sqrt{f}}\right)$	Colebrook
Rugosa	Turbulento $Re > 10^5$	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) + 1,74$	Karman-Prandtl

La rugosidad absoluta  $\varepsilon$  depende del material y el proceso de fabricación del conducto, y aunque en menor medida también de su diámetro. Cada fabricante dispone de tablas donde se presenta la rugosidad  $\varepsilon$  en función del material empleado.

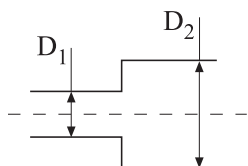
## 10.6 Pérdidas menores o singulares

En cualquier instalación, existen conexiones como cambios de diámetro, codos, ramificaciones, válvulas etc. En general estos elementos se denominan *singularidades de la instalación*. La pérdida de energía causada por cada una de las singularidades se puede evaluar, de manera genérica, mediante la expresión:  $\Delta Y_1 = k \frac{V^2}{2}$ , donde la constante  $k$  debe ser hallada experimentalmente.

Cabe remarcar que, aunque sea cierto que la constante  $k$  deba ser hallada experimentalmente para cada singularidad, existen algunos casos en que dicha constante  $k$  se puede determinar mediante una expresión algebraica. Algunos de estos casos son:

Caso de una expansión brusca:

Fig. T 10.4



$$\Delta Y = \frac{V_2^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2, \text{ o bien la constante } k \text{ de la expresión: } \Delta Y = k \frac{V_2^2}{2} \text{ será}$$

$$k = \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2$$

Si la expansión es progresiva, la constante  $k$  tiene un valor de:

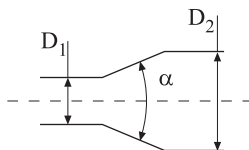


Fig. T 10.5

$$\text{Para } \alpha \leq 45^\circ, \quad k = \frac{2,6 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2}{\left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4};$$

$$\text{cuando } 45^\circ < \alpha \leq 180^\circ, \quad k = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2}{\left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4};$$

Para el estudio de una contracción progresiva, la constante  $k$  se puede dar como:

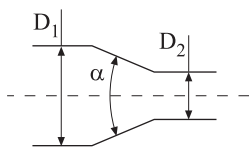


Fig. T 10.6

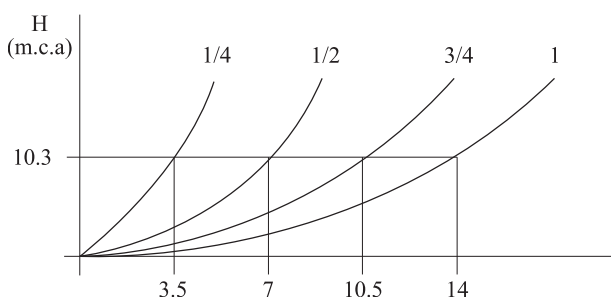
$$\text{Para } \alpha \leq 45^\circ, \quad k = \frac{0,8 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2}{\left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4};$$

$$\text{para } 45^\circ < \alpha \leq 180^\circ, \quad k = \frac{0,5 \left[ 1 - \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]^2 \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}}{\left( \frac{D_2}{D_1} \right)^4};$$



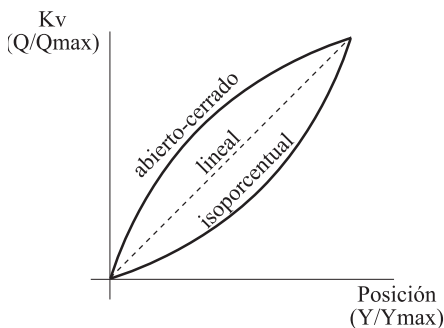
Es necesario puntualizar, no obstante, que aunque las pérdidas en las válvulas se pueden dar mediante esta ecuación, se acostumbran a dar en función del coeficiente  $K_V$ , que se define como el caudal medido en ( $\text{m}^3/\text{h}$ ) que pasa a través de la válvula cuando el gradiente de presión entre extremos de la misma es de 1 bar, que es equivalente a 10,3 m de columna de agua. La gráfica que se detalla a continuación muestra los diferentes valores que la constante  $K_V$  puede tomar, en función del grado de apertura de una válvula.

Fig. T 10.7  
Curvas de pérdidas de energía en función del caudal y en función del grado de apertura para una válvula genérica



Se denomina *curva inherente* de una válvula, a la relación entre el grado de apertura de la válvula y el valor de  $K_V$  para dicho grado de apertura. Dicha relación puede ser lineal, isoporcentual o bien de tipo abierto-cerrado. La gráfica siguiente, dada en forma adimensional, clarifica estos conceptos.

Fig. T 10.8  
Diferentes tipos de curvas inherentes de válvulas



## 10.7 Casos posibles de problemas en sistemas de tuberías

Existen tres casos posibles de problemas con conductos, en función de los parámetros que se conozcan y de la variable a determinar. Estos posibles casos evalúan la metodología a utilizar para determinar el factor de fricción.

Caso 1. Se conocen todos los datos para determinar el factor de fricción.

Si, por ejemplo, se pide para un circuito dado, como el que muestra la figura siguiente, hallar la presión del fluido en el punto 2, conocidos el caudal circulante, la rugosidad del conducto, el diámetro del conducto, la longitud del conducto, las constantes de las diversas singularidades y las cotas en cada punto, el proceso a seguir será:

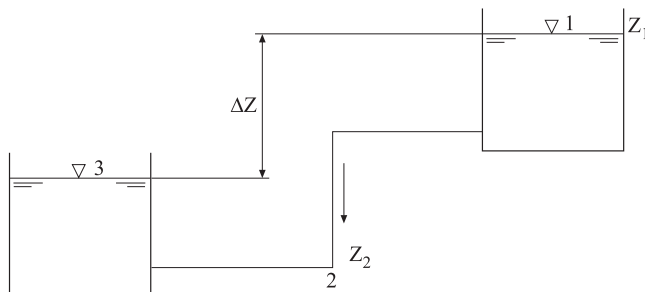


Fig. T 10.9  
Esquema típico  
de una  
instalación para  
el caso 1

Se aplicará la ecuación de la energía, (Bernoulli), entre los puntos 1 y 2.

Denominando  $E_i = \frac{P_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + g z_i$ , se establece:

$E_1 = E_2 + \Delta Y_{12}$  ecuación que, para el caso objeto de estudio, queda resumida como:

$$z_1 - \frac{V_2^2}{2} - \frac{P_2}{\rho} - z_2 = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} + \sum k_i \frac{V^2}{2}$$

En esta ecuación, los dos términos desconocidos son la presión en 2 y el factor de fricción. El factor de fricción se determinará mediante el diagrama de Moody y entrando con los valores de  $Re$  y  $\frac{\epsilon}{D}$ , puesto que ambos valores son conocidos.

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{QD}{s\nu} \Rightarrow \text{conocido}, \quad \frac{\epsilon}{D} \Rightarrow \text{conocido}.$$

En consecuencia, la presión en el punto 2 se obtendrá directamente de la ecuación precedente.

Caso 2. Únicamente se conocen parte de los datos para determinar el factor de fricción.

Ahora se pide hallar el caudal volumétrico que fluye en una instalación si se conocen, el coeficiente de rugosidad  $\epsilon$ , las longitudes y los diámetros de los tramos, las cotas en cada punto, las constantes de cada singularidad y la energía disponible para que se produzca el movimiento.

Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos, puntos 1 y 2, (v. figura siguiente), se obtiene:

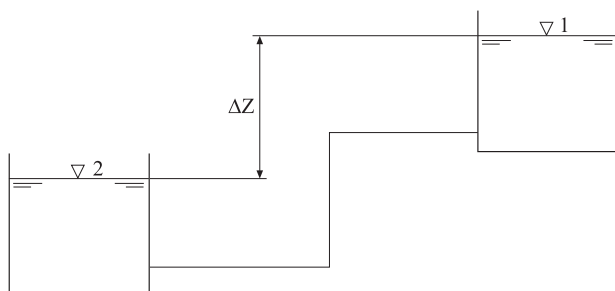


Fig. T 10.10  
Esquema típico  
de una  
instalación para  
el caso 2



$$z_1 - z_2 = \Delta Y_{12} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} + \sum k_i \frac{V^2}{2} = f \frac{L}{D^5} \frac{8Q^2}{\pi^2} + \sum k_i \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4}$$

Las incógnitas asociadas a esta ecuación son el caudal y el factor de fricción:

Ahora, el factor de fricción no se puede determinar, puesto que  $\frac{\varepsilon}{D} \Rightarrow$  es conocido ,

$Re = \frac{VD}{\nu} \Rightarrow$  no es conocido. Así, el problema ha de ser resuelto mediante el proceso iterativo siguiente:

Se obtiene el valor inicial del factor de fricción  $f$ , entrando en el diagrama de Moody con el valor conocido de  $\frac{\varepsilon}{D}$  y suponiendo flujo turbulento desarrollado,  $Re > 10^5$ .

Sustituyendo el valor inicial de  $f$  en la ecuación característica del sistema, se obtiene el caudal circulante, caudal que permitirá determinar un primer valor del número de Reynolds, el cual, conjuntamente con el de la rugosidad relativa, permitirá hallar un segundo factor de fricción  $f'$ , que se utilizará para hallar un segundo valor del caudal circulante  $Q'$ . El proceso seguirá hasta que los valores obtenidos en dos iteraciones consecutivas sean prácticamente los mismos. Este proceso se puede resumir:

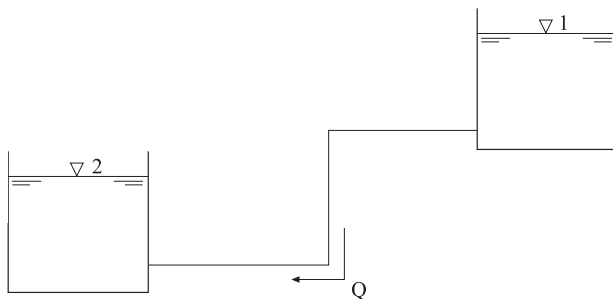
$$\frac{\varepsilon}{D} \rightarrow Q \rightarrow Re \rightarrow f' \rightarrow Q' \rightarrow Re' \rightarrow f'' \rightarrow Q''$$

Caso 3. No se conoce ningún dato que pueda dar luz sobre el valor del factor de fricción.

En este último caso, se conocen el caudal que ha de circular por el conducto, las longitudes de los diversos tramos, las cotas en todos los puntos y las constantes de las diversas singularidades. Se pide hallar el diámetro del conducto.

Aplicando de nuevo la ecuación de la energía entre las dos superficies libres de los depósitos se obtiene:

Fig. T 10.11  
Esquema típico  
de una  
instalación para  
el caso 3



$$z_1 - z_2 = \Delta Y_{12} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2} + \sum k_i \frac{V^2}{2} = f \frac{L}{D^5} \frac{8Q^2}{\pi^2} + \sum k_i \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4} ; \text{ obsérvese que es la misma ecuación que en el apartado anterior.}$$

En este apartado, no se conocen ni el caudal ni el diámetro; y por otro lado, no es posible estimar a priori el valor del factor de fricción.  $Re = \frac{vD}{\nu} \Rightarrow$  desconocido ,

$$\frac{\varepsilon}{D} \Rightarrow \text{desconocido} .$$

La manera de proceder será, de nuevo, la utilización de un proceso iterativo, partiendo de un factor de fricción que se estimará en función de la experiencia del diseñador. Los factores de fricción usuales en los sistemas de tuberías se sitúan alrededor de  $f = 0,02$ . Una vez definido el factor de fricción inicial, el proceso iterativo seguiría un proceso similar al definido en el apartado anterior, proceso que se detalla en el siguiente esquema:

$$f \rightarrow 0,02 \rightarrow D \rightarrow Re \rightarrow f' \rightarrow D' \rightarrow Re' \rightarrow f'' \rightarrow D'' \rightarrow$$

$$\searrow \frac{\varepsilon}{D} \nearrow \quad \searrow \frac{\varepsilon}{D'} \nearrow$$

El proceso iterativo finalizará cuando el diámetro hallado en la iteración  $i$ ésima coincida con el obtenido en la iteración anterior.

En sistemas de tuberías, es común utilizar diversos conductos, uno detrás de otro, así como ramificaciones de los mismos. El apartado siguiente caracterizará dichos sistemas.

## 10.8 Conductos en serie y en paralelo, y conductos ramificados

### 10.8.1 Características de los sistemas en serie

Sea un colectivo de conductos unidos uno detrás de otro, tal como se muestra en la figura.

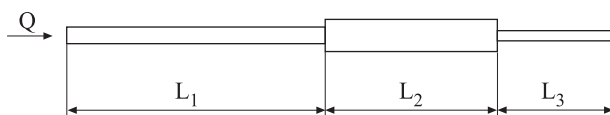


Fig. T 10.12  
Sistemas de  
tuberías en serie

Las condiciones que se cumplen para este tipo de conductos son que el caudal circulante es el mismo para todos los conductos, mientras que la pérdida de energía total es la suma de las pérdidas de energía parciales de cada conducto, es decir:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_T ; \quad \Delta Y_1 + \Delta Y_2 + \Delta Y_3 = \Delta Y_T ;$$

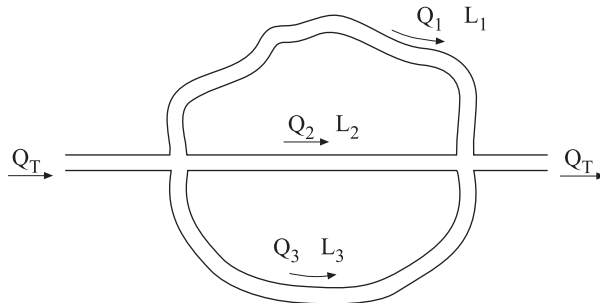
$$\Delta Y_T = \sum_{i=1}^n f_i \frac{L_i}{D_i^5} \frac{8Q^2}{\pi^2} + \sum_{i=1}^n k_i \frac{V_i^2}{2}$$



### 10.8.2 Características de los sistemas en paralelo

Sea el esquema de la figura siguiente, donde se representan tres tramos de tuberías en paralelo.

Fig. T 10.13  
Sistemas de  
tuberías en  
paralelo



Las condiciones que se cumplen para esta configuración son:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3; \quad \Delta Y_T = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3$$

Con el fin de demostrar que la pérdida de energía experimentada por una partícula de fluido que circule por la tubería 1 será la misma que la que circule por el resto de conductos, se aplicará la ecuación de la energía entre la entrada y la salida de cada uno de los tres conductos en paralelo.

Para el conducto 1, se tiene que los puntos 1 y 2 están situados en los extremos de dicho conducto.

$$\frac{P_{1-1}}{\rho} + \frac{V_{1-1}^2}{2} + g z_{1-1} = \frac{P_{2-1}}{\rho} + \frac{V_{2-1}^2}{2} + g z_{2-1} + \Delta y_{(1-2)-1}$$

$$\frac{P_{1-1} - P_{2-1}}{\rho} + g(z_{1-1} - z_{2-1}) = \Delta y_{(1-2)-1}$$

Realizando el mismo proceso para los conductos 2 y 3, se tendrá:

$$\frac{P_{1-2} - P_{2-2}}{\rho} + g(z_{1-2} - z_{2-2}) = \Delta y_{(1-2)-2}$$

$$\frac{P_{1-3} - P_{2-3}}{\rho} + g(z_{1-3} - z_{2-3}) = \Delta y_{(1-2)-3}$$

$$\text{Y, observando que } \frac{P_{1-1} - P_{2-1}}{\rho} = \frac{P_{1-2} - P_{2-2}}{\rho} = \frac{P_{1-3} - P_{2-3}}{\rho};$$

$$(z_{1-1} - z_{2-1}) = (z_{1-2} - z_{2-2}) = (z_{1-3} - z_{2-3});$$

se concluye:  $\Delta Y_T = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3$



## 10.9 Concepto de longitud equivalente

Consiste en determinar la longitud de conducto que dé lugar a una pérdida de energía idéntica a la que se pierde en una singularidad o singularidades dadas. Se obtiene al igualar el término de pérdidas de carga lineales con el de pérdidas de carga singulares.

$$k \frac{V^2}{2} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2}$$

$L_{eq} = \frac{kD}{f}$ , ecuación que determina la longitud equivalente de una singularidad de constante  $k$ .

## 10.10 Conductos no circulares. Concepto de diámetro hidráulico

Siempre que la sección del conducto no sea circular o bien el conducto esté parcialmente lleno de fluido, se empleará como longitud característica el diámetro hidráulico  $D_H$ .

Todo lo explicado hasta el momento se puede generalizar si, donde aparezca  $D$ , se utiliza  $D_H$ .

Por ejemplo:  $\Delta y = f \frac{L}{D_H} \frac{V^2}{2}$  ;  $Re = \frac{V \cdot D_H}{\nu}$

El diámetro hidráulico se define como:  $D_H = \frac{4 \cdot S_m}{P_m}$ .

$S_m$  = sección mojada

$P_m$  = perímetro mojado

Para tubo de sección circular, lleno de fluido, se obtiene:  $D_H = \frac{4\pi D^2}{4\pi D} = D$

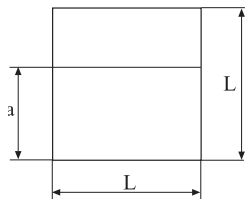
Para conductos de sección rectangular, completamente llenos de fluido, cuyos lados tienen longitudes  $b$  y  $h$ , el diámetro hidráulico será:

$$D_H = \frac{4 \cdot b \cdot h}{2b + 2h} = \frac{2bh}{b + h}$$

Para un conducto de sección cuadrada parcialmente lleno de líquido, se tiene:



Fig. T 10.14



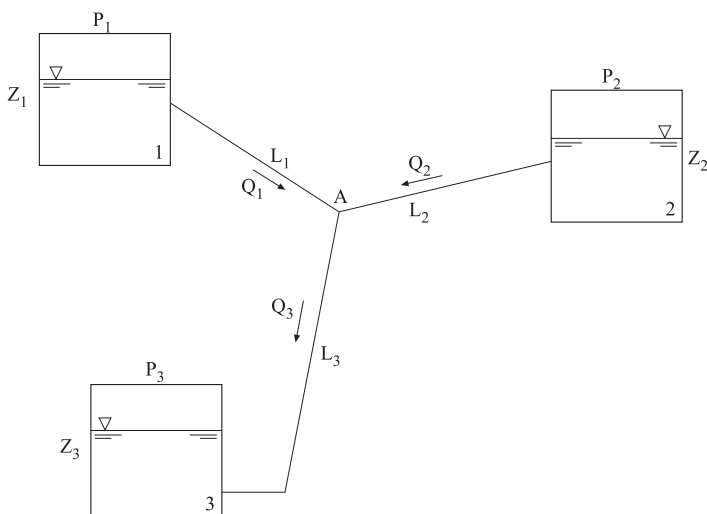
$$D_H = \frac{4 \cdot S_{\text{ecc. mojada}}}{P_{\text{eri. mojado}}} = \frac{4 \cdot L \cdot a}{2a + L}$$

Recuérdese que el radio hidráulico no es la mitad del diámetro hidráulico. La definición del radio hidráulico es  $R_H = \frac{S_m}{P_m}$  con lo que  $R_H = 4 D_H$

### 10.11 Sistemas de conductos ramificados

Un caso muy clásico es el formado por un colectivo de tres depósitos unidos por sendos conductos (v. figura siguiente). En general, a priori, no se conoce cuál es el sentido de circulación del fluido en alguno de los tramos, con lo que se deberá estimar. Si, al resolver el problema, se obtiene algún valor negativo, esto implica que la estimación inicial no es la acertada, con lo que debe ser modificada.

Fig. T 10.15  
Sistemas de  
conductos  
ramificados



En función de las variables a determinar en el problema, se deberá utilizar lo establecido en los diferentes métodos de resolución para la determinación del factor de fricción.

Supónganse conocidos las longitudes y los diámetros de los diversos conductos, así como las presiones en los depósitos, las cotas en todos los puntos y la rugosidad abso-

luta de los diversos conductos. No se conocen los caudales circulantes ni la dirección de los mismos, y se pide determinar dichos caudales, así como la presión en el punto A.

Según la posición de los depósitos y la presión en los mismos, se puede tener:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Se va a suponer que el sentido del flujo es  $Q_1 = Q_2 + Q_3$

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de los dos depósitos superiores y el punto A, y entre el punto A y la superficie libre del depósito inferior, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho} + g z_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + g z_A + \frac{V_A^2}{2} + \Delta Y_{1A}$$

$$\frac{P_2}{\rho} + g z_2 + \frac{V_2^2}{2} = \frac{P_A}{\rho} + g z_A + \frac{V_A^2}{2} + \Delta Y_{A2}$$

$$\frac{P_A}{\rho} + g z_A + \frac{V_A^2}{2} = \frac{P_3}{\rho} + g z_3 + \frac{V_3^2}{2} + \Delta Y_{A3}$$

Véase que, según lo establecido, los tramos uno y dos están en paralelo, y ambos en serie con el tres.

Se observa que se ha formado un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, siendo las incógnitas:  $Q_1$ ;  $Q_2$ ;  $Q_3$  y  $P_A$ . Una vez determinado el factor de fricción inicial, se procedería a la resolución del sistema y se obtendrán los primeros valores de las variables desconocidas, valores que permitirían hallar un segundo valor del coeficiente de fricción para cada tramo. El proceso iterativo seguiría según lo establecido previamente.



## Problema 61

### Enunciado

Sea el conjunto depósitos y conductos que se expone en los esquemas siguientes. Si se conoce: la potencia que la bomba comunica al fluido  $W_{\text{bomba}}$ , las longitudes, diámetros y rugosidades absolutas de todos los tramos, determinar el caudal que circula por las dos instalaciones y por cada uno de los tramos. Supóngase que los tramos situados a la entrada y salida de la bomba son muy cortos y se puede despreciar su efecto.

Fig. 61.1  
Esquema de  
la instalación  
para el primer  
caso

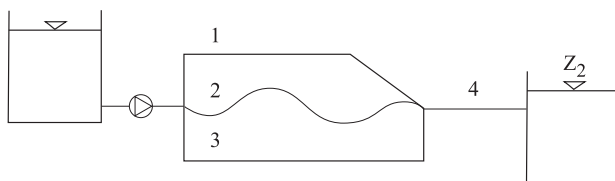
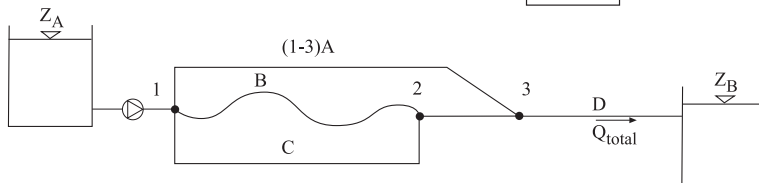


Fig. 61.2  
Esquema de  
la instalación  
para el  
segundo caso



La ecuación que deberá utilizarse para determinar las pérdidas de carga en cada tramo es la de Darcy Weisbach.

$$\Delta Y_i = f_i \frac{L_i}{D_i^5} \frac{8Q_i^2}{\pi^2}$$

Tomar como primera aproximación, el factor de fricción “ $f$ ” función de la rugosidad relativa  $\left(\frac{\epsilon}{D}\right)$ .

### Resolución

Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gZ_1 + Y_B = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gZ_2 + \Delta Y_{12}$$

Trabajando en presiones relativas, y considerando que la superficie de los dos depósitos es muy grande, se tiene:

$$\frac{W}{\rho Q} = Y_B = g(z_2 - z_1) + \Delta Y_{12} \quad ; \quad \Delta Y_{12} = \Delta Y_{\text{paralelo}} + \Delta Y_4 \quad ; \quad \Delta Y_{\text{paralelo}} = \Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y_3 \quad ;$$

$$\Delta Y_1 = K_1 Q_1^2 \quad ; \quad \Delta Y_2 = K_2 Q_2^2 \quad ; \quad \Delta Y_3 = K_3 Q_3^2 \quad ;$$

Obsérvese que la constante  $K_i$  representa todos los términos excepto el caudal, de la ecuación de Darcy Weisbach. Dicha constante depende del factor de fricción que asimismo es función de la rugosidad relativa y del número de Reynolds. Estas constantes se supondrán en todo momento conocidas, puesto que como primera aproximación se va a suponer que el régimen es en todo momento turbulento desarrollado.

La ecuación de continuidad establece:

$$Q_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_1}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_2}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_3}};$$

Definiendo como  $K_{\text{ef}}$  a la constante equivalente de pérdidas del conjunto de la tres ramas en paralelo, se tiene:

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} Q_4^2 = K_{\text{ef}} \left( \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_1}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_2}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{\text{paralelo}}}{K_3}} \right)^2;$$

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} \Delta Y_{\text{paralelo}} \left( \frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}} \right)^2;$$

$$K_{\text{ef}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{K_1}} + \frac{1}{\sqrt{K_2}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}} \right)^2};$$

La constante para la tubería 4 será:

$$\Delta Y_4 = K_4 Q_4^2$$

Con lo que la ecuación general de la energía quedará:

$$\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \frac{W}{\rho Q_4} = g(z_2 - z_1) + K_{\text{ef}} Q_4^2 + K_4 Q_4^2$$

De esta ecuación se obtiene  $Q_4$ ;

La pérdidas de carga en el tramo 4 y en las tres ramas en paralelo serán:  $\Delta Y_4 = K_4 Q_4^2$ ;

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} Q_4^2$$

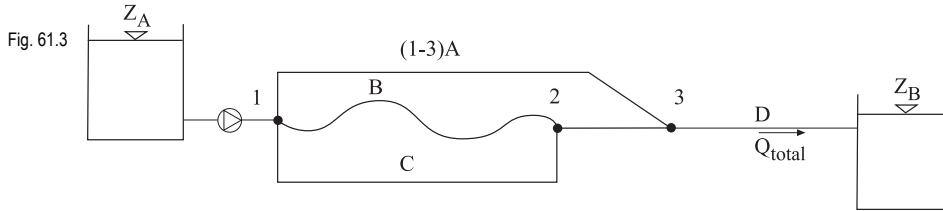
El caudal en cada uno de los tramos de las tres ramas en paralelo se obtendrá:

$$\Delta Y_{\text{paralelo}} = K_{\text{ef}} Q_4^2 = K_1 Q_1^2 = K_2 Q_2^2 = K_3 Q_3^2;$$

De esta ecuación se extraen los valores de  $Q_1$ ;  $Q_2$ ;  $Q_3$ ;



Para la segunda de las instalaciones, el proceso a seguir será:



Aplicando la ecuación de la energía entre las superficies libres de los dos depósitos se obtiene:

$$\frac{W}{\rho Q_{\text{total}}} = Y_B = g(z_B - z_A) + \Delta Y_{AB}$$

Donde ahora, las pérdidas de energía en la instalación se definirán como:

$$\Delta Y_{AB} = \Delta Y_{\text{paralelo } 1-3} + \Delta Y_{\text{tramo } (D)} ;$$

El tramo en paralelo se define:

$$\Delta Y_{\text{paralelo } 1-3} = \Delta Y_{(1-3)A} = \Delta Y_{\text{paralelo } 1-2} + \Delta Y_{2-3} = K_{\text{ef}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 ;$$

$$Q_{\text{total}} = Q_{(1-3)A} + Q_{23} = Q_{(1-3)A} + Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} ;$$

$$Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} = Q_{2-3} ;$$

$$\Delta Y_{12} = \Delta Y_{(1-2)B} = \Delta Y_{(1-2)C} ; \quad \Delta Y_{(1-2)B} = K_{(1-2)B} Q_{(1-2)B}^2 ; \quad \Delta Y_{(1-2)C} = K_{(1-2)C} Q_{(1-2)C}^2 ;$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad entre los puntos 1 y 2.

$$Q_{2-3} = \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-2)B}}{K_{(1-2)B}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-2)C}}{K_{(1-2)C}}} ;$$

$$\Delta Y_{12} = K_{(1-2)\text{equiva}} Q_{2-3}^2 = K_{(1-2)B} Q_{(1-2)B}^2 = K_{(1-2)C} Q_{(1-2)C}^2 ;$$

$$\Delta Y_{12} = K_{(1-2)\text{equiva}} Q_{2-3}^2 = K_{(1-2)\text{equiva}} \Delta Y_{(1-2)} \left( \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2 ;$$

$$K_{(1-2)\text{equiva}} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2} ;$$

Por otro lado se tiene:

$$\Delta Y_{(1-3)\text{paralelo}} = K_{\text{eq}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = \Delta Y_{(1-3)A} = \Delta Y_{\text{paralelo}(1-2)} + \Delta Y_{(2-3)} ;$$

$$K_{\text{equiv}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2 = K_{(1-2)\text{equiv}} Q_{2-3}^2 + K_{(2-3)} Q_{2-3}^2 ;$$

$$K_{\text{equiv}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2 = Q_{2-3}^2 (K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{2-3}) = \Delta Y_{1-3 \text{ tramo superior}} = \Delta Y_{1-3 \text{ tramo inferior}} ;$$

$$K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)B}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)C}}} \right)^2} + K_{(2-3)} = K_{(1-3) \text{ tramo inferior}}$$

Recordando que:

$$K_{\text{equiv}(1-3)} Q_{\text{total}}^2 = K_{(1-3) \text{ tramo inferior}} Q_{(2-3)}^2 = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2$$

$$Q_{\text{total}} = Q_{(2-3)} + Q_{(1-3)A} = \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3) \text{ tramo inferior}}}{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)A}}{K_{(1-3)A}}}$$

$$K_{(1-3)\text{equivalente}} Q_{\text{total}}^2 = \Delta Y_{(1-3)\text{equivalente}} = K_{(1-3)\text{equivalente}} \left[ \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3) \text{ tramo inferior}}}{K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)}}} + \sqrt{\frac{\Delta Y_{(1-3)A}}{K_{(1-3)A}}} \right]^2$$

$$\Delta Y_{(1-3)\text{equivalente}} = K_{(1-3)\text{equivalente}} \Delta Y_{(1-3)\text{equivalente}} \left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2 ;$$

$$K_{(1-3)\text{equivalente}} = \frac{1}{\left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2} ;$$

$$\Delta Y_{AB} = K_{(1-3)\text{equivalent}} Q_{\text{total}}^2 + K_D Q_{\text{total}}^2 ;$$

$$\frac{W}{\rho Q_t} = g(z_B - z_A) + Q_t^2 \left[ K_{(1-3)\text{equivalent}} + K_D \right] ;$$

$$\frac{W}{\rho} = g(z_B - z_A) Q_t + Q_t^3 \left[ K_{(1-3)\text{equivalente}} + K_D \right] ;$$

De aquí se obtiene  $Q_t$  ;

La pérdida de carga en cada uno de los tramos 1-3 será:

$$Q_{\text{total}}^2 = \Delta Y_{(1-3)} \left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2 ;$$

$$\Delta Y_{(1-3)} = \frac{Q_{\text{total}}^2}{\left[ \frac{1}{\sqrt{K_{(1-2)\text{equivalente}} + K_{(2-3)}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{(1-3)A}}} \right]^2}$$



Los caudales en cada uno de los tramos 1-3 se determinarán:

$$\Delta Y_{1-3} = K_{(1-3)A} Q_{(1-3)A}^2 \rightarrow \text{se despeja } Q_{(1-3)A}$$

$$\Delta Y_{1-3} = (K_{(1-2)\text{equiva}} + K_{(2-3)}) Q_{(2-3)}^2 \rightarrow \text{se despeja } Q_{(2-3)}$$

Por último, el caudal circulante entre los puntos 1-2 en la tubería B y el circulante entre estos dos mismos puntos en la tubería C se obtienen:

$$Q_{2-3} = Q_{(1-2)B} + Q_{(1-2)C} ;$$

$$\Delta Y_{(1-3)} = \Delta Y_{2-3} + \Delta Y_{(1-2)\text{equivalente}} ;$$

$$\Delta Y_{2-3} = K_{2-3} Q_{2-3}^2 \text{ se obtiene } \Delta Y_{2-3}$$

$$\Delta Y_{(1-2)\text{equivalente}} = \Delta Y_{(1-3)} - \Delta Y_{(2-3)} \text{ de aquí se obtiene } \Delta Y_{(1-2)\text{equivalent}}$$

$$\Delta Y_{(1-2)\text{equivalente}} = \Delta Y_{(1-2)B} = \Delta Y_{(1-2)C} ;$$

$$\Delta Y_{(1-2)B} = K_{(1-2)B} Q_{(1-2)B}^2 ; \text{ siendo la incógnita } Q_{(1-2)B}$$

$$\Delta Y_{(1-2)C} = K_{(1-2)C} Q_{(1-2)C}^2 ; \text{ obteniendo } Q_{(1-2)C}$$

## Problema 62

### Enunciado

Se tienen dos depósitos de grandes dimensiones, separados por una altura de 25 m. La presión relativa en el depósito inferior es de 200.000 Pa, mientras que en el depósito superior se tiene presión atmosférica. Se desea conectar ambos depósitos mediante un conducto de PVC de 400 m de longitud y con la ayuda de una bomba de 25 kW de potencia se pretende trasvasar un caudal de 0,2 m<sup>3</sup>/s de agua del depósito inferior al superior.

Halle:

1. El diámetro del conducto que se ha de utilizar para cumplir con los requerimientos establecidos.
2. Debido a la mala colocación de una brida situada cuatro metros antes de que el tubo llegue al depósito superior, aparece una fuga de agua en este punto. Si se conoce que la pérdida de energía que el agua experimenta al pasar a través de la brida es de  $\Delta h = 100 Q_b^2$ , siendo  $Q_b$  el caudal de agua que se fuga a través de la brida, halle el nuevo caudal que fluye ahora por la instalación.



Considere que la brida está a la misma altura que el nivel del líquido en el depósito superior. Se puede despreciar la energía cinética a la salida de la brida.

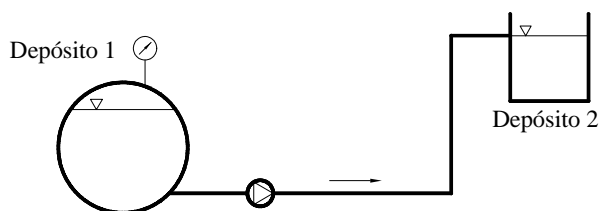


Fig. 62.1  
Esquema de  
la instalación

## Resolución

1. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de los dos depósitos, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + H = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + \Delta h_{12}$$

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$$

siendo  $\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$  la expresión para la pérdida de carga en tuberías, en función

de la longitud  $L$ , el diámetro  $D$ , el caudal  $Q$  y el coeficiente de fricción  $f$ , y  $H = \frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q}$

la altura de elevación de la bomba en función de la potencia ( $W$ ) y el caudal.

Tomando un valor inicial para  $f$  de 0,02 (valor estándar para tuberías), se puede obtener el valor del diámetro  $D$ :

$$\begin{aligned} & \frac{200.000 \text{ Pa}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 0 + 0 + \frac{25.000 \text{ W}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = \\ & = 0 + 25 \text{ m} + 0 + 0,02 \cdot \frac{400 \text{ m}}{D^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \end{aligned}$$

Aislando la  $D$  de la ecuación, se obtiene:  $D = 0,318 \text{ m}$

El valor del número de Reynolds para este diámetro es:

$$\text{Re} = V \cdot \frac{D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{D}{\nu} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu} = \frac{4 \cdot 0,2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot 0,318 \text{ m} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 785.051,3$$

A través del gráfico de Moody, se halla un valor del coeficiente de fricción correspondiente a este número de Reynolds de  $f = 0,0125$ .



Con el nuevo valor de  $f$  se determina de nuevo la pérdida de carga en función del diámetro:

$$\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g} = 0,0125 \cdot \frac{400 \text{ m}}{D^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,01653 \cdot \frac{1}{D^5} \text{ m}$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli, se halla nuevamente el valor de  $D$  para la nueva  $\Delta h$ :

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + H = z_2 + \Delta h_{12}$$

$$\Delta h_{12} = -z_2 + \frac{P_1}{\rho \cdot g} + H = -25 \text{ m} + \frac{200.000 \text{ Pa}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + \frac{25.000 \text{ W}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 8,129 \text{ m}$$

$$0,01653 \cdot \frac{1}{D^5} \text{ m} = 8,129 \text{ m}$$

Aislando  $D$  de la ecuación, se obtiene el nuevo valor:  $D = 0,289 \text{ m}$

El valor del número de Reynolds será:

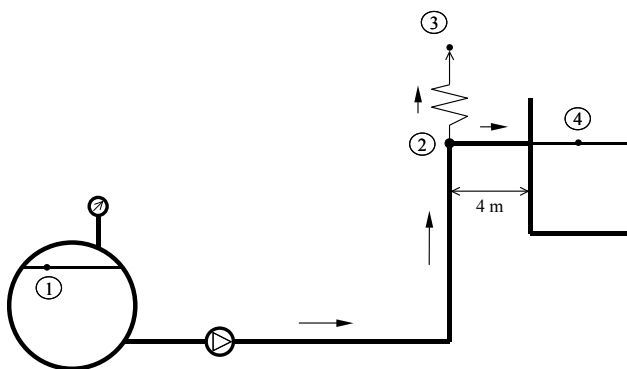
$$\text{Re} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot v} = \frac{4 \cdot 0,2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot 0,289 \text{ m} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 863.857,5$$

Y, según Moody,  $f = 0,012$ ; considerando que el valor del factor de fricción es prácticamente el mismo que el obtenido con anterioridad, se concluye que el diámetro será:

$$D = 0,289 \text{ m}$$

2. El esquema de la instalación para este segundo caso será:

Fig. 62.2  
Esquema de  
la instalación



Las ecuaciones que se tienen en este caso son:

aplicando Bernoulli entre 2 y 3:

$$E_2 = E_3 + \Delta h_{23} = E_3 + 100 \cdot Q_b^2$$

Entre los puntos 2 y 4, se concluye:

$$\begin{aligned} E_2 = E_4 + \Delta h_{24} &= E_4 + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{24}^2}{\pi^2 \cdot g} = E_4 + 0,012 \cdot \frac{4 \text{ m}}{0,289^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{24}^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= E_4 + 1,967 \cdot Q_{24}^2 \end{aligned}$$

Y entre los puntos 1 y 2:

$$\begin{aligned} E_1 + H &= E_2 + \Delta h_{12} = E_2 + f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_T^2}{\pi^2 \cdot g} = E_2 + 0,012 \cdot \frac{396 \text{ m}}{0,289^5 \text{ m}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_T^2 \frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}}{\pi^2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ &= E_2 + 194,764 \cdot Q_T^2 \end{aligned}$$

Según la ecuación de continuidad:

$$Q_T = Q_b + Q_{24}$$

Si se desprecia la energía cinética en la fuga de la brida (punto 3 de la figura):

$$E_3 = z_3 = 25 \text{ m}$$

$$E_4 = z_4 = 25 \text{ m}$$

Y los valores de  $E_1$  y  $H$ :

$$E_1 = \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{200.000 \text{ Pa}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 20,387 \text{ m}$$

$$H = \frac{25.000 \text{ W}}{1.000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot Q_T \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = \frac{2,54841}{Q_T}$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $Q_T$ ,  $Q_b$ ,  $Q_{24}$ ,  $E_2$ ).

$$E_2 = 25 + 100 \cdot Q_b^2 \rightarrow \text{ecuación 1}$$

$$E_2 = 25 + 1,967 \cdot Q_{24}^2 \rightarrow \text{ecuación 2}$$

$$20,387 + \frac{2,54841}{Q_T} = E_2 + 194,764 \cdot Q_T^2 \rightarrow \text{ecuación 3}$$

$$Q_T = Q_b + Q_{24} \rightarrow \text{ecuación 4}$$

Aislado  $Q_b$  y  $Q_{24}$  de las ecuaciones 1 y 2, y sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación 4, se tiene:



$$Q_T = \sqrt{\frac{E_2 - 25}{100}} + \sqrt{\frac{E_2 - 25}{1,967}} = 0,813 \cdot \sqrt{E_2 - 25}$$

$$Q_T^2 = 0,661 \cdot (E_2 - 25)$$

Sustituyendo el valor de  $Q_T$  en la ecuación 3 se obtiene:

$$Q_T^3 194,764 + Q_T (E_2 - 20,387) - 2,5484 = 0$$

$$0,813^3 (E_2 - 25)^{\frac{3}{2}} 194,764 + 0,813 (E_2 - 25)^{\frac{1}{2}} (E_2 - 20,387) - 2,5484 = 0$$

De donde el valor de la energía en el punto 2 será:

$$E_2 = 25,0617 \text{ m}$$

Con lo que el valor de los tres caudales vendrá a ser:

$$Q_{24} = 0,1771 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_b = 0,0248 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_T = 0,2019 \text{ m}^3/\text{s}$$

que es el nuevo caudal total que se pedía en el enunciado.

## Problema 63

### Enunciado

En una central térmica de producción de energía eléctrica se tiene una instalación cuyo esquema se muestra a continuación, siendo el fluido de trabajo agua.

Se sabe que la presión y la temperatura en la caldera de vapor son de  $P = 2$  bar (absoluta),  $T = 400^\circ\text{C}$ , y que en la turbina se produce una expansión adiabático-isentrópica con un salto entálpico de  $777 \text{ KJ/Kg}$ . (Considérese este salto entre los puntos 3 y 6.)

Si las pérdidas de carga en la tubería de aspiración son  $\Delta h = 104 Q^2$  y en la tubería de impulsión  $\Delta h = 312 Q^2$ , siendo  $Q$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ],  $\Delta h$  [m columna de agua], y sabiendo que la bomba que se utiliza es el modelo 150/315, con un diámetro de rodete de  $270 \text{ mm}$ , (y se considera que la cota del nivel del líquido del condensador está  $1 \text{ m}$  por encima de la cota del nivel del líquido de la caldera,) se pide hallar:

1. El punto de funcionamiento de la bomba.

2. La cota  $Z$  (respecto al nivel del líquido del condensador) a la que hay que colocar la bomba para que no se produzca cavitación.
3. Debido a que se ha hecho un reajuste en el proceso, se precisa aumentar el caudal en un 20%. Si al motor de accionamiento de la bomba se le acopla un variador de frecuencia, determine a qué revoluciones debería girar para que la bomba suministre el nuevo caudal. ¿Con qué rendimiento trabaja ahora la bomba?

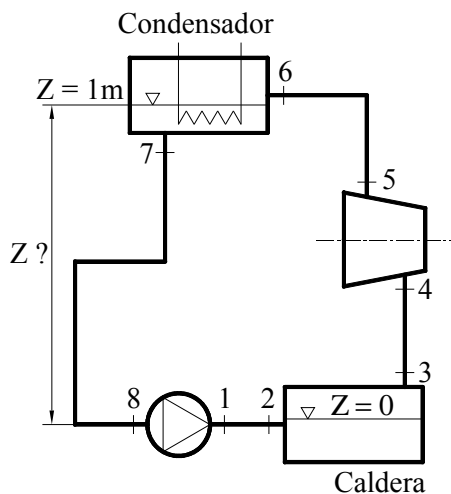


Fig.63.1  
Esquema del  
circuito en  
estudio

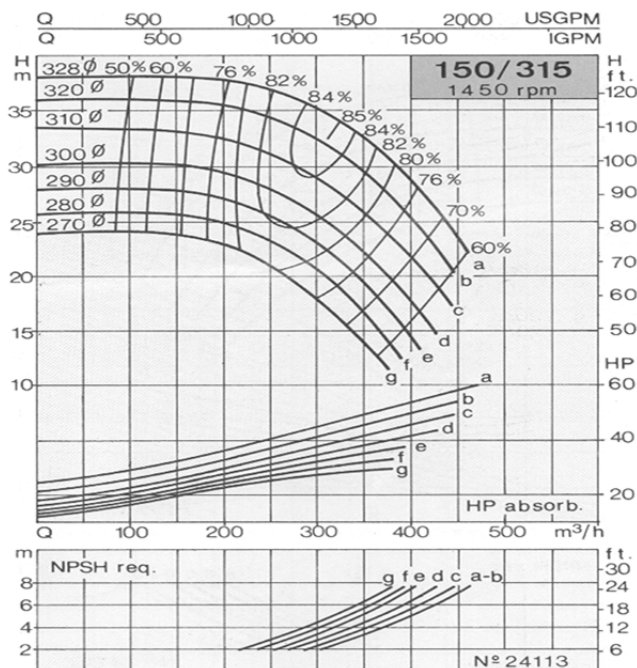


Fig. 63.2  
Gráfica de la  
curva  
característica  
de la bomba.  
Cortesía de  
bombas ITUR



Diagrama Entalpia-Entropia para el Vapor de Agua. El eje vertical representa la Entalpia Especifica (kJ/kg) y el eje horizontal representa la Entropia Especifica (kJ/kg K). El diagrama muestra las curvas de saturación y las líneas de calidad (x) para el vapor de agua.

Las condiciones termodinámicas en la caldera son:

$$T_3 = 400^\circ\text{C}$$

$$h_3 = 3.277 \text{ KJ/Kg}$$

450

$$P_6 = 0,05 \text{ bar}$$

$$T_6 = 35^\circ\text{C}$$

$$h_6 = 2.500 \text{ KJ/Kg}$$

1. Para hallar el punto de funcionamiento, se aplicará la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres del condensador y la caldera; así:

$$\frac{P_{\text{con}}}{\rho g} + Z_{\text{con}} + \frac{V_{\text{con}}^2}{2g} + H = \frac{P_{\text{cal}}}{\rho g} + Z_{\text{cal}} + \frac{V_{\text{cal}}^2}{2g} + \Delta h_{72}$$

$$H = \frac{P_{\text{cal}} - P_{\text{con}}}{\rho g} + Z_{\text{cal}} - Z_{\text{con}} + \frac{V_{\text{cal}}^2 - V_{\text{con}}^2}{2g} + \Delta h_{72}$$

Sustituyendo, y considerando las energías cinéticas en las superficies libres de los depósitos despreciables, se tiene:

$$H = \frac{(2 - 0,05)10^5}{1.000 \times 9,8} - 1 + 416 Q^2$$

$$H = 18,88 + 416 Q^2$$

$$H[\text{m}]; \quad Q \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$$

La intersección entre esta curva y la curva característica de la bomba da lugar al punto de funcionamiento, y se obtiene:

$$Q = 250 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$H = 20,88 \text{ m}$$

2. Cálculo de la cota Z:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del condensador y la brida de aspiración de la bomba, se llega a:

$$\frac{P_{\text{con}}}{\rho g} + Z_{\text{con}} + \frac{V_{\text{con}}^2}{2g} = \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} + \Delta h_{78}$$

$$Z_{\text{con}} - Z_8 = \frac{P_8 - P_{\text{con}}}{\rho g} + \frac{V_8^2 - V_{\text{con}}^2}{2g} + \Delta h_{78}$$



El término de energía cinética en la brida de aspiración es mucho mayor que en el condensador pero, puesto que no se conoce el diámetro del conducto, a priori se desprecian ambos términos; así, la definición de  $NPSH_d$  queda:

$$NPSH_d = \frac{P_g}{\rho g} - \frac{P_{vapor}}{\rho g}$$

de donde, sustituyendo en la ecuación de Bernoulli entre condensador y brida de aspiración, se tiene:

$$Z_{con} - Z_g = NPSH_d + \frac{P_{vapor}}{\rho g} - \frac{P_{con}}{\rho g} + \Delta h_{78}$$

En el punto de cavitación incipiente se ha de cumplir que

$$NPSH_d = NPSH_R$$

En la gráfica de la curva característica de la bomba (fig. 63.2) se observa que, para un caudal de  $Q=250 \text{ m}^3/\text{h}$ , el valor de la altura neta requerida es  $NPSH_R = 3 \text{ m}$ .

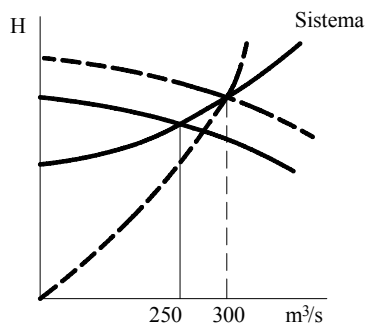
Suponiendo que la temperatura del líquido en el condensador sea la misma que en la brida de aspiración de la bomba, es decir  $35^\circ\text{C}$ , la presión de vapor será la misma que la presión que existe en el condensador,  $0,05 \text{ bar}$ , de donde:

$$Z_{con} - Z_g = 3 + 104 \left( \frac{250}{3.600} \right)^2 + \frac{0,05 \times 10^5}{\rho g} - \frac{0,05 \times 10^5}{\rho g} = 3,5 \text{ m}$$

La bomba debe ser colocada a una distancia de  $3,5\text{m} + 0,5\text{m}$  (de seguridad) =  $4\text{m}$  por debajo del nivel del líquido del condensador.

3. La figura 63.4 define el nuevo punto de funcionamiento para este apartado, que se obtiene de la intersección de la curva del sistema con el nuevo caudal circulante  $250 * 1,2 = 300 \text{ m}^3/\text{h}$  (punto 1, figura 63.4).

Fig. 63.4  
Esquema del  
nuevo punto de  
funcionamiento  
del sistema con  
la curva de  
afinidad





Si  $Q=300 \text{ m}^3/\text{h}$ , la altura del nuevo punto de funcionamiento será:

$$H=18,88+416\left(\frac{300}{3.600}\right)^2$$

$$H=21,76 \text{ m}$$

La constante de una curva que pase por el punto  $H = 21,76 \text{ m}$  y  $Q=300 \text{ m}^3/\text{h}$ , denominada curva de afinidad, se halla:

$$\Delta h=KQ^2$$

$$K=\frac{21,76}{\left(\frac{300}{3.600}\right)^2}=3.134,72$$

Esta curva corta con la curva característica inicial de la bomba en el punto 2, cuyas características son:

$$H = 18,95 \text{ m}; \quad Q=280 \text{ m}^3/\text{h}$$

Entre los puntos  $H = 21,76 \text{ m}$ ,  $Q=300 \text{ m}^3/\text{h}$ , y  $H = 18,95 \text{ m}$ ,  $Q=280 \text{ m}^3/\text{h}$ , se pueden aplicar los grupos adimensionales, cifra característica, altura de elevación  $\psi$ , y cifra característica de caudal  $\Phi$ .

$$\frac{H_1}{\omega_1^2 D_1^2} = \frac{H_2}{\omega_2^2 D_2^2} \quad \frac{21,76}{\omega_1^2 \cancel{D}_1^2} = \frac{18,95}{1.450^2 \cancel{D}_2^2} \quad \omega_1^2 = \frac{21,76 \times 1.450^2}{18,95};$$

$$\omega_1 = 1.553,79 \text{ rpm}$$

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D^3} \quad \omega_1 = \frac{Q_1 \omega_2 \cancel{D}^3}{Q_2 \cancel{D}^3} \quad \omega_1 = \frac{300 \times 1450}{280} = 1.553,57 \text{ rpm.}$$

Obsérvese que, utilizando cualquiera de las dos cifras características, se obtiene prácticamente el mismo resultado. Por otro lado, el rendimiento al que trabajará la bomba en el nuevo punto de funcionamiento, punto 1, será prácticamente el mismo que el existente en el punto 2, siendo éste del 77% según se observa en la figura 63.2.



## Problema 64

### Enunciado

Sea el esquema del grupo de bombeo que se muestra en la figura 64.1, en donde se conoce que las pérdidas por fricción en cada tramo son:

$$H_{\text{aspiración}} = H_{4-2} = 6.480 Q^2$$

$$H_{\text{impulsión hasta el punto 4}} = 25.920 Q^2$$

$$H_{4-3} = 19.440 Q^2$$

La velocidad de giro de todas las bombas es de 2.900 rpm.

En todos los casos,  $H$  (m);  $Q$  (m<sup>3</sup>/s)

Las bombas B2, B3 y B4 son idénticas.

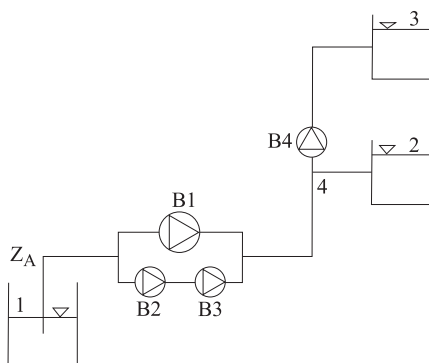
Las cotas de los puntos 2, 3 y 4 respecto al punto 1 son:

$$Z_2 = 50 \text{ m}; Z_3 = 100 \text{ m}; Z_4 = 40 \text{ m}.$$

La bomba 1 es del modelo 5026, con un diámetro de rodete de 235 mm.

El resto de bombas, 2,3,4, son del modelo 5020, con un diámetro de rodete de 195 mm.

Fig. 64.1  
Esquema de la  
instalación.



Se pide determinar:

1. El caudal circulante en cada uno de los tramos y el punto de funcionamiento de cada una de las bombas.

- La cota del punto A para que exista cavitación incipiente. Especifique las hipótesis realizadas.
- Determine la velocidad de giro de la bomba 4 para que el caudal que circula por el tramo 1-4 disminuya en un 2,5%.

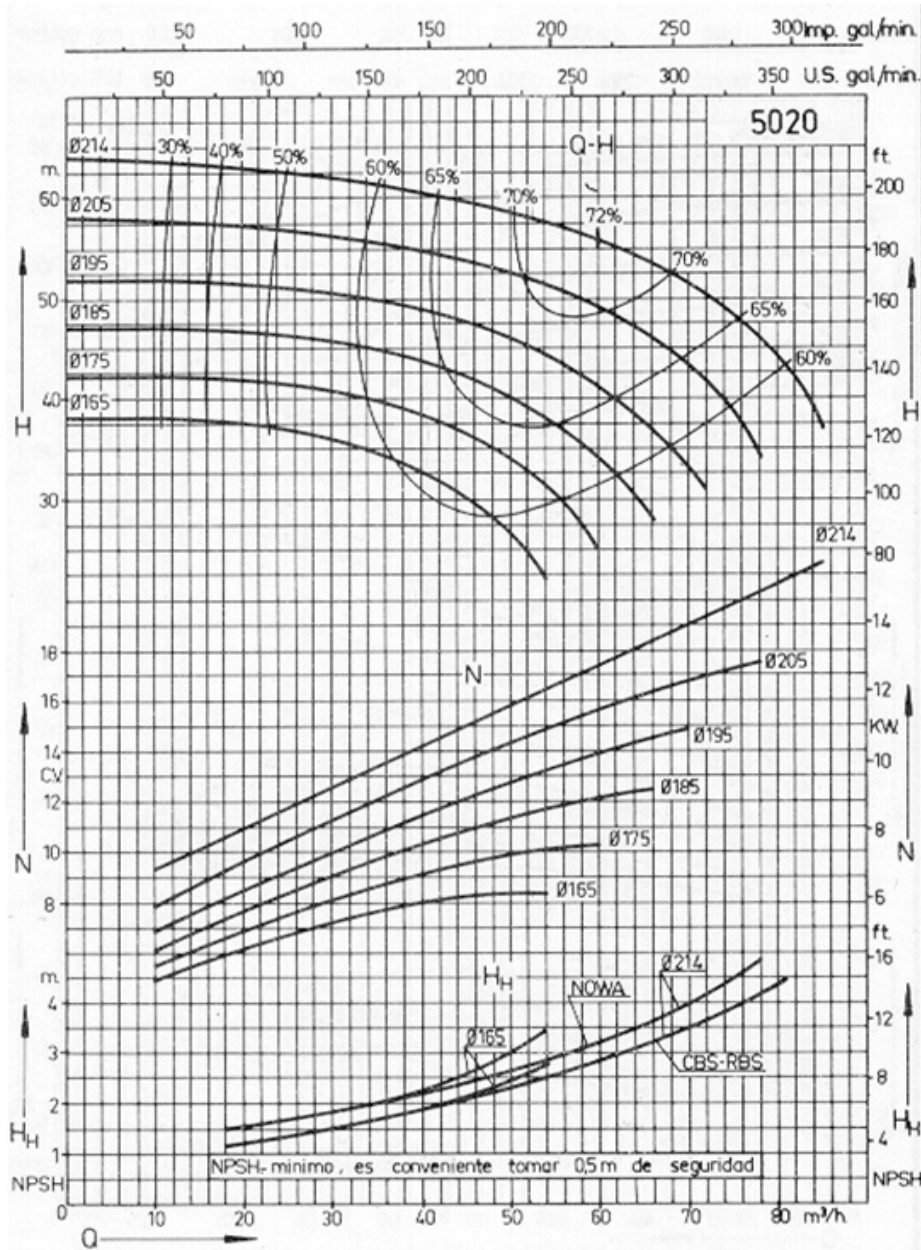
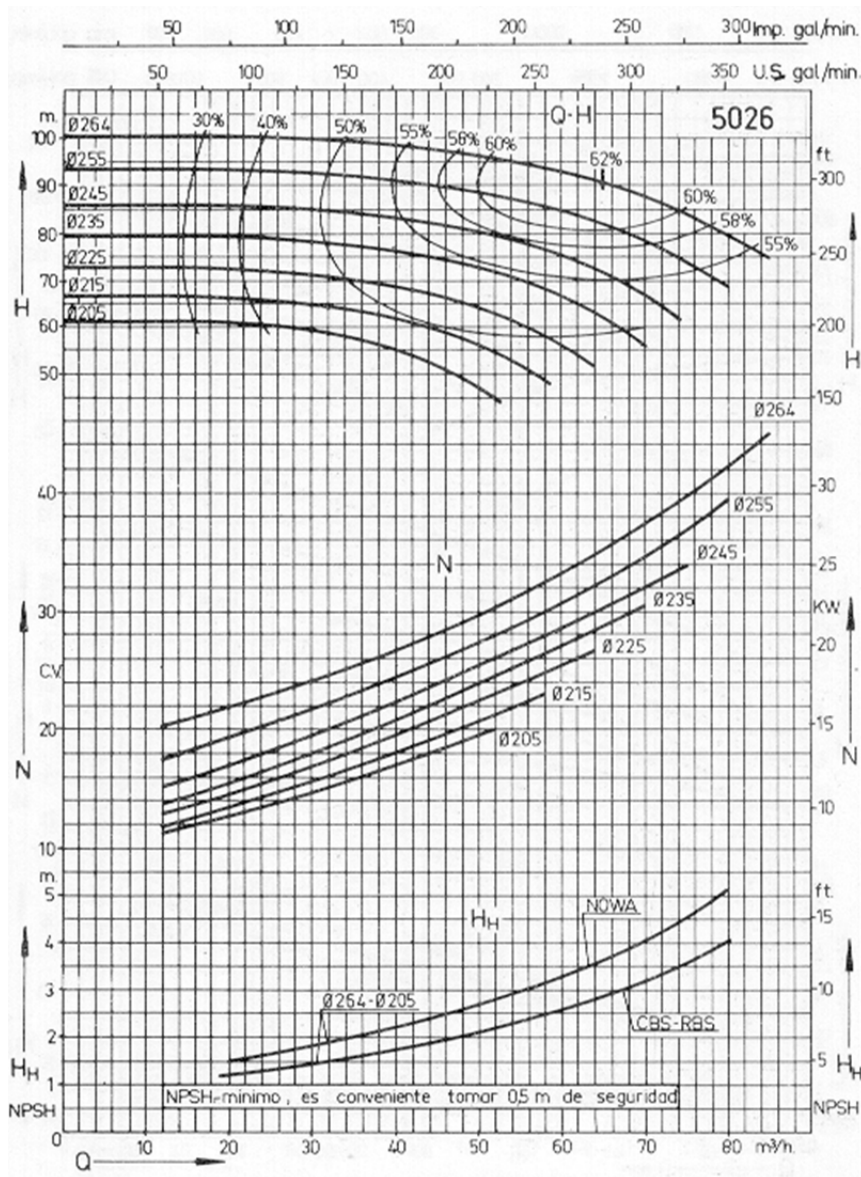


Fig. 64.2  
Curva  
característica de  
las bombas 2, 3  
y 4 modelo 5020.  
Cortesía de  
bombas SIHI



Fig. 64.3  
Curva  
característica de  
la bomba 1,  
modelo 5026.  
Cortesía de  
bombas SIHI



## Resolución

1. Caudal circulante en cada uno de los tramos y punto de funcionamiento de cada una de las bombas.

Suponiendo que no hay pérdidas de caudal en los diferentes tramos, se tiene que

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43}$$

Aplicando Bernoulli entre los puntos siguientes (1-4 , 4-2 y 4-3), se obtiene:

Tramo 1-4:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + H_{\text{grupo}} = \frac{p_4}{\rho g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + \Delta h_{14}$$

Tramo 4-2:

$$\frac{p_4}{\rho g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{42}$$

Tramo 4-3:

$$\frac{p_4}{\rho g} + z_4 + \frac{v_4^2}{2g} + H_{B4} = \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \Delta h_{43}$$

Tomando como plano de referencia el situado en  $z_1$  (cota cero) trabajando en presiones relativas y despreciando el término de energía cinética en el punto 4, se tiene:

$$\frac{p_4}{\rho g} = H_{\text{grupo}} - z_4 - k_{14} Q_{14}^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\frac{p_4}{\rho g} = z_2 - z_4 + k_{42} Q_{42}^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\frac{p_4}{\rho g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + k_{43} Q_{43}^2 \quad (\text{ecuación 3})$$

Las ecuaciones definitorias del sistema cuando el caudal se da en  $[m^3/h]$  vendrán dadas por:

$$\frac{p_4}{\rho g} = H_{\text{grupo}} - z_4 - \left( \frac{6.480 + 25.920}{3.600^2} \right) Q_{14}^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\frac{p_4}{\rho g} = z_2 - z_4 + \left( \frac{6.480}{3.600^2} \right) Q_{42}^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\frac{p_4}{\rho g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + \left( \frac{19.440}{3.600^2} \right) Q_{43}^2 \quad (\text{ecuación 3})$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \quad (\text{ecuación 4})$$



Las ecuaciones 1,2,3,4 forman un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Las incógnitas son:

$$\frac{P_4}{\rho g}; Q_{1-4}; Q_{4-2}; Q_{4-3}.$$

Un modo de resolución del sistema de ecuaciones hallado sería el gráfico, para ello, se representarán inicialmente las ecuaciones 2 y 3, se sumarán en paralelo y la curva resultante se sustituirá en la ecuación 1.

En la resolución gráfica, se ha de tener en cuenta que las curvas características de las bombas están dadas por:

Bomba 1, modelo 5026, con diámetro de rodete de 235 mm.

Bombas 2, 3, 4, modelo 5020, con diámetro de rodete de 195 mm.

El grupo de bombeo se determinará sumando en serie las características de las bombas 2 y 3. Su resultado se sumará en paralelo con la característica de la bomba 1 (v. figura 64.4).

El proceso de obtención de la curva característica del sistema se ha representado paso a paso en las figuras 64.5 a 64.9.

La figura 64.5 representa las pérdidas de carga en función del caudal para el tramo 1-4:

$$\Delta h_{1-4} = K_{1-4} Q_{1-4}^2 = H_{\text{aspiración}} + H_{\text{impulsión}}.$$

En la figura 64.6 se representa la ecuación 1 al completo, es decir, el valor de  $\frac{P_4}{\rho g} \Big|_{\text{tramo 1-4}}$ . Obsérvese que a la curva característica del grupo de bombeo, obtenida en la

figura 64.4, se le ha restado el valor de la cota en el punto 4 y también las pérdidas por rozamiento en el tramo de tubería entre los puntos 1 y 4, curva representada en la figura 64.5.

Para hallar la curva característica que representa la energía por unidad de peso debida a la presión que existe en el punto 4 en función de las características del tramo 4-2 (ecuación 2), hay que sumar a las pérdidas de carga del tramo 4-2 la cota del punto 2 y restarle la del punto 4. La curva resultante se detalla en la figura 64.7.

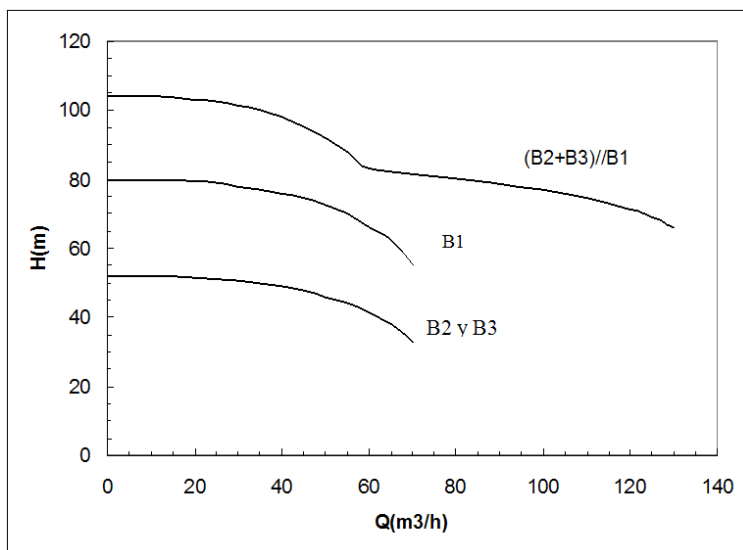


Fig. 64.4  
Curva  
característica del  
grupo de  
bombeo

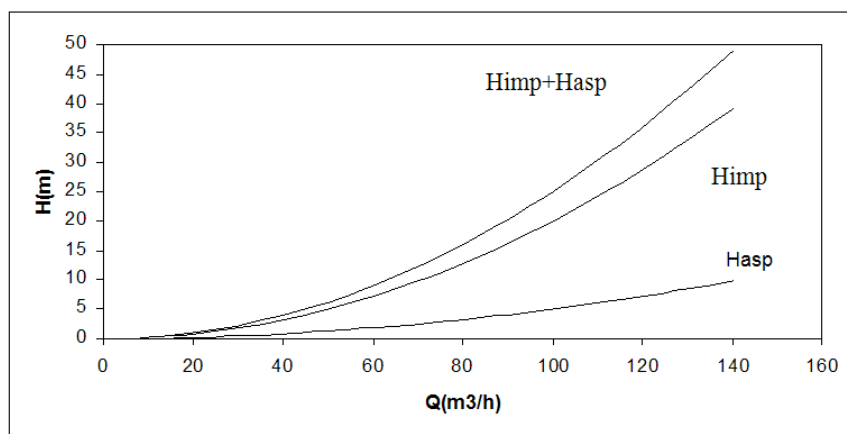


Fig. 64.5  
Pérdidas de  
carga en función  
del caudal para  
el tramo 1-4

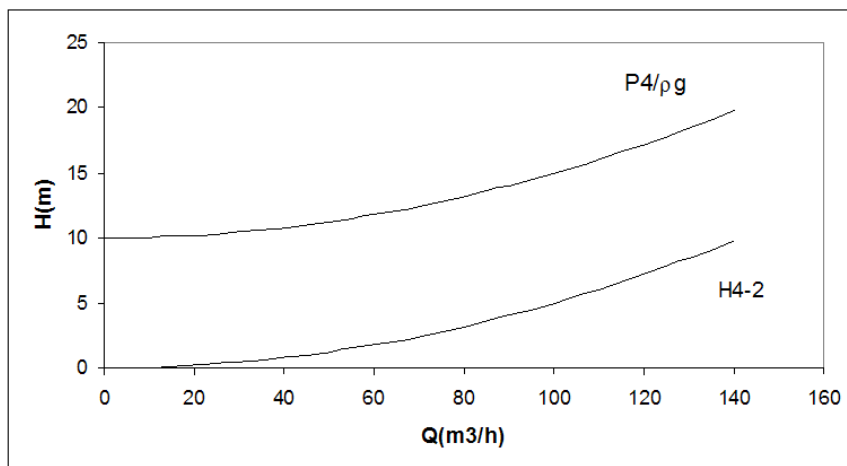


Fig. 64.7  
Representación  
gráfica de la  
ecuación 2.  
Energía por  
unidad de masa  
existente en el  
punto 4, según el  
tramo 4-2



La tercera y última de las curvas a representar es la que corresponde a la ecuación 3. En la figura 64.8 se detallan cada uno de los términos de esta ecuación, cuya suma en serie se especifica en la figura 64.9.

Fig. 64.6  
Representación  
gráfica de la  
ecuación 1

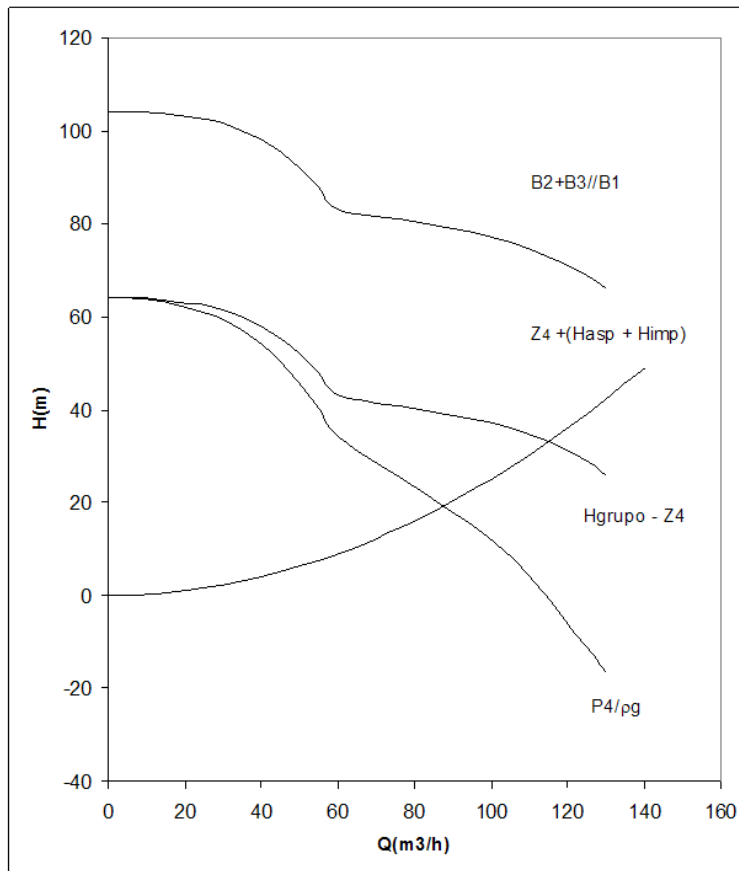
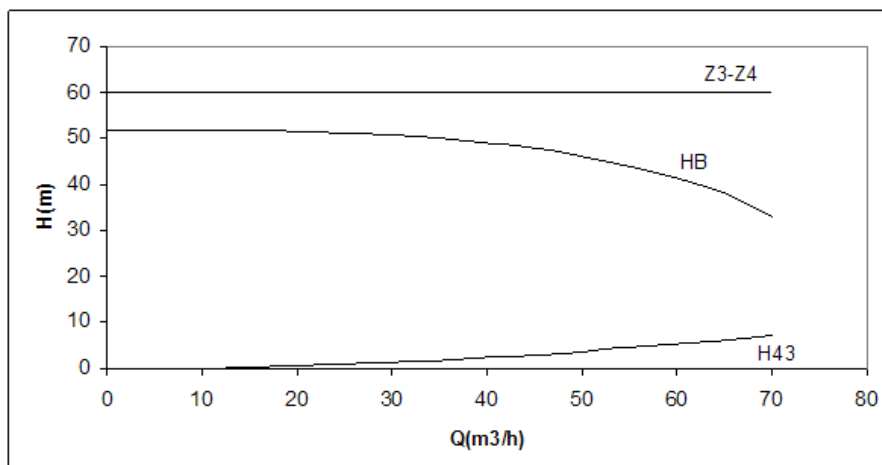


Fig 64.8  
Representación  
gráfica de los  
diversos  
términos que  
componen la  
curva 3





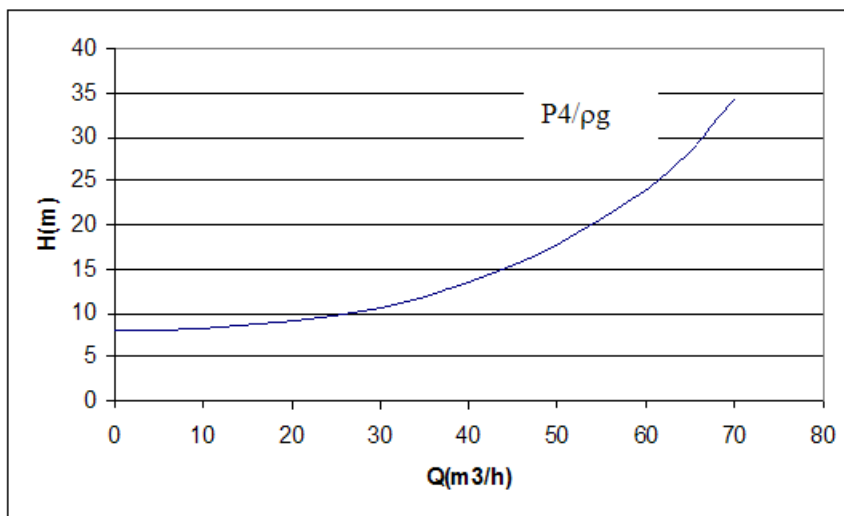


Fig. 64.9  
Energía  
resultante en el  
punto 4 según el  
tramo 4-3,  
curva 3

El punto de funcionamiento se encontrará como el punto de intersección entre las curvas resultantes de sumar las ecuaciones 2 y 3 en paralelo (curvas de las figuras 64.7 y 64.9) y la curva resultante de la ecuación 1 (figura 64.6). La representación de dichas diversas curvas y su punto de intersección se encuentra en la figura 64.10.

En el punto de intersección, se leen en la figura 64.10 las características siguientes.

$$Q_{1-4} = 100 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = H_4 = 12 \text{ m}$$

Al deshacer las curvas partiendo del punto de intersección, se obtienen los caudales que fluyen por cada uno de los tramos restantes (v. figura 64.10). Los valores resultantes son (obsérvese que se cumple la ecuación de continuidad):

$$Q_{4-2} = 63 \text{ m}^3/\text{h} \quad Q_{4-3} = 37 \text{ m}^3/\text{h}$$

De la figura 64.11 se obtienen los puntos de funcionamiento para las bombas 1, 2 y 3, siendo:

Bomba 1:  $H = 78 \text{ m}$ ;  $Q = 35 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Bomba 2 = Bomba 3;  $H = 39 \text{ m}$ ;  $Q = 65 \text{ m}^3/\text{h}$

Obsérvese que en todo momento se cumple la ecuación de continuidad, además, la altura de elevación de las bombas 2 y 3 en serie es la misma que la de la bomba 1, como era de esperar.



Para hallar el punto de funcionamiento de la bomba 4, basta con entrar con el caudal circulante en el tramo 4-3, que era de  $Q_{4-3} = 37 \text{ m}^3/\text{h}$ , a la curva característica de la bomba 4 (figura 64.2), y se obtiene:

$$H_{\text{bomba 4}} = 49 \text{ m}; Q_{\text{bomba 4}} = Q_{4-3} = 37 \text{ m}^3/\text{h}.$$

El mismo resultado se habría obtenido si se hubiesen sustituido los valores del punto de funcionamiento en las ecuaciones 1, 2, 3 y 4.

## 2. Determinación de la cota del grupo de bombeo.

Se aplica Bernoulli entre el nivel del líquido en el depósito 1 y las bridas de aspiración de la bomba 1 y la bomba 2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{\text{aspb1}}}{\rho g} + z_{B1} + \frac{v_{B1}^2}{2g} + \Delta h_{1B1}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{\text{asp2}}}{\rho g} + z_{B2} + \frac{v_{B2}^2}{2g} + \Delta h_{1B2}$$

Puesto que  $z_1 = 0$ ; y  $\frac{v_1^2}{2g} = 0$ ; trabajando con presiones absolutas, se tiene:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{\text{brida1}}}{\rho g} + z_{B1} + \frac{v_{B1}^2}{2g} + \Delta h_{1B1}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_{\text{brida2}}}{\rho g} + z_{B2} + \frac{v_{B2}^2}{2g} + \Delta h_{1B2}$$

Según la definición de la altura de aspiración neta disponible, se tiene:

$$\text{NPSHd} = \frac{P_{\text{Brida}}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} - \frac{P_{\text{vapor}}}{\rho g}$$

de donde, para cada una de las dos bombas:

$$\text{NPSHd} = \frac{P_1}{\rho g} - \left( \frac{P_{\text{vapor}}}{\rho g} + z + \Delta h_{\text{aspiración}} \right)$$

Por falta de datos, se despreciarán las pérdidas de carga desde la brida de aspiración de las bombas B1 y B2, hasta el punto de intersección con el conducto de aspiración común.

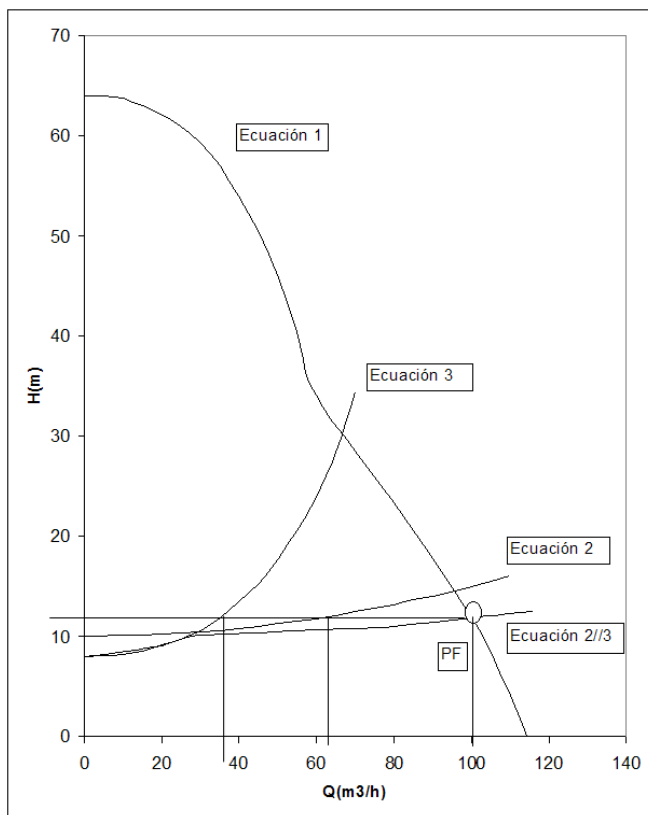


Fig. 64.10  
Representación  
de las curvas  
resultantes de  
las ecuaciones 1,  
2 y 3, y su punto  
de intersección

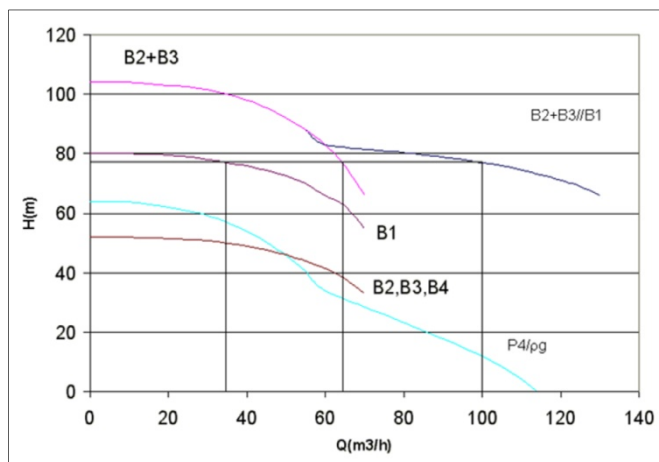


Fig. 64.11  
Caudales  
circulantes en  
cada tramo

Puesto que se conoce el caudal que circula por cada una de las bombas,  $B_1$  y  $B_2$ , cuyo valor es:

$Q_1 = 35 \text{ m}^3/\text{h}$ . Y  $Q_2 = 65 \text{ m}^3/\text{h}$ , Entrando con dichos valores en las gráficas de las bombas, (figuras 64.2 y 64.3), se obtiene:



NPSHr1: 2 m

NPSHr2: 3,5 m

La condición de no cavitación para cualquier bomba es  $NPSH_d > NPSH_r$ . El caso más desfavorable aparece en la bomba 2, con lo cual, si esta bomba no cavita, no cavitará la 1.

Datos necesarios:

Presión de vapor del agua a  $20^\circ\text{C} = 2.337 \text{ Pa}$

Densidad del agua =  $1.000 \text{ kg/m}^3$

Presión atmosférica, en metros de columna mercurio =  $0,76 \text{ m}$

Densidad del mercurio =  $13.600 \text{ kg/m}^3$

En consecuencia:

$$\frac{p_i}{\rho g} = \frac{0,76 * 13.600 * 9,8}{1.000 * 9,8} = 10,34 \text{ m}$$

$$\Delta h_{IB} = 6.480 Q^2 \left( "Q \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{s}} " \right) = \frac{6.480}{3.600^2} Q^2 \left( "Q \text{ en } \frac{\text{m}^3}{\text{h}} " \right) = 0,0005 Q^2 = 0,0005 * 100^2 = 5 \text{ m}$$

$$\frac{p_v}{\rho g} = \frac{2.337}{1.000 * 9,8} = 0,24 \text{ m}$$

$$z = \frac{p_i}{\rho g} - \left( \frac{p_v}{\rho g} + NPSH_d + \Delta h_{Iasp} \right) = 10,34 - (5 + 3,5 + 0,24) = 1,6 \text{ m}$$

Si el grupo de bombeo se sitúa  $1,6 \text{ m}$  por encima del nivel del líquido del depósito inferior, la bomba 2 cavitará. Si se toma como margen de seguridad admisible  $0,5 \text{ m}$ , el grupo de bombeo debería estar situado como máximo a  $1,1 \text{ m}$  por encima del nivel del líquido del depósito 1.

3. Determine la velocidad de giro de la bomba 4 para que el caudal que circula por el tramo 1-4 disminuya en un  $2,5\%$ .

Para encontrar la velocidad de giro de la bomba 4 cuando el caudal que circula por 1-4 disminuye, se debe hallar el nuevo punto de funcionamiento del sistema. Este nuevo punto será el punto de intersección de la curva de la ecuación 1 y el nuevo caudal ( $Q' = 97,5 \text{ m}^3/\text{h}$ ). La altura correspondiente a este caudal es:  $H' = 13,5 \text{ m}$ . (v. figura 64.12).

Puesto que la curva característica para el tramo 4-2 ha de ser la misma que la obtenida en el primer apartado, desplazándose horizontalmente para  $H' = 13,5 \text{ m}$ , se obtiene el caudal que circula por el tramo 4-2.

$$Q'_{4-2} = 82,5 \text{ m}^3/\text{h}$$

Según la ecuación de continuidad:

$$Q_{4-1} = Q_{4-2} + Q_{4-3}$$

con lo cual, la curva característica del tramo 4-3 deberá pasar por el punto:

$$Q'_{4-3} = 15 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$H'_{4-3} = P_4 / \rho g = 13,5 \text{ m}$$

Para que la curva característica del tramo 4-3 pase por este punto, será necesario que la bomba 4 tenga una altura de elevación de  $H_{B4} = 46,83 \text{ m}$  (v. figura 64.8 y ecuación 3).

$$H_{B4} = z_3 - z_4 - \frac{P_4}{\rho g} + \frac{19.440}{3.600^2} Q_{4-3}^2 = 60 - 13,5 + \frac{19.440}{3.600^2} 15^2 = 46,83 \text{ m}$$

Se debe ahora trazar una curva de afinidad que pase por el punto  $H = 46,83 \text{ m}$ ,  $Q = 15 \text{ m}^3/\text{h}$ .

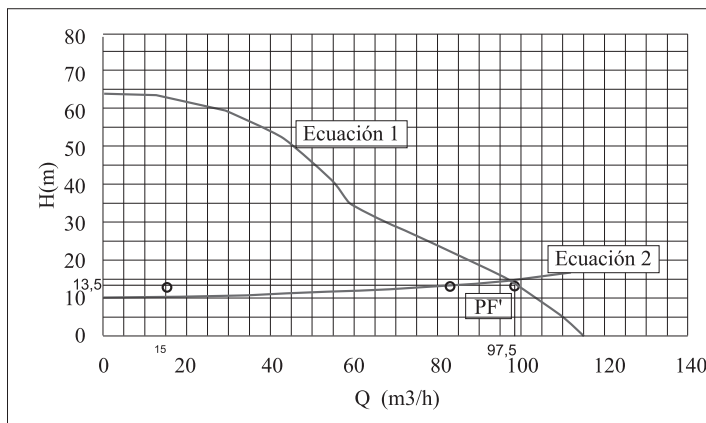


Fig. 64.12  
Nuevo punto de funcionamiento

La ecuación de la curva de afinidad será:

$$H = k Q_{4-3}^2$$

$$H = \frac{46,83}{15^2} Q_{4-3}^2 = 0,2081 Q_{4-3}^2$$

La curva de afinidad cortará en un determinado punto a la curva característica de la bomba 4. Dicho punto se detalla en la figura 64.13 y tiene por valores:  $H = 52 \text{ m}$ ,  $Q = 16 \text{ m}^3/\text{h}$ .

Entre los puntos  $H = 52 \text{ m}$ ,  $Q = 16 \text{ m}^3/\text{h}$ , y  $H = 46,83 \text{ m}$ ,  $Q = 15 \text{ m}^3/\text{h}$ , ambos pertenecientes a la curva de afinidad, se podrán aplicar las leyes de semejanza.

Igualando las cifras características de altura de elevación, se tiene:

$$\frac{H_g}{\omega_4^2 D^2} = \frac{H'_g}{\omega_4'^2 D^2}$$

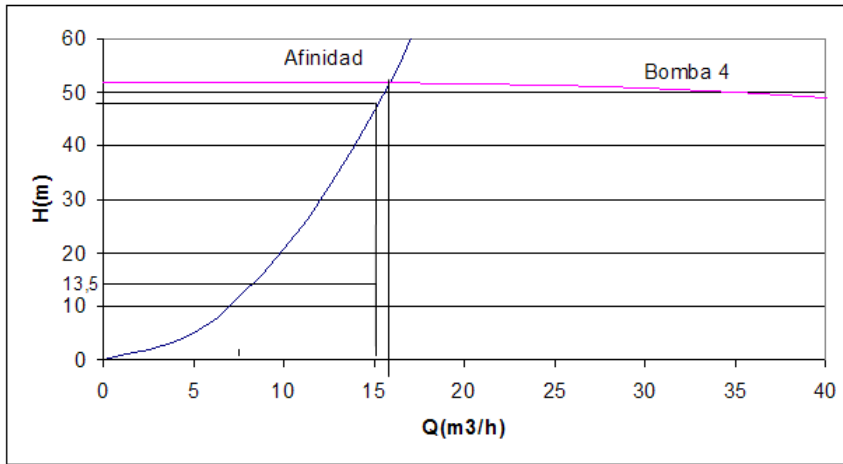


Sabiendo que  $D=195$  mm;  $\omega_4=2.900$  rpm.

$$\omega_4'^2 = \frac{H' \omega_4^2}{H} = \frac{46,83 * 2.900^2}{52}$$

$$\omega_4' = 2.752 \text{ rpm}$$

Fig. 64.13  
Puntos entre los  
cuales se aplica  
semejanza



1.b Método alternativo para la resolución del apartado primero de este problema. Se trata de resolver directamente el sistema de ecuaciones hallado, en lugar de realizar la representación grafica. El sistema de ecuaciones que caracteriza el apartado 1 del problema constaba de las ecuaciones siguientes:

$$H_{\text{grupo}} = \frac{P_4}{\rho g} + z_4 + k_{14} Q_{14}^2 \quad (\text{ecuación 1})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_2 - z_4 + k_{42} Q_{42}^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

$$\frac{P_4}{\rho g} = z_3 - z_4 - H_{B4} + k_{43} Q_{43}^2 \quad (\text{ecuación 3})$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \quad (\text{ecuación 4})$$

Obsérvese que, este sistema de ecuaciones, que define el comportamiento del fluido en el apartado 1 (sistema definido en la figura 64.1), consta de cuatro incógnitas,  $Q_{14}$ ,  $Q_{42}$ ,  $Q_{43}$  y  $P_4$ . No obstante, la energía comunicada por el grupo de bombeo constituido por las bombas 1,2,3 y denominado en la ecuación 1 como  $H_{\text{grupo}}$ , así como la energía comunicada por la bomba 4,  $H_{B4}$ , no son conocidas en forma de ecuación, sino en forma gráfica; de aquí que el apartado 1 se resolviese gráficamente.

Para resolver de nuevo este apartado en forma analítica, será necesario determinar la ecuación que caracteriza la energía comunicada al fluido por el grupo de bombeo  $H_{\text{grupo}}$  y por la bomba 4  $H_{B4}$ .

La curva altura/caudal, característica de la bomba 4 viene dada por la figura 64.2 para un diámetro de rodete de 195 mm. La interpolación de esta curva, para un caudal dado en  $[m^3/s]$ , da lugar a la ecuación siguiente:

$$H_{B4} = 52 - 5301439,4951 Q_{43}^3 + 76933,0569 Q_{43}^2 - 472,3481 Q_{43},$$

donde  $H$  [m];  $Q$   $[m^3/s]$ ;

Por otro lado, la curva altura/caudal del grupo de bombeo,  $H_{\text{grupo}}$ , representa el comportamiento de las bombas 2 y 3 en serie, y estas en paralelo con la bomba 1. La curva característica del grupo de bombeo se ha representado

en la figura 64.4, donde se le ha dado el nombre de (B2+B3)//B1. La interpolación de dicha curva cuando el caudal se mide en  $m^3/s$ , ha dado lugar a la ecuación siguiente:

$$H_{\text{grupo}} = 103,9861 + 353699107344,00 Q_{14}^6 - 33844751212,00 Q_{14}^5 + 832219232,75 Q_{14}^4 + 7983219,3945 Q_{14}^3 - 497404,4859 Q_{14}^2 + 3146,0543 Q_{14}$$

donde  $H$  [m];  $Q$   $[m^3/s]$ .

Véase, por otro lado, que cada uno de los términos de las ecuaciones 1, 2 y 3 representa la energía por unidad de peso asociada al fluido  $\left[ \frac{J}{Kg * g} \right] = [m]$ ; las constantes  $K_{14}$ ,

$K_{42}$  y  $K_{43}$  están definidas en el enunciado del problema y valen:  $K_{14} = 25920 \left[ \frac{s^2}{m^5} \right]$ ,

$K_{42} = 6480 \left[ \frac{s^2}{m^5} \right]$ ,  $K_{43} = 19440 \left[ \frac{s^2}{m^5} \right]$ , siendo las unidades de los caudales definidos

en las ecuaciones 1, 2, 3, 4,  $H_4$  y  $H_{\text{grupo}}$  de  $\left[ \frac{m^3}{s} \right]$ . Es decir, el sistema de unidades utilizado para definir dichas ecuaciones es el sistema internacional.

Sustituyendo todos los términos en las cuatro ecuaciones constitutivas, se obtiene: (Obsérvese que, al igual que se ha hecho en la resolución precedente, el término que caracteriza la energía cinética en el punto 4 se ha despreciado.)



$$\begin{aligned}
 &103,9861 + 353699107344,0 Q_{14}^6 - 33844751212,0 Q_{14}^5 + \\
 &+ 832219232,75 Q_{14}^4 + 7983219,3945 Q_{14}^3 - 497404,4859 Q_{14}^2 \\
 &+ 3146,0543 Q_{14} = \frac{P_4}{\rho g} + 40 + (6480 + 25920) Q_{14}^2
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{P_4}{\rho g} - 10 = 6480 Q_{42}^2 \quad (2)$$

$$\frac{P_4}{\rho g} - 60 + 52 - 5301439,4951 Q_{43}^3 + 76933,0569 Q_{43}^2 - 472,3481 Q_{43} = 19440 Q_{43}^2 \quad (3)$$

$$Q_{14} = Q_{42} + Q_{43} \quad (4)$$

En principio, la resolución de este sistema de ecuaciones no debería conllevar mayor problema, aunque, debido a que algunas de las variables están elevadas a la sexta potencia, otras al cubo y otras al cuadrado, aparecen ciertos problemas matemáticos que ciertos software no pueden resolver, con lo que, para la resolución de este apartado, se ha optado por reducir el sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, a una ecuación con una sola incógnita, resolviendo la ecuación resultante mediante aproximaciones sucesivas.

Inicialmente, se ha sustituido la ecuación 2 en 1 y en 3, y se ha obtenido

$$\begin{aligned}
 &103,9861 + 353699107344,0 Q_{14}^6 - 33844751212,0 Q_{14}^5 + 832219232,75 Q_{14}^4 \\
 &+ 7983219,3945 Q_{14}^3 - 497404,4859 Q_{14}^2 \\
 &+ 3146,0543 Q_{14} = +10 + 6480 Q_{42}^2 + 40 + (6480 + 25920) Q_{14}^2
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 &10 + 6480 Q_{42}^2 - 60 + 52 - 5301439,4951 Q_{43}^3 + \\
 &+ 76933,0569 Q_{43}^2 - 472,3481 Q_{43} = 19440 Q_{43}^2
 \end{aligned} \quad (6)$$

Despejando  $Q_{42}$  de la ecuación 6 y sustituyéndolo en 4 y 5 se obtiene:

$$Q_{14} = \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 &53,98 + 353699107344,0 Q_{14}^6 - 33844751212,0 Q_{14}^5 + 832219232,75 Q_{14}^4 + \\
 &+ 7983219,3945 Q_{14}^3 - 529804,48 Q_{14}^2 + \\
 &+ 3146,05 Q_{14} = -2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}
 \end{aligned} \quad (8)$$

Sustituyendo, por último la ecuación 7 en la 8, se obtiene una ecuación que depende únicamente de  $Q_{43}$ :



$$\begin{aligned}
 & 53,98 + 353699107344,0 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^6 \\
 & - 33844751212,0 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^5 \\
 & + 832219232,75 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^4 \\
 & + 7983219,3945 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^3 \\
 & - 529804,48 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\}^2 \\
 & + 3146,05 \left\{ \sqrt{\frac{-2 + 5301439,49 Q_{43}^3 - 57493,05 Q_{43}^2 + 472,34 Q_{43}}{6480}} + Q_{43} \right\} \\
 & + 2 - 5301439,49 Q_{43}^2 + 57493,05 Q_{43}^2 - 472,34 Q_{43} = 0
 \end{aligned}$$

De la resolución de esta ecuación, se obtiene como una de las posibles soluciones:  $Q_{43} = 0,00978125 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ .

Sustituyendo el valor de  $Q_{43}$  en la ecuación 7, se obtiene  $Q_{14} = 0,02770013 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ ; al sustituir estos dos valores en la ecuación 4 se obtendrá  $Q_{42} = 0,01791888 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right]$ . Por

último, al sustituir el valor de  $Q_{42}$  en la ecuación 2, se determina  $\frac{P_4}{\rho g} = 12,08 \text{ [m]}$ .

Dando los caudales hallados en  $\left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ , se obtiene

$$Q_{43} = 35,2125 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]; \quad Q_{14} = 99,7204 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]; \quad Q_{42} = 64,5079 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right].$$

Obsérvese que el resultado obtenido es prácticamente idéntico al hallado en el apartado inicial del problema.



## Problema 65

### Enunciado

El esquema definido en la figura 65.1 muestra una instalación de bombeo de agua. Sabiendo que las longitudes y los diámetros de cada tramo de conducto son conocidos, halle:

1. El caudal circulante en cada tramo, así como las presiones en cada uno de los nudos.
2. Realice de nuevo el problema, modificando el diámetro de los conductos para que la velocidad de circulación del fluido en los mismos sea de aproximadamente 1-2 m/s. Deben utilizarse, en todo momento, las bombas que se definen en este enunciado, entendiendo además, que las cotas de los nudos y los depósitos no se pueden modificar.

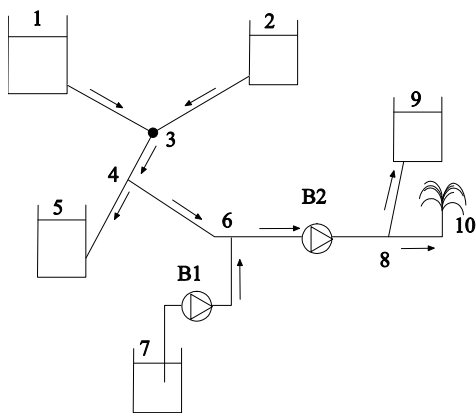
Las longitudes de cada uno de los conductos son

$$\begin{aligned} L_{1-3} &= 200 \text{ m}, & L_{2-3} &= 250 \text{ m}, & L_{3-4} &= 50 \text{ m}, & L_{4-5} &= 200 \text{ m}, & L_{4-6} &= 300 \text{ m}, \\ L_{7-6} &= 70 \text{ m}, & L_{6-8} &= 200 \text{ m}, & L_{8-9} &= 300 \text{ m}, & L_{8-10} &= 200 \text{ m}. \end{aligned}$$

Las cotas de los diversos puntos son

$$\begin{aligned} Z_1 &= 260 \text{ m}, & Z_2 &= 250 \text{ m}, & Z_3 &= 200 \text{ m}, & Z_4 &= 180 \text{ m}, & Z_5 &= 135 \text{ m}, & Z_6 &= 140 \text{ m}, \\ Z_7 &= 80 \text{ m}, & Z_8 &= 140 \text{ m}, & Z_9 &= 160 \text{ m}, & Z_{10} &= 150 \text{ m}. \end{aligned}$$

Fig. 65.1  
Esquema de la  
instalación de  
bombeo a  
estudiar



Considere que la bomba 1 está muy cercana al depósito 7 y que la bomba 2 está situada a la misma cota que los puntos 6 y 8.

Las curvas características de cada una de estas dos bombas vienen dadas por las ecuaciones

$$H_{B1} = -81973 \cdot Q_{76}^2 + 100$$

$$H_{B2} = -30116 \cdot Q_{68}^2 + 50,037$$

Considere, para el apartado 1, que el diámetro de cada uno de los tubos es de 0,1 m. La tobera de salida del punto 10, tiene un diámetro de 0,05 m. La tubería se considerará lisa en todos los tramos.

Las direcciones de los diversos flujos son conocidas y vienen dadas en la figura.

## Resolución

1. Puesto que la dirección del flujo en cada tramo se da en el enunciado del problema (Fig. 65.1), se puede definir el sistema de ecuaciones característico del conjunto de conductos del siguiente modo:

$$\text{Se denomina } E_i = \frac{P_i}{\rho g} + Z_i + \frac{V_i^2}{2g} \quad \text{y} \quad \Delta h_{ij} = \frac{1}{g} \cdot f_{ij} \cdot \frac{L_{ij}}{D_{ij}} \cdot \frac{8 \cdot Q_{ij}^2}{\pi^2}, \quad \frac{V_i^2}{2g} = \frac{8 \cdot Q_i^2}{\pi^2 D_i^4}.$$

Aplicando la ecuación de la energía entre los extremos de los diversos tramos, se tiene:

Tubería 1-3.

$$E_1 = E_3 + \Delta h_{13} \Rightarrow Z_1 = \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{13} \cdot \frac{L_{13}}{D_{13}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{13}^2}{\pi^2}$$

Tubería 2-3.

$$E_2 = E_3 + \Delta h_{23} \Rightarrow Z_2 = \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{23} \cdot \frac{L_{23}}{D_{23}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{23}^2}{\pi^2}$$

Tubería 3-4.

$$E_3 = E_4 + \Delta h_{34} \Rightarrow \frac{P_3}{\rho g} + Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} = \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{34} \cdot \frac{L_{34}}{D_{34}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{34}^2}{\pi^2}$$

Tubería 4-5.

$$E_4 = E_5 + \Delta h_{45} \Rightarrow \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} = Z_5 + \frac{1}{g} \cdot f_{45} \cdot \frac{L_{45}}{D_{45}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{45}^2}{\pi^2}$$

Tubería 4-6.

$$E_4 = E_6 + \Delta h_{46} \Rightarrow \frac{P_4}{\rho g} + Z_4 + \frac{V_4^2}{2g} = \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{46} \cdot \frac{L_{46}}{D_{46}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{46}^2}{\pi^2}$$

Tubería 7-6.

$$\begin{aligned} E_7 + H_{B1} = E_6 + \Delta h_{76} &\Rightarrow Z_7 + (-81973 \cdot Q_{76}^2 + 100) = \\ &= \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{76} \cdot \frac{L_{76}}{D_{76}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{76}^2}{\pi^2} \end{aligned}$$



Tubería 6-8.

$$E_6 + H_{B2} = E_8 + \Delta h_{68} \Rightarrow \frac{P_6}{\rho g} + Z_6 + \frac{V_6^2}{2g} + (-30116 \cdot Q_{68}^2 + 50,037) =$$

$$= \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{68} \cdot \frac{L_{68}}{D_{68}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{68}^2}{\pi^2}$$

Tubería 8-9.

$$E_8 = E_9 + \Delta h_{89} \Rightarrow \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} = Z_9 + \frac{1}{g} \cdot f_{89} \cdot \frac{L_{89}}{D_{89}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{89}^2}{\pi^2}$$

Tubería 8-10.

$$E_8 = E_{10} + \Delta h_{810} \Rightarrow \frac{P_8}{\rho g} + Z_8 + \frac{V_8^2}{2g} = Z_{10} + \frac{V_{10}^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot f_{810} \cdot \frac{L_{810}}{D_{810}^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_{810}^2}{\pi^2}$$

De aplicar la ecuación de continuidad en cada nudo, se obtiene:

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Los factores de fricción  $f_{ij}$  en cada tramo se deben determinar mediante el diagrama de Moody, en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa. El valor del número de Reynolds es desconocido, puesto que depende del caudal circulante en cada tramo, con lo que, para determinar los factores de fricción, se puede bien suponer que la tubería es lisa y el número de Reynolds es muy elevado, característico de flujo turbulento desarrollado, o bien dar un valor arbitrario a cada factor de fricción. En ambos casos, será necesario corregir el valor del factor de fricción una vez se haya determinado la solución del sistema de ecuaciones. Para el presente estudio, se ha elegido un valor del factor de fricción inicial de 0,02 en todos los tramos.

Obsérvese que, para el circuito objeto de estudio, se crea un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas. Las incógnitas son el caudal en cada uno de los tramos, en total 9, y la presión del fluido en cada nudo, en total 4.

Sustituyendo el valor de los parámetros conocidos en las ecuaciones determinadas, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 33911,578 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 42182,695 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 8271,11 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 32257,35 Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 49626,702 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 94379,67 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 63200,468 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 48799,592 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 45491,145 Q_{8-10}^2 + 10$$

Por supuesto, las ecuaciones de balance de flujo volumétrico permanecen invariables.

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones establecido, se obtiene como resultado:

$$Q_{13} = 0,0342 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{23} = 0,0265 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{34} = 0,0608 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{45} = 0,0412 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q_{46} = 0,0196 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{76} = 0,0099 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{68} = 0,0295 \text{ m}^3/\text{s}; Q_{89} = 0,0109 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q_{810} = 0,0186 \text{ m}^3/\text{s};$$



$$\frac{P_3}{\rho g} = 20,27 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 9,73 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 30,71 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,77 \text{ m},$$

La velocidad de circulación y el número de Reynolds para cada uno de los tramos es

$$V_{13} = 4,35 \text{ m/s}; \quad V_{23} = 3,37 \text{ m/s}; \quad V_{34} = 7,74 \text{ m/s}; \quad V_{45} = 5,24 \text{ m/s};$$

$$V_{46} = 2,49 \text{ m/s}; \quad V_{76} = 1,26 \text{ m/s}; \quad V_{68} = 3,75 \text{ m/s}; \quad V_{89} = 1,38 \text{ m/s}; \quad V_{810} = 2,36 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 433725,86; \quad R_{23} = 336074,13; \quad R_{34} = 771068,2; \quad R_{45} = 522500,16; \quad R_{46} = 248568,03;$$

$$R_{76} = 125552,22; \quad R_{68} = 374120,26; \quad R_{89} = 138234,26; \quad R_{810} = 235885,99.$$

Obsérvese que las velocidades de circulación son, en la mayoría de los casos, demasiado elevadas, con lo que sería necesario modificar el diámetro de los conductos con el fin de disminuir dichas velocidades de circulación.

Esto se va a realizar en el segundo apartado del problema.

Partiendo del valor del número de Reynolds hallado en cada tramo y considerando la tubería como lisa, se determinará utilizando el diagrama Moody, el factor de fricción, que será

$$f_{13} = 0,0137, \quad f_{23} = 0,0142, \quad f_{34} = 0,0122, \quad f_{45} = 0,0132, \quad f_{46} = 0,0151, \quad f_{76} = 0,0175,$$

$$f_{68} = 0,0139, \quad f_{89} = 0,017, \quad f_{810} = 0,0154.$$

Sustituyendo estos nuevos valores del factor de fricción en las ecuaciones precedentes, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 23489,98 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 30198,58 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 5045,38 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 21008,64 Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 37468,17 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 92932,23 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 53109,71 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 41355,60 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 37881,73 Q_{8-10}^2 + 10$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, se obtienen unos caudales circulantes y una presión en cada nudo de

$$Q_{13} = 0,042 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0323 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0743 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,0515 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0227 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0096 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0324 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0119 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0205 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18,57 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 10,76 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 31,40 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,85 \text{ m},$$

La velocidad de circulación y el número de Reynolds para cada uno de los tramos serán ahora:

$$V_{13} = 5,34 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 4,11 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,46 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 6,55 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 2,89 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,22 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 4,12 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 1,51 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,61 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 532645,79; \quad R_{23} = 409629,98; \quad R_{34} = 942275,78; \quad R_{45} = 653125,2; \quad R_{46} = 287882,37;$$

$$R_{76} = 121747,61; \quad R_{68} = 410898,18; \quad R_{89} = 150916,30; \quad R_{810} = 259981,87.$$

Mediante el diagrama de Moody, y procediendo del mismo modo que para el caso precedente, se obtiene:

$$f_{13} = 0,013; \quad f_{23} = 0,0138; \quad f_{34} = 0,0118; \quad f_{45} = 0,0126; \quad f_{46} = 0,0145; \quad f_{76} = 0,0177;$$

$$f_{68} = 0,01385; \quad f_{89} = 0,0167; \quad f_{810} = 0,015.$$

Obsérvese que el valor de los factores de fricción es ahora muy similar al obtenido en la iteración anterior. No obstante, se decide con estos nuevos valores realizar una nueva iteración, y se obtienen las siguientes constantes para las ecuaciones características:



$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 22332,02 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 29362,47 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 4879,96 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 20016,11 Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 35979,37 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 93048,03 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 53027,003 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 40611,20 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 37220,04 Q_{8-10}^2 + 10$$

De la resolución de estas nueve ecuaciones, más las cuatro ecuaciones de continuidad, se obtiene

$$Q_{13} = 0,043 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0327 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0757 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,0527 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0230 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0095 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0325 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0119 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{8-10} = 0,0206 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18,63 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 10,65 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 31,63 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,75 \text{ m}$$

Las velocidades y los números de Reynolds correspondientes a cada tramo de conducto son

$$V_{13} = 5,47 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 4,16 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,63 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 6,71 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 2,92 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,209 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 4,13 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 1,51 \text{ m/s}, \quad V_{8-10} = 2,62 \text{ m/s}.$$



$$R_{13} = 545327,84; \quad R_{23} = 414702,79; \quad R_{34} = 960030,64; \quad R_{45} = 668343,65;$$

$$R_{46} = 291686,98; \quad R_{76} = 120479,407; \quad R_{68} = 412166,39;$$

$$R_{89} = 150916,30; \quad R_{810} = 261250,08.$$

Los valores de los factores de fricción, según el diagrama de Moody, serán

$$f_{13} = 0,01295; \quad f_{23} = 0,01375; \quad f_{34} = 0,0117; \quad f_{45} = 0,0125; \quad f_{46} = 0,01445;$$

$$f_{76} = 0,0177; \quad f_{68} = 0,01385; \quad f_{89} = 0,0167; \quad f_{810} = 0,015.$$

Se observa que los valores acabados de hallar son prácticamente los mismos que los obtenidos en la iteración precedente, con lo que se podrían dar como válidos los valores de los caudales y las presiones determinados en la iteración anterior. No obstante, si se procede a realizar una última iteración, se obtiene

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 22249,31 Q_{13}^2 - 60$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + 29259,08 Q_{23}^2 - 50$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + 4838,60 Q_{34}^2 - 20$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + 19850,68 Q_{45}^2 - 45$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + 35855,30 Q_{46}^2 - 40$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 93048,03 Q_{76}^2 - 40$$

$$0 = -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 53027,003 Q_{68}^2 - 50,037$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 40611,20 Q_{89}^2 + 20$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 37220,04 Q_{8-10}^2 + 10$$



cuya resolución da lugar a:

$$Q_{13} = 0,0432 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0328 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0759 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,0529 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0230 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0095 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0325 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0119 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0206 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 18,54 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 10,63 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 31,65 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 25,75 \text{ m},$$

Las velocidades y los números de Reynolds correspondientes a cada tramo de conducto son

$$V_{13} = 5,50 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 4,17 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,66 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 6,73 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 2,92 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,209 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 4,13 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 1,51 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,62 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 547864,24; \quad R_{23} = 415971,004; \quad R_{34} = 962567,04; \quad R_{45} = 670880,06;$$

$$R_{46} = 291686,98; \quad R_{76} = 120479,407; \quad R_{68} = 412166,39; \quad R_{89} = 150916,30;$$

$$R_{810} = 261250,08.$$

Entrando con estos valores de los números de Reynolds en el diagrama de Moody, se obtienen exactamente los mismos valores de los factores de fricción que para el caso precedente, con lo que los valores finales del caudal circulante y las presiones en cada nudo son los últimos hallados.

Cabe destacar que las velocidades de circulación del agua para muchos de los tramos son demasiado elevadas, por lo que sería interesante modificar los diámetros de los conductos con el fin de disminuir dicha velocidad.

2A. En el primer apartado, se ha observado que las velocidades de circulación en muchos de los tramos es demasiado elevada. En el presente apartado se redefinirá el diámetro de cada tramo con el fin de que la velocidad de circulación sea de alrededor de 1-2 m/s.

Partiendo de los flujos volumétricos hallados en el apartado 1, y aplicando la ecuación de continuidad en cada tramo, se obtendrá el diámetro del conducto más apropiado. El diámetro se aproximará al valor normalizado más próximo.

A priori, la ecuación para hallar el diámetro será  $D = \sqrt{\frac{Q}{V} \frac{4}{\pi}}$ , siendo la velocidad considerada, de 1m/s.

Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>13</sub> = 0,0432	Q <sub>23</sub> = 0,0328	Q <sub>34</sub> = 0,0759	Q <sub>45</sub> = 0,0529	Q <sub>46</sub> = 0,0230	Q <sub>76</sub> = 0,095	Q <sub>68</sub> = 0,0325	Q <sub>89</sub> = 0,0119	Q <sub>810</sub> = 0,0206
Diámetro (m)	0,234	0,204	0,310	0,259	0,171	0,109	0,203	0,123	0,161
Diámetro normalizado (m)	0,25	0,2	0,3	0,25	0,15	0,1	0,2	0,15	0,15
Factor de fricción, f	0,0129	0,0137	0,0117	0,0125	0,0144	0,0177	0,0138	0,0167	0,015

Sustituyendo en las ecuaciones que caracterizan el flujo en cada tramo, los valores de los diámetros normalizados, y utilizando para empezar el valor del factor de fricción obtenido en la última iteración del primer apartado del problema, se obtiene:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,25^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01295 \frac{200}{0,25^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 240,53 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,2^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01375 \frac{250}{0,2^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 940,19 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0117 \frac{50}{0,3^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 19,91 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,25^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0125 \frac{200}{0,25^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 190,56 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,01445 \frac{300}{0,15^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 4721,68 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 93048,03 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 30831,96 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,15^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0167 \frac{300}{0,15^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 5293,51 Q_{89}^2$$



$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,15^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,015 \frac{200}{0,15^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} =$$

$$= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 16338,01 Q_{810}^2$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Sistema de ecuaciones que, conjuntamente con las cuatro ecuaciones de continuidad aplicadas a cada nudo, da lugar a un sistema de 13 ecuaciones con 13 incógnitas. De su resolución se obtiene

$$Q_{13} = 0,4565 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,2069 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,6354 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,5830 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0663 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = -0,0034 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0346 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0779 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = -0,0508 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 9,73 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 19,81 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 39,04 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 52,12 \text{ m}$$

Obsérvese que dos de los caudales son negativos. Esto implica que los sentidos del flujo en estos conductos son contrarios a los establecidos inicialmente. En definitiva, ninguno de los valores acabados de hallar puede considerarse válido. Se observa, asimismo, que uno de los caudales que es negativo es el del conducto 7-6, con lo que parece que la bomba 1 no suministre suficiente altura de elevación. Se observa, por otro lado, que en la parte izquierda del circuito (tuberías 1-3; 2-3; 3-4; 4-5 y 4-6), al aumentar el diámetro de los conductos parece que aumenten muchísimo los caudales circulantes. Este hecho es el que da lugar a que ahora la presión en el punto 6 sea considerablemente mayor que en el caso precedente y, por consiguiente, que la bomba B1 no suministre suficiente energía al fluido como para elevarlo del punto 7 al punto 6. Una manera de solucionar este problema es modificando la bomba B1 y tal vez la B2, puesto que el caudal 8-10 también es negativo, para que den mayor altura de elevación. Aunque en el enunciado se establece que no se deben modificar las bombas existentes, se procede a modificar las mismas con el fin de poder seguir por el camino indicado.

Eligiendo una característica para las bombas de  $H_{B1} = 120 - 81973 Q^2$ ;

$H_{B2} = 120 - 30116 Q^2$ ; las ecuaciones para los tramos 7-6 y 6-8 tomarán la forma:

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 60 + 93048,03 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 120 + 30831,96 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de los siete conductos restantes, así como las de continuidad en cada nudo, se mantienen invariables. Resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones, se obtiene

$$Q_{13} = 0,4499 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,2029 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,6528 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{45} = 0,5966 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{46} = 0,0563 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0114 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{68} = 0,0677 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0357 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0320 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 11,30 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 22,81 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 47,87 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 26,73 \text{ m}.$$

Para los diámetros de los conductos establecidos en este segundo apartado, se obtienen unas velocidades de circulación, números de Reynolds y factores de fricción de

$$V_{13} = 9,16 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 6,45 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 9,23 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 12,15 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 3,18 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,45 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 2,15 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 2,02 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 1,81 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 2282260,42; \quad R_{23} = 1286593,24; \quad R_{34} = 2759612,51; \quad R_{45} = 3026442,69;$$

$$R_{46} = 475999,33; \quad R_{76} = 144575,28; \quad R_{68} = 429287,14;$$

$$R_{89} = 301832,61; \quad R_{810} = 270550,24.$$

$$f_{13} = 0,0102; \quad f_{23} = 0,0112; \quad f_{34} = 0,0096; \quad f_{45} = 0,0094; \quad f_{46} = 0,0132;$$

$$f_{76} = 0,0168; \quad f_{68} = 0,0135; \quad f_{89} = 0,0145; \quad f_{810} = 0,0148.$$

El diámetro de los conductos para la siguiente iteración se determinará con los nuevos caudales y utilizando la ecuación  $D = \sqrt{\frac{Q}{V} \frac{4}{\pi}}$ . De nuevo, se considerará una velocidad de circulación de 1m/s.



Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>13</sub> = 0,4499	Q <sub>23</sub> = 0,2029	Q <sub>34</sub> = 0,6528	Q <sub>45</sub> = 0,5966	Q <sub>46</sub> = 0,0563	Q <sub>76</sub> = 0,0114	Q <sub>68</sub> = 0,0677	Q <sub>89</sub> = 0,0357	Q <sub>810</sub> = 0,0320
Diámetro (m)	0,756	0,508	0,911	0,871	0,267	0,120	0,2935	0,213	0,201
Diámetro normalizado (m)	0,75	0,5	1	0,9	0,25	0,1	0,3	0,2	0,2

Con estos nuevos diámetros y utilizando el nuevo factor de fricción acabado de hallar, se obtiene el siguiente colectivo de ecuaciones: (Véase que se mantiene la nueva configuración para las bombas B1 y B2.)

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,75^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0102 \frac{200}{0,75^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 0,97243 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,5^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0112 \frac{250}{0,5^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 8,734 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0096 \frac{50}{1^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 0,039 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,9^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0094 \frac{200}{0,9^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 0,137 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0132 \frac{300}{0,25^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 335,39 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0168 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_6}{\rho g} - 60 + 92526,94 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,0135 \frac{200}{0,3^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 120 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 120 + 30207,90 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,2^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0145 \frac{300}{0,2^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 1072,66 Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,2^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0148 \frac{200}{0,2^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 13947,17 Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

Para este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$Q_{13} = 10,89 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{23} = -3,47 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{34} = 7,41 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{45} = 7,38 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{46} = 0,0305 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{76} = 0,0250 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{68} = 0,0555 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{89} = 0,0926 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{810} = -0,0371 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = -55,37 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = -37,52 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 2,16 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 29,19 \text{ m}.$$

Véase que, de nuevo, se tienen ciertos caudales y presiones negativos, lo cual invalida este resultado. No obstante, se ha de denotar que las presiones en los puntos 3 y 4 son negativas y también lo es el caudal 2-3, con lo que cabe pensar que alguna modificación de diámetros alrededor de los puntos 3 y 4 es necesaria. Cabe, asimismo destacar que los caudales son muy grandes. Si se disminuye el diámetro de los conductos 1-3, 3-4 y 4-5 a 0,6 m, 0,9 m y 0,6 m, respectivamente, se observa que tanto las presiones en los puntos 3 y 4 como el caudal en el tramo 2-3 pasan a ser positivos. Por otro lado, y puesto que el caudal en el tramo 8-10 es asimismo negativo, se concluye que se deberá reducir el diámetro del conducto 8-9 hasta un valor de 0,12 m.

La resolución del sistema de ecuaciones con estos nuevos valores da lugar a

$$Q_{13} = 4,551 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{23} = 2,348 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{34} = 6,900 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{45} = 6,836 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0639 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{76} = 0,0054 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{68} = 0,0693 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0294 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{810} = 0,0399 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 1,83 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 18,63 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 57,26 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 32,17 \text{ m},$$

Véase que algunos de los caudales son enormes. Recuérdese, además, que las bombas B1 y B2 han sido modificadas. Las velocidades de circulación para cada tramo serán

$$V_{13} = 16,09 \text{ m/s}, V_{23} = 11,95 \text{ m/s}, V_{34} = 10,84 \text{ m/s}, V_{45} = 24,17 \text{ m/s}, V_{46} = 1,30 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 0,68 \text{ m/s}, V_{68} = 0,98 \text{ m/s}, V_{89} = 2,59 \text{ m/s}, V_{810} = 1,27 \text{ m/s}.$$

Si, para estos caudales acabados de hallar, se quisiese determinar el diámetro de conducto para que la velocidad de circulación sea de 1 m/s, se obtendría:



Caudal (m <sup>3</sup> /s)	Q <sub>13</sub> = 4,55	Q <sub>23</sub> = 2,34	Q <sub>34</sub> = 6,90	Q <sub>45</sub> = 6,83	Q <sub>46</sub> = 0,0639	Q <sub>76</sub> = 0,0054	Q <sub>68</sub> = 0,0693	Q <sub>89</sub> = 0,0294	Q <sub>810</sub> = 0,0399
Diámetro (m)	2,4	1,72	2,96	2,95	0,28	0,08	0,29	0,19	0,225
Diámetro normalizado (m)	2,4	1,7	3	3	0,25	0,1	0,3	0,2	0,2

Se observa que, cada vez las velocidades van aumentando. Los diámetros de los conductos, especialmente los que unen los depósitos 1, 2 y 5 también aumentan. Ello da lugar a diámetros muy grandes, especialmente para las bombas de que se dispone. Recuerdese, por otro lado, que las características de las bombas han sido modificadas y, según el enunciado del problema, esto no estaba permitido. Así pues, esta manera de proceder no parece acertada. Se observa, por otro lado, que existe una cierta independencia entre los flujos que circulan por los conductos que unen los tres depósitos de la izquierda y los conductos situados en la parte derecha del punto 6. De hecho, para estos últimos se observa ya una cierta estabilidad.

2B. A partir de este punto, y con el fin de obtener resultados que estén en concordancia con las directrices del problema, se procederá a modificar los diámetros de los conductos mediante el sistema de prueba-error. Se partirá de los datos obtenidos en el primer apartado.

Se empezará, reduciendo, de manera considerable, el diámetro de los conductos 1-3, 2-3, 3-4, 4-5 y 5-6, respecto a los dados en el apartado 1 del problema, y manteniendo constante o disminuyendo ligeramente el diámetro del resto de los conductos. Estos primeros valores se han deducido mediante el sistema de prueba y error. Se partirá, asimismo, de los factores de fricción hallados en el apartado 1 de este problema, es decir

$$f_{13} = 0,01295; f_{23} = 0,01375; f_{34} = 0,0117; f_{45} = 0,0125; f_{46} = 0,01445; f_{76} = 0,0177;$$

$$f_{68} = 0,01385; f_{89} = 0,0167; f_{810} = 0,015.$$

Los diámetros elegidos son

$$D_{13} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{23} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{34} = 0,02 \text{ m}; \quad D_{45} = 0,01 \text{ m};$$

$$D_{46} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{76} = 0,1 \text{ m}; \quad D_{68} = 0,08 \text{ m}; \quad D_{89} = 0,07 \text{ m};$$

$$D_{810} = 0,07 \text{ m}.$$

El sistema de ecuaciones que se genera con estos datos es



$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01295 \frac{200}{0,015^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 283736873,5 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,01375 \frac{250}{0,015^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 376046662,5 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,0117 \frac{50}{0,02^5} \frac{8 Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 15120642,12 Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2 0,01^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0125 \frac{200}{0,01^5} \frac{8 Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 2059508998 Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,01445 \frac{300}{0,015^5} \frac{8 Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 472168655,2 Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0177 \frac{70}{0,1^5} \frac{8 Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 93048,03 Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,01385 \frac{200}{0,08^5} \frac{8 Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 100034,83 Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2 0,07^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0167 \frac{300}{0,07^5} \frac{8 Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 243109,03 Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,07^4 9,8} + \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,015 \frac{200}{0,07^5} \frac{8 Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 157425,99 Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

La resolución de este sistema de ecuaciones da lugar a

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0006 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s},$$



$$Q_{46} = 0,0004 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0174 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0178 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0065 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{810} = 0,0113 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 26,87 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 41,62 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 11,80 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 30,17 \text{ m}.$$

Las velocidades de circulación para cada tramo serán

$$V_{13} = 1,69 \text{ m/s}, \quad V_{23} = 1,13 \text{ m/s}, \quad V_{34} = 1,9 \text{ m/s}, \quad V_{45} = 2,54 \text{ m/s}, \quad V_{46} = 2,26 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 2,21 \text{ m/s}, \quad V_{68} = 3,54 \text{ m/s}, \quad V_{89} = 1,68 \text{ m/s}, \quad V_{810} = 2,93 \text{ m/s}.$$

Obsérvese que varios de los conductos ya tienen velocidades por debajo de los 2 m/s, aunque otros están aún por encima de este nivel. Los valores del número de Reynolds y del factor de fricción para cada conducto serán de:

$$R_{13} = 25364,08; \quad R_{23} = 16909,39; \quad R_{34} = 38046,12; \quad R_{45} = 25364,08; \quad R_{46} = 33818,78;$$

$$R_{76} = 220667,54; \quad R_{68} = 282175,45; \quad R_{89} = 117761,82; \quad R_{810} = 204724,405.$$

$$f_{13} = 0,0245; \quad f_{23} = 0,0276; \quad f_{34} = 0,022; \quad f_{45} = 0,0245; \quad f_{46} = 0,023; \quad f_{76} = 0,0156;$$

$$f_{68} = 0,0147; \quad f_{89} = 0,018; \quad f_{810} = 0,0158.$$

Estos factores de fricción son los que se van a utilizar para la siguiente iteración. Se va a proceder a modificar algunos diámetros mediante el sistema de prueba y error, con el fin de conseguir que las velocidades de circulación sean en, todos los conductos, menores a 2 m/s. Puesto que las velocidades de circulación de los conductos 7-6 y 6-8 son demasiado grandes, se procederá a aumentar estos diámetros. La velocidad en el tramo 8-10 es también grande. En este caso, lo que se va a hacer es aumentar el diámetro del conducto 8-9, dado que está en paralelo con el 8-10. Se disminuirá asimismo el diámetro del tramo 8-10. Se eligen los siguientes diámetros:

$$D_{13} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{23} = 0,015 \text{ m}; \quad D_{34} = 0,02 \text{ m}; \quad D_{45} = 0,01 \text{ m}; \quad D_{46} = 0,015 \text{ m};$$

$$D_{76} = 0,14 \text{ m}; \quad D_{68} = 0,12 \text{ m}; \quad D_{89} = 0,09 \text{ m}; \quad D_{810} = 0,05 \text{ m}.$$

El sistema de ecuaciones para este caso queda del modo siguiente:

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0245 \frac{200}{0,015^5} \frac{8 Q_{13}^2}{\pi^2} - 60 = \frac{P_3}{\rho g} - 60 + 535342316,1 Q_{13}^2$$

$$0 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2 0,015^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0276 \frac{250}{0,015^5} \frac{8 Q_{23}^2}{\pi^2} - 50 = \frac{P_3}{\rho g} - 50 + 753182526,1 Q_{23}^2$$

$$0 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,022 \frac{50}{0,02^5} \frac{8Q_{34}^2}{\pi^2} - 20 = -\frac{P_3}{\rho g} + \frac{P_4}{\rho g} - 20 + 28431976,63Q_{34}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{8Q_{45}^2}{\pi^2 0,01^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0245 \frac{200}{0,01^5} \frac{8Q_{45}^2}{\pi^2} - 45 = -\frac{P_4}{\rho g} - 45 + 4044577912Q_{45}^2$$

$$0 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} + \frac{1}{9,8} 0,023 \frac{300}{0,015^5} \frac{8Q_{46}^2}{\pi^2} - 40 = -\frac{P_4}{\rho g} + \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 751548724,5Q_{46}^2$$

$$0 = \frac{P_6}{\rho g} + 81973 Q_{76}^2 + \frac{8Q_{76}^2}{\pi^2 0,14^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0156 \frac{70}{0,14^5} \frac{8Q_{76}^2}{\pi^2} - 40 = \frac{P_6}{\rho g} - 40 + 83867,67Q_{76}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} + 30116 Q_{68}^2 + \frac{1}{9,8} 0,0147 \frac{200}{0,12^5} \frac{8Q_{68}^2}{\pi^2} - 50,037 = \\ &= -\frac{P_6}{\rho g} + \frac{P_8}{\rho g} - 50,037 + 39888,49Q_{68}^2 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 - \frac{8Q_{89}^2}{\pi^2 0,1^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,018 \frac{300}{0,1^5} \frac{8Q_{89}^2}{\pi^2} = -\frac{P_8}{\rho g} + 20 + 43836,93Q_{89}^2$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 - \frac{8Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{8Q_{810}^2}{\pi^2 0,05^4 9,8} + \frac{1}{9,8} 0,0158 \frac{200}{0,05^5} \frac{8Q_{810}^2}{\pi^2} = \\ &= -\frac{P_8}{\rho g} + 10 + 836375,7Q_{810}^2 \end{aligned}$$

$$Q_{13} + Q_{23} = Q_{34}$$

$$Q_{45} + Q_{46} = Q_{34}$$

$$Q_{46} + Q_{76} = Q_{68}$$

$$Q_{810} + Q_{89} = Q_{68}$$

de donde se obtienen unos caudales y velocidades de circulación de

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{34} = 0,0005 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{45} = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{76} = 0,0215 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{68} = 0,0218 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{89} = 0,0167 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{810} = 0,0052 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 22,24 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 36,28 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 1,17 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 32,19 \text{ m}.$$



$$V_{13} = 1,69 \text{ m/s}, V_{23} = 1,13 \text{ m/s}, V_{34} = 1,59 \text{ m/s}, V_{45} = 1,27 \text{ m/s}, V_{46} = 1,69 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,39 \text{ m/s}, V_{68} = 1,92 \text{ m/s}, V_{89} = 2,12 \text{ m/s}, V_{810} = 2,64 \text{ m/s}.$$

Obsérvese que ahora en casi todos los conductos se tiene una velocidad de circulación menor o igual a 2 m/s, con lo que esta solución ya se podría considerar válida. Si así lo hacemos, será ahora únicamente necesario calcular los nuevos factores de fricción con los últimos datos obtenidos, manteniendo los últimos diámetros utilizados. Los nuevos números de Reynolds y factores de fricción para cada tramo serán

$$R_{13} = 25364,08; R_{23} = 16909,39; R_{34} = 31705,1; R_{45} = 12682,04; R_{46} = 25364,08;$$

$$R_{76} = 194759,94; R_{68} = 230390,44; R_{89} = 211790,11; R_{810} = 131893,24.$$

$$f_{13} = 0,0245; f_{23} = 0,0276; f_{34} = 0,0234; f_{45} = 0,03; f_{46} = 0,0245; f_{76} = 0,0158;$$

$$f_{68} = 0,0153; f_{89} = 0,0157; f_{810} = 0,017.$$

Sustituyendo los valores del factor de fricción en el sistema de ecuaciones precedente y resolviéndolo, se obtiene

$$Q_{13} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{23} = 0,0002 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{34} = 0,0004 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{45} = 0,0001 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{46} = 0,0003 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{76} = 0,0217 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{68} = 0,022 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$Q_{89} = 0,0171 \text{ m}^3/\text{s}, Q_{810} = 0,0049 \text{ m}^3/\text{s},$$

$$\frac{P_3}{\rho g} = 24,45 \text{ m}, \quad \frac{P_4}{\rho g} = 38,54 \text{ m}, \quad \frac{P_6}{\rho g} = 0,613 \text{ m}, \quad \frac{P_8}{\rho g} = 31,18 \text{ m}.$$

Las velocidades de circulación, los números de Reynolds y los factores de fricción con estos nuevos datos son

$$V_{13} = 1,69 \text{ m/s}, V_{23} = 1,13 \text{ m/s}, V_{34} = 1,27 \text{ m/s}, V_{45} = 1,27 \text{ m/s}, V_{46} = 1,69 \text{ m/s},$$

$$V_{76} = 1,40 \text{ m/s}, V_{68} = 1,94 \text{ m/s}, V_{89} = 2,17 \text{ m/s}, V_{810} = 2,49 \text{ m/s}.$$

$$R_{13} = 25364,08; R_{23} = 16909,39; R_{34} = 25364,08; R_{45} = 12682,04; R_{46} = 25364,08;$$

$$R_{76} = 196571,66; R_{68} = 232504,11; R_{89} = 216862,93; R_{810} = 124284,01.$$

$$f_{13} = 0,0245; f_{23} = 0,0276; f_{34} = 0,0247; f_{45} = 0,03; f_{46} = 0,0245; f_{76} = 0,0158;$$

$$f_{68} = 0,0153; f_{89} = 0,0157; f_{810} = 0,0169.$$

Obsérvese que los factores de fricción son prácticamente los mismos que los obtenidos en el apartado anterior, exceptuando, tal vez, el de la tubería 3-4, factor que en realidad ha variado debido a la poca precisión con la que se está calculando este caudal, más que por una variación real del mismo. Así pues, se puede concluir que los últimos caudales, las presiones en los nudos, las velocidades de circulación y los factores de fricción hallados son los definitivos.

Es necesario remarcar que, con el fin de alcanzar los objetivos establecidos en el enunciado del problema, se han tenido que reducir muchísimo los diámetros de los conductos situados a la izquierda del punto 6. El flujo en estos conductos es debido a la acción gravitatoria y, ya se observó en el apartado 2A, que en dichos conductos, el aumento del diámetro daba lugar a velocidades mayores a las requeridas. No obstante, los diámetros obtenidos para estos conductos, en el presente apartado, son demasiado pequeños y sería poco apropiado utilizarlos en realidad. Lo lógico sería utilizar diámetros mayores y regular el caudal circulante en cada tramo, mediante válvulas de regulación situadas en el extremo inferior de cada tramo. Es también relevante comentar que las bombas proporcionadas en el enunciado dan una altura de elevación pequeña, con lo que la utilización de bombas que proporcionasen mayor altura de elevación, daría lugar a poder trabajar con mayores caudales y, consecuentemente, con mayores diámetros, incluso para los conductos situados a la izquierda del punto 6.

Cabe señalar que existen programas de simulación capaces de resolver este problema, aunque la base matemática de resolución es la misma que la que aquí se ha detallado, es decir, es necesario resolver el sistema de ecuaciones que se genera. En el presente problema, se ha resuelto el sistema de ecuaciones mediante MATLAB.





## Capa límite, flujo externo, flujo potencial

### 11.1 Capa límite

#### 11.1.1 Introducción

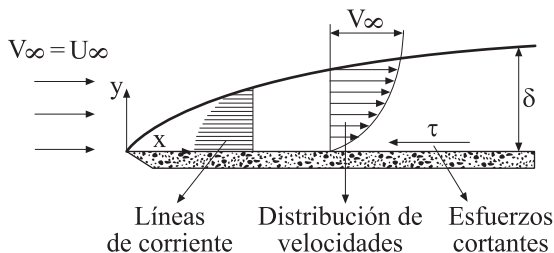
La capa límite es una región de pequeño espesor, generalmente denominado  $\delta$  y gran longitud  $X$ , que se sitúa alrededor de cualquier cuerpo aerodinámico o en el interior de los conductos. Dicha capa se puede encontrar adherida al cuerpo o separada de él, siendo los fenómenos de transporte molecular y convectivos de gran importancia en la capa límite. En función del número de Reynolds, la capa límite se define como laminar o turbulenta, entre ambas aparece una zona de transición donde las fuerzas de inercia y viscosas son de un mismo orden de magnitud. En la zona turbulenta de la capa límite, aparece una subcapa laminar.

Características generales de la capa límite:

- La capa límite es muy delgada, siempre se cumple que su espesor  $\delta$  es mucho menor que la longitud respecto al inicio de la placa ( $x$ ),  $\delta \ll x$ .
- Su espesor, aumenta corriente abajo, aunque siempre se cumple que  $\delta \ll x$ .
- El perfil de velocidades de la capa límite, cumple la condición de no deslizamiento en la pared.
- Se considerarán los esfuerzos cortantes sobre la superficie de la pared.
- Las líneas de corriente del flujo en el interior de la capa límite, se pueden considerar aproximadamente paralelas a la superficie de la placa, es decir, la componente de la velocidad paralela a la superficie de la placa, es siempre mucho mayor que la componente normal a la superficie. El borde exterior de la capa límite, no es una línea de corriente.



Fig. T 11.1  
Evolución de la  
capa límite

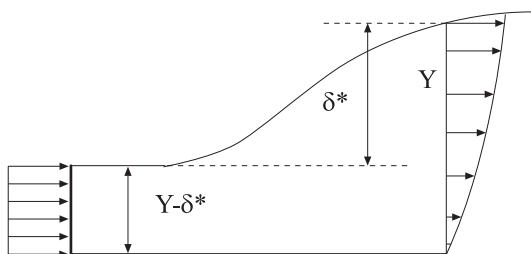


### 11.1.2 Efectos de la capa límite sobre el flujo, concepto de espesor de desplazamiento de la capa límite

Entre los efectos que la capa límite causa sobre el flujo de fluido, cabe destacar la deflexión de las líneas de corriente. Asimismo, el caudal másico en la zona donde existe la capa límite disminuye, puesto que la velocidad del fluido en dicha zona es menor que la que existe fuera de la capa límite.

Para cuantificar estos dos efectos, se introduce el concepto de espesor de desplazamiento, que es la distancia que las líneas de corriente del flujo exterior se desplazan debido a la existencia de la capa límite.

Fig. T 11.2  
Concepto de  
espesor redespla-  
zamiento de la capa  
límite



Haciendo un balance de masa entre el flujo no perturbado y el flujo en el interior de la capa límite, se obtiene:

$$\int_0^y \rho u \, dy = \int_0^{y-\delta^*} \rho V_\infty \, dy$$

$$\int_0^y u \, dy = V_\infty (y - \delta^*)$$

$$\delta^* = y - \int_0^y \frac{u}{V_\infty} \, dy = \int_0^y dy - \int_0^y \frac{u}{V_\infty} \, dy = \int_0^y \left( 1 - \frac{u}{V_\infty} \right) dy$$

Puesto que  $u = V_\infty$  para  $y \geq \delta$ , se tiene:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{V_\infty} \right) dy$$





ecuación que caracteriza el espesor de desplazamiento de la capa límite en función de la distribución de velocidades en una sección dada.

### 11.1.3 Concepto de espesor de cantidad de movimiento para la capa límite

Sea el volumen de control definido en la figura siguiente.

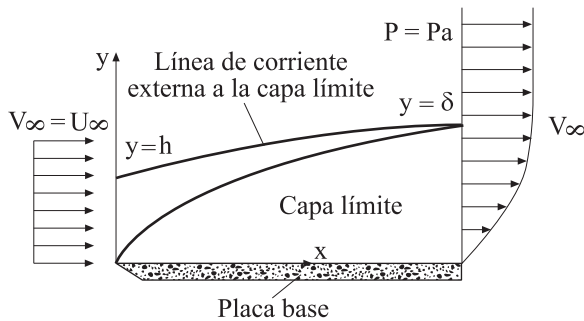


Fig. T 11.3  
Volumen de control  
para la obtención  
del espesor de la  
cantidad de  
movimiento para la  
capa límite

La determinación de la fuerza de arrastre que el fluido ejerce sobre la placa se obtiene aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control definido en dicha figura, de donde asumiendo una profundidad de la placa unitaria, se obtiene:

$$-D = \sum F_x = \int \rho u_{(0,y)} \vec{v} \, d\vec{s} + \int \rho u_{(L,y)} \vec{v} \, d\vec{s} = -\int_0^h \rho V_\infty^2 \, dy + \int_0^\delta \rho u_{(L,y)} u_{(L,y)} \, dy$$

$$D = \rho V_\infty^2 h - \rho \int_0^\delta u^2 \Big|_{x=L} \, dy$$

Obsérvese que el valor de  $h$  en realidad no es conocido, con lo que se debe determinar.

Por otro lado, aplicando al volumen de control de la figura T 11.3, la ecuación de continuidad, se obtiene:

$$0 = -\int_0^h \rho V_\infty \, dy + \int_0^\delta \rho u \Big|_{x=L} \, dy$$

$$V_\infty h = \int_0^\delta u \Big|_{x=L} \, dy$$

Sustituyendo el valor de la altura  $h$  en la ecuación de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$D = \rho V_\infty \int_0^\delta u \Big|_{x=L} \, dy - \rho \int_0^\delta u^2 \Big|_{x=L} \, dy = \rho \int_0^\delta u(V_\infty - u) \Big|_{x=L} \, dy$$

Este resultado fue obtenido por Von Karman en 1921.



Esta ecuación también se puede presentar como:

$$D = V_{\infty}^2 \rho \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}}\right) dy = \rho V_{\infty}^2 \theta$$

ecuación que relaciona la fuerza de arrastre en la placa con el espesor de cantidad de movimiento  $\theta$ . Recuérdese que la ecuación indica la fuerza de arrastre por unidad de profundidad de la placa.

El espesor de cantidad de movimiento se define por la ecuación  $\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}}\right) dy$  y es una medida de la resistencia total de la placa.

Sería interesante, en este punto, determinar la relación entre los esfuerzos cortantes actuantes sobre la superficie de la placa y el espesor de cantidad de movimiento. Para ello, cabe recordar que la fuerza de arrastre por unidad de profundidad actuante sobre la placa se puede dar en función de los esfuerzos cortantes mediante la relación:

$$D = \int_0^x \tau_w dx$$

Diferenciando esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{dD}{dx} = \tau_w$$

Por otro lado, la diferenciación de la ecuación que relaciona la fuerza de arrastre con el espesor de cantidad de movimiento da lugar a:

$$\frac{dD}{dx} = \rho V_{\infty}^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\tau_w = \rho V_{\infty}^2 \frac{d\theta}{dx}$$

ecuación que relaciona los esfuerzos cortantes en la placa con el espesor de cantidad de movimiento. Esta ecuación es válida para cualquier tipo de flujo, laminar o turbulento.

#### 11.1.4 Ecuación diferencial de Prandtl para el análisis de la capa límite

Dicha ecuación, ha de permitir, una vez integrada, determinar la distribución de velocidades a través de la capa límite laminar, y se obtendrá de aplicar las ecuaciones de conservación de la masa y de cantidad de movimiento lineal a un volumen de control situado por completo en el interior de la capa límite laminar.



Sea el volumen de control representado en la figura siguiente.

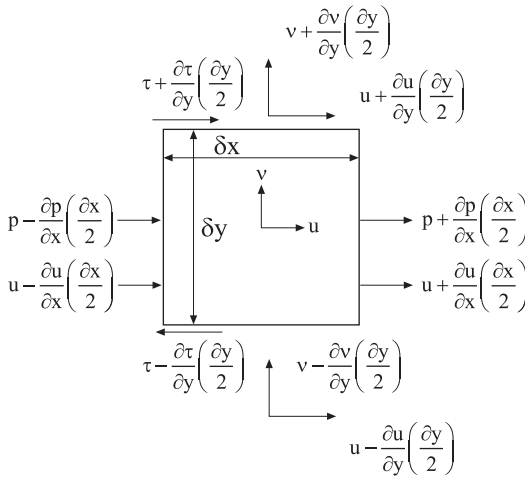


Fig. T 11.4  
Elemento diferencial de fluido situado en el interior de la capa límite

Obsérvese que, en las superficies del volumen de control, se han representado los esfuerzos de presión y esfuerzos cortantes, así como las velocidades actuantes en cada una de las caras. Véase el carácter bidimensional del volumen de control elegido. A la hora de aplicar las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento al volumen de control, se establecen las siguientes hipótesis:

- La densidad del fluido es constante.
- La presión se considera constante en dirección perpendicular a la capa límite,  $\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0$
- La presión es una función conocida de  $x$  y está relacionada con la velocidad no perturbada fuera de la capa límite mediante la ecuación de Bernoulli.
- La velocidad del fluido, cambia con mucha más rapidez en dirección perpendicular a la capa límite que a lo largo de la misma, lo cual se puede expresar matemáticamente:  $\frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$

La ecuación de continuidad para un flujo incompresible bidimensional y bidireccional se expresa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

De la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control definido en la figura precedente, se observa que los términos de flujo de la ecuación de cantidad de movimiento en dirección  $x$  son:



$$\begin{aligned}\delta\dot{M}_{x \text{ saliente}} - \delta\dot{M}_{x \text{ entrante}} &= \delta\dot{M}_{x \text{ derecho}} + \delta\dot{M}_{x \text{ arriba}} - \delta\dot{M}_{x \text{ izquierdo}} - \delta\dot{M}_{x \text{ abajo}} \\ &= \left[ \rho \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) \right) \cdot \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) \right) \delta_y \cdot \delta_z \right] + \left[ \rho \left( u + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\delta_y}{2} \right) \right) \cdot \left( v + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\delta_y}{2} \right) \right) \delta_x \cdot \delta_z \right] \\ &\quad - \left[ \rho \left( u - \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) \right) \cdot \left( u - \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) \right) \delta_y \cdot \delta_z \right] - \left[ \rho \left( u - \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\delta_y}{2} \right) \right) \cdot \left( v - \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\delta_y}{2} \right) \right) \delta_x \cdot \delta_z \right]\end{aligned}$$

Reordenando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta\dot{M}_{x \text{ saliente}} - \delta\dot{M}_{x \text{ entrante}} &= \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho u \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z \\ &\quad + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z + \rho u \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \delta x \delta z\end{aligned}$$

Agrupando, se llega a:

$$\delta\dot{M}_{x \text{ saliente}} - \delta\dot{M}_{x \text{ entrante}} = \rho \left[ u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \delta_x \delta_y \delta_z$$

Recordando la ecuación de continuidad para flujo bidimensional e incompresible, la ecuación anterior se reduce a:

$$\delta\dot{M}_{x \text{ saliente}} - \delta\dot{M}_{x \text{ entrante}} = \rho \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] \delta_x \delta_y \cdot \delta_z$$

La fuerza neta en dirección x debida a los gradientes de presión y a los esfuerzos cortantes actuantes sobre las superficies del volumen de control establece:

$$\begin{aligned}\delta F_x &= \delta F_{p, \text{izquierda}} - \delta F_{p, \text{derecha}} + \delta F_{\tau, \text{arriba}} - \delta F_{\tau, \text{abajo}} \\ \delta F_x &= \left[ P - \frac{dP}{dx} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) \right] \delta_y \cdot \delta_z - \left[ P + \frac{dP}{dx} \left( \frac{\delta_x}{2} \right) \right] \delta_y \cdot \delta_z + \left[ \tau + \frac{d\tau}{dy} \left( \frac{\delta_y}{2} \right) \right] \delta_x \cdot \delta_z \\ &\quad - \left[ \tau - \frac{d\tau}{dy} \left( \frac{\delta_y}{2} \right) \right] \delta_x \cdot \delta_z\end{aligned}$$

Simplificando, queda:

$$\delta F_x = \left( -\frac{dP}{dx} + \frac{d\tau}{dy} \right) \delta_x \cdot \delta_y \cdot \delta_z$$

Uniendo los términos de flujo de cantidad de movimiento con los de las fuerzas debidas a la presión y a los esfuerzos cortantes se obtiene:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}$$



Esta ecuación se denomina *ecuación diferencial de Prandtl para la capa límite* y es aplicable tanto a flujo laminar como turbulento; únicamente dependerá de cómo se hallen los esfuerzos cortantes  $\tau$ . Para un fluido Newtoniano en régimen laminar, en flujo unidireccional y con viscosidad constante, sería:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Con lo que la ecuación de Prandtl toma la forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{dP}{dx} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Esta ecuación, junto con la de continuidad, forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas  $u$  y  $v$ , que se denominan *ecuaciones de Prandtl de la capa límite*.

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre dos puntos situados en el borde exterior de la capa límite, puede escribirse:

$$P + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} = \text{cte}; \quad V_{\infty} = \text{velocidad en el exterior de la capa límite}$$

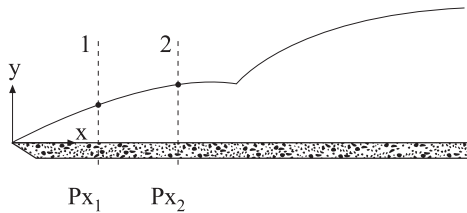


Fig. T 11.5  
Balance de energía  
entre dos puntos  
situados en el  
borde la capa límite

Diferenciando la ecuación precedente para  $\rho = \text{cte}$ , se obtiene:  $-\frac{1}{\rho} \left( \frac{dP}{dx} \right) = V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right)$

Sustituyendo esta ecuación en la de cantidad de movimiento, se elimina el término de presión en dicha ecuación y se obtiene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

La integración de esta ecuación diferencial dará lugar a la distribución de velocidades en el interior de la capa límite y para flujo laminar. Las condiciones de contorno necesarias para la integración de esta ecuación son:

- En la pared,  $y = 0$ ;  $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$
- En el borde exterior,  $u = V_{\infty}$ ;  $y = \delta$ ; pero  $\delta$  es desconocida, con lo cual  $u \rightarrow V_{\infty} \equiv y \rightarrow \infty$



$\delta$  se define como el valor de  $y$  para el cual  $u$  es  $0,99 V_\infty$ .

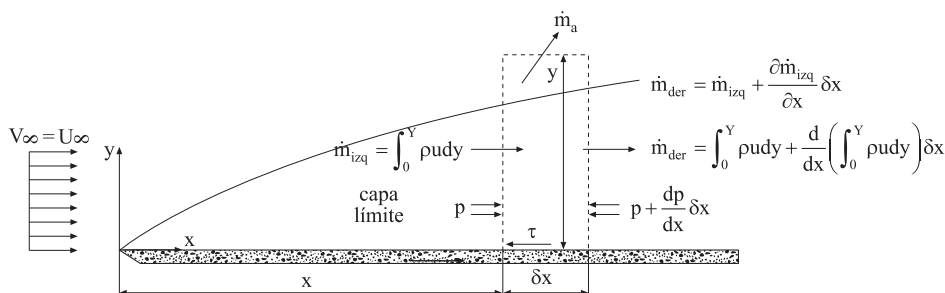
La ecuación diferencial de Prandtl fue integrada por Blasius, que obtuvo lo que se denomina la distribución exacta de velocidades para la zona laminar de la capa límite.

### 11.1.5 Ecuación integral de cantidad de movimiento para la capa límite. Ecuación de Von Karman

En la mayoría de los casos de ingeniería, no es necesario conocer la distribución de velocidades  $u$  y  $v$  en función de  $x$  e  $y$ , distribución que se obtiene de integrar la ecuación de Prandtl. Lo que realmente se requiere son los valores del espesor de la capa límite, el espesor de desplazamiento  $\delta^*$ , los coeficientes de fricción y arrastre  $C_f$ ,  $C_D$ , etc. Para determinar estos parámetros, será necesario desarrollar una ecuación integral que se denominará, ecuación de Von Karman.

Sea el volumen de control que se muestra en la figura siguiente. Obsérvese que dicho volumen de control atraviesa la frontera de la capa límite. En cada una de las caras verticales del volumen de control, se considerará una distribución de velocidades no uniforme, mientras que la presión sí que se va a considerar uniforme en dirección  $y$ .

Fig. T 11.6  
Volumen de control  
utilizado para la  
determinación de la  
ecuación integral de  
cantidad de  
movimiento



Aplicando la ecuación de continuidad al volumen de control acabado de definir, se tiene:

$$\dot{m}_{\text{izquierda}} = \dot{m}_{\text{derecha}} + \dot{m}_{\text{arriba}}$$

$$\text{de donde: } \dot{m}_{\text{izquierda}} = \int_0^y \rho u \, dy \Big|_x; \quad \dot{m}_{\text{derecha}} = \dot{m}_{x+\delta x} = \int_0^y \rho u \, dy \Big|_{x+\delta x} + \frac{d}{dx} \left( \int_0^y \rho u \, dy \right) \delta x$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación precedente, se obtiene que, para que se cumpla continuidad, se ha de cumplir:

$$\dot{m}_{\text{arriba}} = - \frac{d}{dx} \left( \int_0^y \rho u \, dy \right) \delta x$$

Aplicando para este mismo volumen de control la ecuación de cantidad de movimiento se tiene:



$$\dot{M}_{x,derecha} + \dot{M}_{x,arriba} - \dot{M}_{x,izquierda} = F_{x,presión} + F_{x,esfuerzo\text{ cor tan te}}$$

donde:

$$\dot{M}_{x,izquierda} = \int_0^y \rho u v_r dA = \int_0^y \rho u^2 dy \Big|_x$$

$$\dot{M}_{x,derecha} = \dot{M}_x \Big|_{x+\delta x} = \int_0^y \rho u^2 dy \Big|_{x+\delta x} + \frac{d}{dx} \left( \int_0^y \rho u^2 dy \right) \delta x$$

$$\dot{M}_{x,arriba} = \dot{m}_{arriba} u_{arriba x} = \dot{m}_{arriba} V_{\infty, x}$$

$$\dot{M}_{x,arriba} = -V_{\infty, x} \frac{d}{dx} \left( \int_0^y \rho u dy \right) \delta x ;$$

Las fuerzas debidas a la presión y a los esfuerzos cortantes toman la forma:

$$F_{x,presión} = P \cdot Y - \left( P + \frac{dP}{dx} \delta_x \right) Y = -\frac{dP}{dx} Y \delta x$$

$$F_{x,esfuerzo\text{ cor tan te}} = -\tau_w \delta x$$

Sustituyendo los diversos términos en la ecuación inicial de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \int_0^y \rho u^2 dy - V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^y \rho u dy = -Y \left( \frac{dP}{dx} \right) - \tau_w$$

Teniendo en cuenta que:

$$Y = \int_0^y dy$$

Y recordando que, de la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre dos puntos exteriores a la capa límite se obtuvo:

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{dP}{dx} \right) = V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right)$$

sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la ecuación de cantidad de movimiento, considerando el fluido como incompresible y multiplicando el resultado por -1, se tiene:

$$V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^y u dy + V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) \int_0^y dy - \frac{d}{dx} \int_0^y u^2 dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$



Seguidamente, se procede a diferenciar el siguiente término:

$$\frac{d}{dx} \left( V_{\infty} \int_0^y u dy \right) = \frac{dV_{\infty}}{dx} \left( \int_0^y u dy \right) + V_{\infty} \frac{d}{dx} \int_0^y u dy$$

Observando que el segundo sumando del segundo término de esta ecuación es idéntico al primer sumando de la ecuación precedente, se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left( V_{\infty} \int_0^y u dy \right) - \frac{dV_{\infty}}{dx} \left( \int_0^y u dy \right) + V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) \int_0^y dy - \frac{d}{dx} \int_0^y u^2 dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Agrupando términos:

$$\frac{d}{dx} \int_0^y u(V_{\infty} - u) dy + \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) \int_0^y (V_{\infty} - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Véase que, para  $Y > \delta$ , las integrales se anularían, puesto que  $u = V_{\infty}$ ; así, los límites de integración se pueden establecer:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(V_{\infty} - u) dy + \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) \int_0^{\delta} (V_{\infty} - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Esta es la ecuación integral de cantidad de movimiento ó de Von Karman, aplicable para flujo laminar y turbulento, puesto que no se ha dado ninguna expresión para  $\tau_w$ ;

multiplicando la primera integral por  $\frac{V_{\infty}^2}{V_{\infty}^2}$  y la segunda por  $\frac{V_{\infty}}{V_{\infty}}$  se llega a:

$$\frac{d}{dx} \left[ V_{\infty}^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) dy \right] + V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Multiplicando ahora cada integral por  $\frac{\delta}{\delta}$  (observando que  $\delta$  es independiente de  $y$ ), y

teniendo en cuenta que los límites de integración son: cuando  $y = 0$ ,  $\frac{y}{\delta} = 0$ , y cuando

$y = \delta$ ,  $\frac{y}{\delta} = 1$ , modificando asimismo la variable de integración de  $y$  a  $\frac{y}{\delta}$ , se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \delta \cdot V_{\infty}^2 \left[ \int_0^1 \frac{u}{V_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \right\} + \delta \cdot V_{\infty} \left( \frac{dV_{\infty}}{dx} \right) \int_0^1 \left( 1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Véase que la segunda integral de esta ecuación representa el espesor de desplazamiento  $\delta^*$ , mientras que la primera integral tiene dimensiones de longitud, y se denomina *espesor de cantidad de movimiento*  $\theta$ .





$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}}\right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{V_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{V_{\infty}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

En función de  $\delta^*$  y  $\theta$ , la ecuación integral de cantidad de movimiento de Von Karman se puede escribir:

$$\frac{d}{dx} [V_{\infty}^2 \theta] + \delta^* V_{\infty} \frac{dV_{\infty}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Véase que, para la aplicación de la ecuación de Von Karman a un caso dado, es necesario conocer el perfil de velocidades del fluido en el interior de la capa límite y el valor de los esfuerzos cortantes en la pared. En función del tipo de fluido que caractericen estos datos, se obtendrá una ecuación aplicable a régimen laminar o turbulento.

### 11.1.6 Evaluación de los parámetros de la capa límite para el flujo sobre una placa plana

La capa límite sobre una placa plana es la más simple de calcular, dado que no existe gradiente de velocidad o de presión en la corriente libre (zona exterior a la capa límite).

Sea la placa plana representada en la figura siguiente:

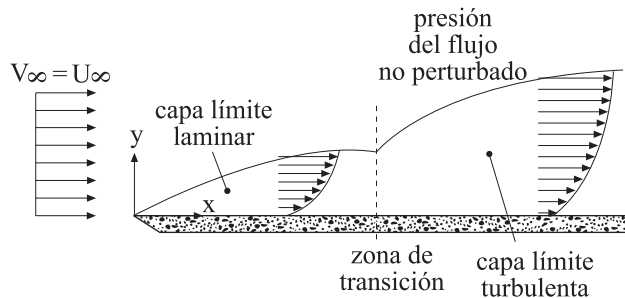


Fig. T 11.7  
Capa límite sobre una placa plana

En un punto alejado de la placa, se cumplirá:  $V_{\infty} = \text{cte}$ ;  $P = P_{\infty} = \text{cte}$

Obsérvese que, dado que tanto la distribución de velocidades como los esfuerzos cortantes se evalúan de manera diferente para diferentes regímenes de flujo, para el cálculo de la capa límite se deberán considerar por separado las zonas laminar y turbulenta.



### 11.1.6.1 Características para la capa límite en la región laminar

Para una velocidad  $V_\infty = \text{constante}$  en la corriente libre, se cumple que  $\frac{dV_\infty}{dx} = 0$ , con lo que la ecuación de Von Karman toma la forma:

$$V_\infty^2 \frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \frac{u}{V_\infty} \left( 1 - \frac{u}{V_\infty} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] = \frac{\tau_w}{\rho}$$

Para flujo laminar, el esfuerzo cortante se define:  $\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$

Puesto que la velocidad no perturbada  $V_\infty$  y el espesor de la capa límite  $\delta$  no dependen de  $y$ , se puede dar:

$$\tau_w = \frac{\mu V_\infty}{\delta} \left( \frac{\partial \left( \frac{u}{V_\infty} \right)}{\partial \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right)_{\frac{y}{\delta}=0}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación resultante de Von Karman para capa límite laminar, se tiene.

$$V_\infty^2 \frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \frac{u}{V_\infty} \left( 1 - \frac{u}{V_\infty} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] = \frac{\mu V_\infty}{\rho \delta} \left( \frac{\partial \left( \frac{u}{V_\infty} \right)}{\partial \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right)_{\frac{y}{\delta}=0}$$

Con el fin de resolver esta ecuación, es necesario conocer la relación entre  $\frac{u}{V_\infty}$  y  $\frac{y}{\delta}$ .

Una primera aproximación podría hallarse suponiendo un perfil de velocidades parabólico. Así, recordando la expresión de la distribución de velocidades parabólica para un conducto circular:

$$u = u_{\text{máx}} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) ; \quad \frac{u}{u_{\text{máx}}} = 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2$$

Para el caso en estudio, la velocidad máxima sería la velocidad no perturbada,  $u_{\text{máx}} = V_\infty$ ; por otro lado, se puede establecer que el radio del conducto se aproximará ahora a  $R = r + y$ , de donde:

$$\frac{u}{V_\infty} = 1 - \left( \frac{R-y}{R} \right)^2 = 1 - \left( 1 - \frac{y}{R} \right)^2$$

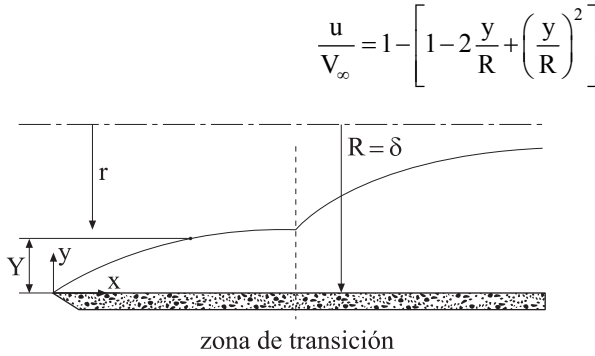


Fig. T 11.8  
Capa límite en el  
interior de un  
conducto

Asumiendo ahora que el radio pudiese darse como el espesor de la capa límite  $R = \delta$ , y denominando  $\eta = \frac{y}{\delta}$ ; se obtiene:

$$\frac{u}{V_{\infty}} \cong 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2$$

Obsérvese que: cuando  $y = 0$ ,  $u = 0$ , y cuando  $y = \delta$ ,  $u = V_{\infty}$ .

Derivando la ecuación anterior y aplicándola para el caso en que  $\eta = \frac{y}{\delta} = 0$ , se obtiene:

$$\left. \frac{\partial \left( \frac{u}{V_{\infty}} \right)}{\partial \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right|_{\frac{y}{\delta}=0} = \left. \frac{d \left( \frac{u}{V_{\infty}} \right)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 2$$

Sustituyendo las relaciones establecidas en la ecuación de Von Karman para el caso en estudio, se tiene:

$$\frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2) (1 - (2\eta - \eta^2)) d\eta \right] = 2 \frac{\mu}{\rho \delta V_{\infty}}$$

Véase que la integral tiene un valor numérico, con lo que, procediendo a la integración, se obtiene:

$$\frac{2}{15} \left( \frac{d\delta}{dx} \right) = 2 \frac{\mu}{\rho \delta V_{\infty}}$$

Integrando esta ecuación resultante, se tiene:



$$\int_0^{\delta} \delta d\delta = \int_0^x 15 \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} dx$$

$$\frac{\delta^2}{2} = 15 \frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}; \quad \delta = 5,48 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}}; \quad \text{o bien: } \frac{\delta}{x} = 5,48 \sqrt{\frac{\mu}{\rho V_{\infty} x^2}} = 5,48 \frac{1}{\sqrt{R_{ex}}}$$

ecuación que determina el espesor de la capa límite laminar en función de la distancia al origen de coordenadas (inicio de la placa).

El esfuerzo cortante actuante sobre la placa plana se calcula mediante la ecuación:

$$\tau_w = \frac{\mu V_{\infty}}{\delta} \left( \frac{\partial \left( \frac{u}{V_{\infty}} \right)}{\partial \left( \frac{y}{\delta} \right)} \right)_{\frac{y}{\delta}=0} = \frac{2\mu V_{\infty}}{\delta} = \frac{2\mu V_{\infty}}{5,48 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}}}$$

Obsérvese que el esfuerzo cortante es función de la distancia al origen de la placa, que es máximo al inicio de la misma y va disminuyendo a medida que aumenta la distancia con respecto al origen.

La determinación del coeficiente de fricción para la zona laminar de la capa límite se realiza:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V_{\infty}^2} = \frac{2 \frac{2\mu V_{\infty}}{5,48 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_{\infty}}}}}{\rho V_{\infty}^2} = 0,730 \sqrt{\frac{\mu}{\rho V_{\infty} x}} = \frac{0,730}{\sqrt{R_{ex}}}$$

Los espesores de desplazamiento y de cantidad de movimiento se determinarán:

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left( 1 - \frac{u}{U} \right) d\left( \frac{y}{\delta} \right) \cong \delta \int_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2) d\eta \quad ; \quad \delta^* = \delta \frac{1}{3} \quad ;$$

$$\theta = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left( 1 - \frac{u}{U} \right) d\left( \frac{y}{\delta} \right) \cong \delta \int_0^1 (2\eta - \eta^2)(1 - 2\eta + \eta^2) d\eta; \quad \theta = \delta \frac{1}{7,5};$$

Sustituyendo el valor del espesor de la capa límite, se obtiene:

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,83}{\sqrt{R_{ex}}} \quad ; \quad \frac{\theta}{x} = \frac{0,73}{\sqrt{R_{ex}}};$$

La resistencia que una placa plana de longitud L y de ancho unitario ejerce sobre el fluido, viene dada por:

$$D = \int_0^L \tau_w dx$$



El grupo adimensional, coeficiente de arrastre, para una placa de longitud  $L$  y profundidad unitaria, se define como:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 L} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} dx = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx ; \text{ obsérvese la relación entre el coeficiente}$$

de arrastre y el coeficiente de fricción.

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{0,730}{\sqrt{\frac{\rho V_\infty x}{\mu}}} dx = \frac{0,730}{\sqrt{\frac{\rho V_\infty}{\mu}}} \frac{1}{L} \frac{L^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1,460}{\sqrt{\frac{\rho V_\infty L}{\mu}}} = \frac{1,460}{\sqrt{R_{eL}}}$$

Véase que el coeficiente de arrastre, según las hipótesis establecidas, es igual a dos veces el coeficiente de fricción, definido para el número de Reynolds al final de la placa  $x = L$ , es decir:  $C_D = 2C_{f(L)}$ .

$$\text{Cabe recordar que } R_{ex} = \frac{\rho V_\infty x}{\mu}; \quad R_{eL} = \frac{\rho V_\infty L}{\mu}$$

Debe tenerse en cuenta que la exactitud de estas ecuaciones depende del acierto que se haya tenido en la elección de la distribución de velocidades en el interior de la capa límite laminar. Recuérdese que se ha partido de la suposición de una distribución parabólica de velocidades.

Blasius integra la ecuación diferencial de Prandtl y encuentra la distribución denominada “exacta” de velocidades en la región laminar de la capa límite. Dicha distribución de velocidades dada en forma de gráfica es: Recuérdese que desde el punto de vista

$$\text{dimensional: } \frac{y}{\sqrt{\frac{\mu x}{\rho V_\infty}}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}} = \frac{y}{\delta}$$

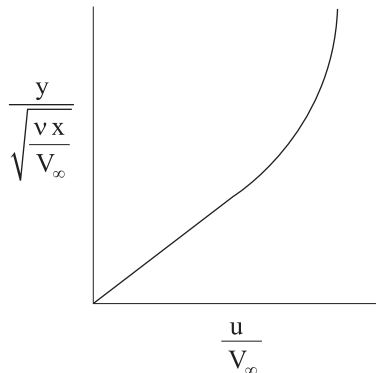


Fig. T 11.9  
Distribución de  
velocidades de  
Blasius



Véase que la relación que representa esta gráfica es del tipo:  $\frac{u}{V_\infty} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$

Sustituyendo la distribución de Blasius en la ecuación de Von Karman, y operando del mismo modo que para la distribución de velocidades parabólica, se obtienen los parámetros denominados “exactos” de la capa límite, que son:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho V_\infty}}$$

$$C_f = \frac{0,664}{\sqrt{R_{ex}}}$$

$$\delta^* = 1,721 \sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho V_\infty}}$$

$$\theta = 0,664 \sqrt{\frac{\mu \cdot x}{\rho V_\infty}}$$

$$C_D = \frac{1,328}{\sqrt{R_{eL}}} \quad ; \text{ véase que, de nuevo, } C_D = 2C_{f(L)}$$

En la tabla que se encuentra a continuación, se indica el valor de las constantes asociadas a las ecuaciones de los parámetros básicos de la capa límite, y para diferentes distribuciones de velocidades en la capa límite laminar. Es necesario destacar que, además de las distribuciones presentadas, existen otras que son igualmente aceptadas. Así, se debe concluir que existe todo un colectivo de posibles soluciones para la zona laminar de la capa límite, lo cual indica que no se tiene un conocimiento exacto y preciso del comportamiento de la misma.

	$\frac{\delta}{x} \sqrt{R_x} =$	$C_f \sqrt{R_x} =$	$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{R_x} =$	$C_D \sqrt{R_L} =$	$\frac{\theta}{x} \sqrt{R_x} =$
Perfil lineal $\frac{u}{U} \approx \frac{y}{\delta}$	3,46	0,578	1,73	1,156	0,578
Perfil parabólico $\frac{u}{U} \approx 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5,48	0,730	1,83	1,460	0,730
Solución exacta, Blasius.	5,0	0,664	1,721	1,328	0,664



### 11.1.6.2 Capa límite turbulenta

En el capítulo de análisis adimensional, se ha observado que un flujo se considera turbulento cuando las fuerzas de inercia asociadas al fluido son mayores que las fuerzas viscosas. Una de las características del flujo turbulento es su capacidad para intercambiar cantidad de movimiento entre partículas, lo cual dificulta mucho el análisis del movimiento de una partícula específica. Sin embargo, utilizando el concepto de velocidad media, es más fácil determinar la trayectoria principal del fluido.

La capa límite laminar, al evolucionar a lo largo de la placa plana, da lugar a una zona de transición, donde existe una cierta inestabilidad de fuerzas, y es a partir de este punto donde se inicia el proceso hacia la capa límite turbulenta. Se denomina  $X_{Tr}$  a la distancia entre el origen de la placa y el inicio de la zona turbulenta. Para una placa plana lisa, el número de Reynolds de transición se toma  $R_{Tr} = \frac{V_{\infty} X_{Tr}}{\nu} = 5 \cdot 10^5$ , siempre que la placa sea perfectamente plana y sin rugosidad. Para casos más reales se aceptan valores menores, del orden de  $R_{Tr} = 3 \cdot 10^5$ .

La ecuación de Von Karman para régimen turbulento no tiene solución exacta. Esto es debido a que no se conoce una expresión ampliamente aceptada para el esfuerzo cortante en régimen turbulento. De hecho, la ecuación de partida para la determinación de los parámetros característicos de la capa límite turbulenta en una placa plana es idéntica a la utilizada en régimen laminar.

$$\frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \frac{u}{V_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{V_{\infty}} \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] = \frac{\tau_w}{\rho V_{\infty}^2}$$

El perfil de velocidades es muy diferente para la capa límite laminar o turbulenta. Para la zona turbulenta, uno de los perfiles más utilizados es el de la ley de potencia sugerido por Prandtl:

$$\frac{u}{V_{\infty}} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} = \eta^{\frac{1}{n}} \quad ; \text{ en general, se acepta que } n = 7.$$

En régimen turbulento, el esfuerzo cortante en la pared se puede definir por la ecuación:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'}$$

Se observa que es necesario utilizar algún modelo de turbulencia

para determinar el término de esfuerzos aparentes de Reynolds. En consecuencia es muy común dar una ecuación empírica para hallar  $\tau_w$ . Utilizando, por ejemplo, la ecuación de Colebrook para régimen turbulento en tuberías, se puede decir que



$\tau_w = \frac{f}{8} \rho V^2$ . Se acepta que, para  $R_{eD} > 10^5$ , el factor de fricción es  $f = 0,3164 R_{eD}^{-\frac{1}{4}}$ ,

donde  $R_{eD} = \frac{\rho V D}{\mu}$ .

En general, se acepta la aproximación  $D = 2\delta$ ;  $V = \frac{2n^2 V_\infty}{(n+1)(2n+1)}$ ;  $n = 7$ ;

$$V = 0,816 V_\infty$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de los esfuerzos cortantes, se obtiene una ecuación aproximada para los esfuerzos cortantes turbulentos en la región turbulenta de la capa límite:

$$\tau_w = 0,02266 \cdot \rho \cdot V_\infty^{\frac{7}{4}} \left( \frac{\mu}{\rho \delta} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Sustituyendo las ecuaciones del esfuerzo cortante y de la distribución de velocidades en la ecuación de Von Karman, se llega a:

$$\frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}} \left( 1 - \eta^{\frac{1}{7}} \right) d\eta \right] = 0,02266 \left( \frac{\mu}{\rho V_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \delta^{-\frac{1}{4}}$$

cuya integración da lugar a:

$$\delta^{\frac{1}{4}} \left( \frac{d\delta}{dx} \right) = 0,233 \left( \frac{\mu}{\rho V_\infty} \right)^{\frac{1}{4}}$$

A la hora de realizar la integración de esta ecuación resultante, se va a suponer que en toda la placa el flujo es turbulento, con lo que se obtiene:

$$\int_0^\delta \delta^{\frac{1}{4}} d\delta = \int_0^x 0,233 \left( \frac{\mu}{\rho V_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} dx$$

$$\frac{4}{5} \delta^{\frac{5}{4}} = 0,233 \left( \frac{\mu}{\rho V_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} x$$

Despejando el espesor de la capa límite turbulenta:

$$\delta = 0,372 \left( \frac{\mu}{\rho V_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}}$$





ecuación que, al ser dividida por  $x$ , da lugar a:

$$\frac{\delta}{x} = 0,372 R_x^{-\left(\frac{1}{5}\right)}$$

Si se comparan las ecuaciones para la capa límite laminar y turbulenta, se observa que la capa límite turbulenta crece con mayor velocidad, dado que su espesor es función de la distancia al origen elevada a  $(4/5)$ , mientras que en la capa límite laminar el espesor es función de dicha distancia elevada a  $(1/2)$ .

Para la determinación del coeficiente de fricción en régimen turbulento, se sustituyen las ecuaciones ya determinadas, de los esfuerzos cortantes y del espesor de la capa límite para dicho régimen, en la ecuación del coeficiente de fricción, y se obtiene:

$$C_{f\text{Tur}} = \frac{2\tau_w}{\rho V_\infty^2} = 0,05803 \left( \frac{\mu}{\rho V_\infty x} \right)^{\frac{1}{5}} = 0,05803 R_{ex}^{-\frac{1}{5}}$$

La determinación del espesor de desplazamiento se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left( 1 - \frac{u}{V_\infty} \right) d\left( \frac{y}{\delta} \right) = \delta \int_0^1 \left( 1 - \eta^{\frac{1}{7}} \right) d\eta = 0,125 * \delta$$

$$\frac{\delta^*}{x} = 0,125 \left( \frac{\delta}{x} \right) = 0,0465 R_x^{-\frac{1}{5}}$$

Con el fin de evaluar la precisión de los resultados obtenidos mediante estas ecuaciones, se concluye que la precisión en concreto para la ecuación del coeficiente de fricción es de un  $\pm 3 \%$  para valores del número de Reynolds comprendidos entre  $5.10^5 < Re < 10^7$ . Esta información fue obtenida tras comparar los valores de la ecuación con resultados experimentales.

El espesor de la cantidad de movimiento se determinará:

$$\theta^* = \delta \int_0^1 \frac{u}{V_\infty} \left( 1 - \frac{u}{V_\infty} \right) d\left( \frac{y}{\delta} \right) = \delta \int_0^1 \eta^{\frac{1}{7}} \left( 1 - \eta^{\frac{1}{7}} \right) d\eta = \delta 0,0972$$

$$\frac{\theta^*}{x} = \frac{\delta}{x} 0,0972 = 0,036158 R_x^{-\left(\frac{1}{5}\right)}$$

El coeficiente de resistencia  $C_D$  para una placa plana y flujo turbulento en toda su longitud puede obtenerse:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx$$



Sustituyendo, en la ecuación anterior, la ecuación del coeficiente de fricción se llega:

$$C_D = 0,07253 R_L^{-\frac{1}{5}}, \text{ coeficiente de resistencia para la zona turbulenta.}$$

Hay que tener presente, no obstante, que, en la mayoría de los casos, existe una zona inicial de la placa donde la capa límite es laminar y una segunda región donde dicha capa límite es turbulenta, con lo cual el coeficiente de arrastre para este caso genérico ha de tener en cuenta estas dos regiones. Dicho coeficiente se define como:

$$C_D = \frac{1}{L} \left( \int_0^{X_{tr}} C_{f \text{ Lam}} dx + \int_{X_{tr}}^L C_{f \text{ Turb}} dx \right)$$

Sustituyendo las ecuaciones del coeficiente de fricción para las regiones laminar y turbulenta en la ecuación anterior del coeficiente de arrastre, y recordando que el punto de transición para una placa ideal se, ha definido anteriormente como

$$\frac{\rho V_\infty X_{Tr}}{\mu} = 5 \cdot 10^5, \text{ se obtiene:}$$

$$C_D = 0,07253 R_L^{-\frac{1}{5}} - \frac{1689,64}{R_L}$$

ecuación que proporciona un resultado suficientemente satisfactorio, cuando en una placa existen una región laminar y una turbulenta apreciables. Cabe recordar que, para la obtención de esta ecuación, se ha utilizado el coeficiente de fricción obtenido según la distribución de velocidades de Blasius para la zona laminar.

De nuevo, al igual que sucedía, aunque en menor medida, para la capa límite laminar, es importante remarcar que no existe un conocimiento absoluto de la distribución de velocidades dentro de la región turbulenta de la capa límite, y no existe ninguna teoría que proporcione la distribución de velocidades exacta, con lo cual existen diversas distribuciones que son, en mayor o menor medida, aceptadas.

Una de dichas distribuciones es la que caracteriza un perfil logarítmico de velocidad, ampliamente aceptado para la capa límite en el interior de conductos y definido por la ecuación siguiente:

$$\frac{u}{u_t} = \frac{1}{0,41} \ln \left( \frac{\rho y u_t}{\mu} \right) + 5$$

siendo  $u_t$  la denominada velocidad de fricción.

La relación entre la velocidad de fricción y los esfuerzos cortantes se define:

$$u_t = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{C_f V_\infty^2}{2}}$$



Aceptando que  $u = V_\infty$ , cuando  $y = \delta$ , la combinación de las dos ecuaciones anteriores da lugar a:

$$\left(\frac{C_f}{2}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2,439 \left[ \ln \left( R_{e\delta} \left(\frac{C_f}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right) \right] + 5, \text{ donde } R_{e\delta} = \frac{\rho \delta V_\infty}{\mu}$$

ecuación que relaciona el coeficiente de fricción  $C_f$  con  $R_{e\delta}$ . Esta última ecuación se estima que es demasiado complicada, con lo que Prandtl sugirió utilizar una ecuación de tipo potencial, cuyo resultado es muy similar al obtenido con la ecuación precedente. La ecuación potencial de Prandtl toma la forma:

$$C_f = 0,02 R_{e\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)}$$

Recordando la ecuación que relacionaba los esfuerzos cortantes con el espesor de cantidad de movimiento para cualquier tipo de flujo, tanto laminar como turbulento:

$$\tau_w = \rho V_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

Y, puesto que el coeficiente de fricción se define como  $C_f = \frac{2 \tau_w}{\rho V_\infty^2}$ ,

de la combinación de estas dos ecuaciones se obtiene:  $C_f = 2 \frac{d\theta}{dx}$

Sustituyendo en esta ecuación el valor del coeficiente de fricción definido por Prandtl, se obtiene:

$$0,02 R_{e\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = 2 \frac{d\theta}{dx}$$

Prandtl, asimismo sugiere que el perfil de velocidades que aparece en la zona turbulenta de la capa límite, para números de Reynolds bajos, dentro de la región turbulenta, se puede aproximar por la ley de potencia:

$$\left(\frac{u}{V_\infty}\right) \approx \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = \eta^{\frac{1}{7}}$$

con lo que el espesor de cantidad de movimiento se puede determinar:

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \delta \left( \left(\eta^{\frac{1}{7}}\right) \left(1 - \eta^{\frac{1}{7}}\right) \right) d\eta = \frac{7}{72} \delta$$



y se obtiene:

$$0,02 R_{\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = 2 \frac{d}{dx} \left( \frac{7}{72} \delta \right)$$

ecuación que, desarrollada, se puede dar como:

$$R_{\delta}^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = \left( \frac{\rho V_{\infty} \delta}{\mu} \right)^{-\left(\frac{1}{6}\right)} = 9,722 \frac{d}{dx} (\delta)$$

Y, procediendo a su integración se tiene:

$$\int_0^x \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{6}} dx = \int_0^{\delta} 9,72 \delta^{\frac{1}{6}} d\delta$$

Obsérvese que de nuevo se supone que existe capa límite turbulenta en toda la placa.

$$\left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{6}} x = \frac{9,72 \delta^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}}$$

Despejando de esta ecuación el espesor de la capa límite, se tiene:

$$\delta = \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{7}} x^{\frac{6}{7}} 0,16248, \text{ y, dividiendo ambos términos por } x, \text{ se llega:}$$

$$\frac{\delta}{x} = \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty} x} \right)^{\frac{1}{7}} 0,16248 = \frac{0,16248}{R_{ex}^{\frac{1}{7}}}$$

Obsérvese que el espesor de la capa límite turbulenta aumenta en función de la distancia elevada a 6/7, con lo que de nuevo se observa que la zona turbulenta de la capa límite aumenta mucho más rápidamente que su homóloga laminar.

El espesor de desplazamiento se obtendrá:

$$\delta^* = \int_0^1 \delta \left( 1 - \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right) d\left( \frac{y}{\delta} \right) = \int_0^1 \delta \left( 1 - \eta^{\frac{1}{7}} \right) d\eta = 0,125 \delta$$

La ecuación que caracteriza los esfuerzos cortantes en la zona turbulenta se define como:



$$\begin{aligned}\tau_{w \text{ turbu}} &= \rho V_{\infty}^2 \frac{d\theta}{dx} = \rho V_{\infty}^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{7}{72} \delta \right) = \rho V_{\infty}^2 \frac{7}{72} \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{7}} 0,16248 x^{\frac{6}{7}} \right] = \\ &\quad \rho V_{\infty}^2 \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{7}} 0,01354 x^{\left( \frac{-1}{7} \right)} \\ \tau_{w \text{ turbu}} &= \rho V_{\infty}^2 \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty} x} \right)^{\frac{1}{7}} 0,01354\end{aligned}$$

El coeficiente de fricción vendrá dado por:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = \frac{0,01354}{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty} x} \right)^{\frac{1}{7}} = 0,02708 \frac{1}{(R_{ex})^{\frac{1}{7}}}$$

El coeficiente de arrastre para la zona turbulenta viene dado por:

$$\begin{aligned}C_D &= \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 L} = \int_0^L \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 L} dx = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty} x} \right)^{\frac{1}{7}} 0,02708 dx = \\ &\quad \frac{1}{L} 0,02708 \frac{7}{6} \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty}} \right)^{\frac{1}{7}} (L)^{\frac{6}{7}} \\ C_D &= 0,02708 \frac{7}{6} \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty} L} \right)^{\frac{1}{7}} = \frac{7}{6} C_{f(L)} = \frac{0,03159}{(R_{e(L)})^{\frac{1}{7}}}\end{aligned}$$

Se ha comprobado experimentalmente que estas ecuaciones tienen una precisión de  $\pm 5$  % para valores del número de Reynolds comprendidos entre  $10^5 < R_{ex} < 10^9$ .

El coeficiente de arrastre para el caso de tener una placa plana donde las regiones laminar y turbulenta de la capa límite sean relevantes, y considerando el coeficiente de fricción para la zona laminar como el de Blasius y para la zona turbulenta el acabado de determinar, se obtiene:

$$\begin{aligned}C_D &= \frac{1}{L} \left( \int_0^{x_{tr}} C_{f \text{ Lam}} dx + \int_{x_{tr}}^L C_{f \text{ Turb}} dx \right) = \\ &\quad \frac{1}{L} \left( \int_0^{x_{tr}} \frac{0,664}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho V_{\infty} x}}} dx + \int_{x_{tr}}^L 0,02708 \left( \frac{\mu}{\rho V_{\infty} x} \right)^{\frac{1}{7}} dx \right)\end{aligned}$$



Considerando que  $\frac{\rho V_{\infty} X_{Tr}}{\mu} = 5 \cdot 10^5$ , se llega a:

$$C_D = 0,0315933 R_L^{-\frac{1}{7}} - \frac{1484,37}{R_L}$$

Obsérvese que, en la zona turbulenta de la capa límite, se obtienen ecuaciones bastante diferentes en función de la distribución de velocidades elegida y del procedimiento utilizado para la determinación de los esfuerzos cortantes en la pared.

Es necesario tener presente que en la región turbulenta de la capa límite, en realidad, se pueden distinguir tres regiones:

- a) región interior, es la región en contacto con la pared del sólido, en la cual, los esfuerzos viscosos son dominantes y dan lugar a una subcapa límite laminar.
- b) región intermedia, situada entre la región interior y exterior, donde tanto los esfuerzos viscosos como los de inercia son relevantes.
- c) región exterior, es la región completamente turbulenta de la capa límite, donde las fuerzas de inercia son muy superiores a las viscosas.

La ecuación del perfil logarítmico caracteriza el comportamiento del fluido con bastante exactitud, tanto en la región interior como en la intermedia. Cabe decir, no obstante, que la región interior ocupa menos del 2% del espesor de la capa límite turbulenta, con lo que se concluye que el perfil logarítmico es aplicable a casi todo el espesor de la capa límite turbulenta. La ley logarítmica es especialmente útil para flujos en conductos cerrados.

## 11.2 Flujo externo

### 11.2.1 Introducción

Durante gran parte de los siglos XIX y XX se estudió la posibilidad de evaluar el flujo alrededor de cuerpos utilizando meramente las ecuaciones teóricas. Para números de Reynolds elevados, aparece el concepto de flujo potencial o flujo sin viscosidad, que en realidad implica que, para este tipo de flujo, las fuerzas de inercia asociadas a cada partícula de fluido son mucho mayores que las fuerzas viscosas. Cuando los valores del número de Reynolds asociados al flujo son muy bajos, el flujo se denomina *con viscosidad dominante*. La utilización de túneles de viento y la modelización CFD son herramientas básicas en este capítulo, dado que hasta el momento no se ha conseguido



desarrollar ecuaciones que sean capaces de caracterizar con precisión las fuerzas que el fluido ejerce sobre cuerpos complejos. Las teorías tanto cualitativas como cuantitativas del flujo externo se basan en el concepto de dividir el campo del flujo en las regiones del flujo potencial y de la capa límite.

### 11.2.2 Fuerzas de resistencia y sustentación sobre cuerpos inmersos en un fluido

Las fuerzas de sustentación se dan, en general, cuando el cuerpo en estudio presenta asimetría, ángulo de ataque, ángulo entre el eje del cuerpo y el fluido. La fuerza sobre un cuerpo puede tener tres componentes: resistencia, sustentación y fuerza lateral.

Las fuerzas de presión y las debidas a esfuerzos cortantes sobre la superficie del cuerpo dan lugar a la resistencia y a la sustentación de los cuerpos. Dichas fuerzas son el resultado de integrar las distribuciones de presión y los esfuerzos cortantes a lo largo de todo el cuerpo:  $\vec{F} = -\oint p d\vec{s} + \oint \vec{\tau}_w ds$

En general, la fuerza que el flujo ejerce sobre un cuerpo se descompone en dirección horizontal y vertical, y da lugar a:

$$D = \oint (-p \cos(\theta) + \tau_w \sin(\theta)) ds$$

$$L = \oint (-p \sin(\theta) - \tau_w \cos(\theta)) ds$$

El ángulo  $\theta$  es el formado por el diferencial de superficie y la corriente de fluido o, en su caso, el diferencial de superficie y la dirección de los esfuerzos cortantes.

Las ecuaciones anteriores son útiles para hallar la resistencia y la sustentación de cuerpos, cuando son conocidas las distribuciones de presiones y los esfuerzos cortantes. Pero, en general, las fuerzas y los coeficientes de arrastre y sustentación se determinan experimentalmente. Mediante análisis adimensional, se demuestra que cuando los efectos de la tensión superficial, regulados por el número de Weber, son despreciables, y no se trabaja con superficies libres, caracterizadas por el número de Froude, y además se trabaja con fluido incompresible número de Mach  $< 0,3$ , los coeficientes de resistencia y sustentación dependen únicamente del ángulo de ataque y del número de Reynolds.

$$C_D = C_D(\alpha, Re); \quad C_L = C_L(\alpha, Re);$$

$$\text{Siendo: } C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}; \quad C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S};$$



Donde:

$V_\infty$  = velocidad del fluido relativa al objeto

$S$  = área de referencia o sección proyectada

Las dos áreas de referencia más comunes son el área frontal y el área proyectada. Para cuerpos bidimensionales, el área se basa en un ancho unitario.

En realidad, los coeficientes de resistencia y sustentación,  $C_D$  y  $C_L$ , se relacionan con los coeficientes de fricción y presión, ( $C_f$  y  $C_p$ ), mediante:

$$C_D = \frac{\oint (-P \cos \theta + \tau_w \sin \theta) ds}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S_{\text{proyectada}}} = \oint (-C_p \cos \theta + C_f \sin \theta) d\left(\frac{s}{S_p}\right)$$

$$C_D = \oint (-C_p \cos(\theta) + C_f \sin(\theta)) d\left(\frac{s}{S_p}\right); \quad C_L = \oint (-C_p \sin(\theta) - C_f \cos(\theta)) d\left(\frac{s}{S_p}\right);$$

cabe recordar que los coeficientes de presión y fricción toman la forma:

$$C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}; \quad C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2};$$

Nótese que la resistencia debida a los esfuerzos cortantes depende básicamente de la cantidad de superficie en contacto con el fluido, mientras que la resistencia de forma, que es debida a la distribución de presiones alrededor del objeto, depende básicamente de la forma del cuerpo.

A altos números de Reynolds, parece que a priori, se puedan calcular, para cuerpos simples y simétricos, las fuerzas de arrastre y sustentación; no obstante, según la paradoja de D'Alembert (1752), la suposición de un fluido no viscoso no permite investigar, ni de manera aproximada, la resistencia de forma.

En 1904, L. Prandtl introduce la hipótesis de la capa límite. Dice que la velocidad del fluido debe aumentar desde cero en la superficie hasta un valor que es del orden de magnitud de la velocidad de la corriente libre. Prandtl observa que, para números de Reynolds altos, la capa límite es muy delgada, y llega a la expresión:

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{V_\infty * L}} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$$

Cuanto más delgada es la capa límite, mayor es el valor de  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ; en consecuencia, el

fluido en la capa límite presenta esfuerzos cortantes significativos. Se observa, además que las superficies rugosas dan lugar a un esfuerzo mayor que las lisas.





A bajos números de Reynolds, el concepto de capa límite pierde su validez, puesto que las fuerzas viscosas no están confinadas en una región delgada y cercana al cuerpo; la capa límite es tan gruesa que distorsiona el patrón de líneas de corriente en todo el campo.

En 1851, G. Stokes analiza el flujo sobre una esfera a números de Reynolds muy bajos. Observa que las líneas de corriente son casi simétricas, y solamente tiene una estela delgada (sin separación). Sin embargo, observa que la distribución de presiones es asimétrica. Stokes encuentra que la resistencia a números de Reynolds muy bajos, y para el caso de una esfera, viene dada por  $D = 3\pi\mu dV_\infty$ , ecuación que recibe el nombre de ley de Stokes.

El coeficiente de resistencia para una esfera a  $Re$  muy bajos, según la expresión del coeficiente de arrastre, se establece del modo siguiente:

$$C_D = \frac{3\pi\mu dV_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)} = \frac{24\mu}{\rho V_\infty d} = \frac{24}{Re};$$

De hecho, el coeficiente de resistencia  $C_D$  no es muy adecuado utilizarlo para flujos a bajos números de Reynolds, puesto que la fuerza de arrastre se compara con la fuerza de inercia, y en flujos laminares la inercia no es relevante. Así pues, se define un coeficiente de arrastre en función de la resistencia viscosa.

$$C_D^* = \frac{D}{\mu V_\infty l}; \text{ para la esfera toma el valor } C_D^* = \frac{\text{Fuerza de resistencia}}{\text{Fuerza viscosa}} = \frac{3\pi\mu dV_\infty}{\mu V_\infty l} = 3\pi$$

Se observa que el coeficiente de resistencia viscosa para cualquier cuerpo en un flujo con un número de Reynolds muy bajo es una constante. y solo depende de la forma del cuerpo.

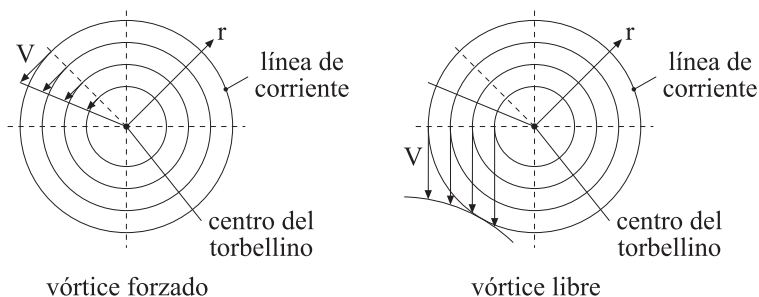
Es necesario tener presente que las medidas que se toman para reducir la resistencia en un flujo con altos números de Reynolds son contraproducentes a bajos números de Reynolds; así por ejemplo, el fuselado de un cuerpo implica un aumento de la resistencia a bajos números de Reynolds, puesto que aumenta la superficie en contacto. Para valores del número de Reynolds comprendidos entre  $10 < Re < 1000$ , es difícil analizar la resistencia de manera cualitativa, puesto que, en las regiones situadas alrededor del cuerpo, las fuerzas de inercia y viscosas tienen un mismo orden de magnitud, y existe alternancia de unas y otras.



### 11.2.3 Conceptos de vórtice libre y vórtice forzado

Un vórtice o torbellino es un fluido en movimiento circular que induce flujo en el fluido circundante. Se denomina *vórtice forzado* una línea que induce un flujo en el fluido circundante, que se mueve en círculos concéntricos con respecto al centro del torbellino y en el que la velocidad del fluido aumenta linealmente con el radio. En un torbellino forzado, se cumple:  $V_{\theta} = \omega \cdot r$

Fig. T 11.10  
Esquema de vórtice  
libre y vórtice  
forzado



Un vórtice libre está caracterizado por un fluido que se mueve en círculos concéntricos alrededor del centro del torbellino y en el cual la velocidad disminuye inversamente con el radio. Su ecuación es:  $V_{\theta} \cdot r = \text{cte}$ .

$$V_{\theta} = \frac{\text{cte}}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \text{ donde } \Gamma = \text{cte}.$$

Recuérdese que el concepto de circulación estaba definido por  $\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$

La circulación para un vórtice forzado tomará la forma:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \omega r (r d\theta) = 2\pi \omega r^2$$

La circulación para un vórtice libre es:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} V_{\theta} (r d\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{\text{cte}}{r} r d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r} (r d\theta) = 2\pi \frac{\Gamma}{2\pi} = \Gamma = \text{cte}.$$

Se concluye que la circulación es constante para cualquier trayectoria que encierre un torbellino libre.

### 11.2.4 El teorema de Kutta-Joukowski (válido para flujo subsónico)

Desarrollado por W. M. Kutta (1902) y N. E. Joukowski (1906), muestra la fuerte relación entre un patrón de flujo de circulación y la sustentación.



La figura siguiente ilustra un perfil aerodinámico inmerso en una corriente de fluido. La velocidad del fluido y la presión lejos del perfil son  $V_\infty$  y  $P_\infty$ . Se supone fluido sin viscosidad e irrotacional (es una buena suposición fuera de la capa límite y estela corriente abajo), se define un sistema de coordenadas y un volumen de control. Obsérvese que el perfil está excluido del volumen de control.

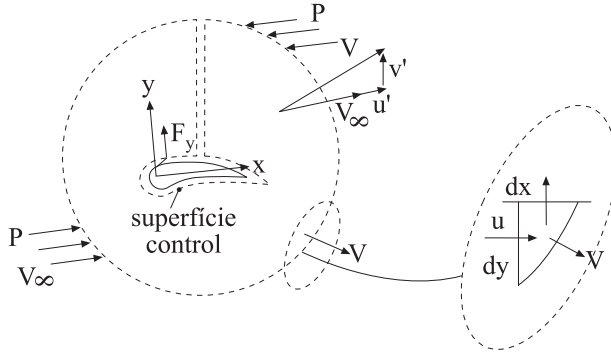


Fig. T 11.11  
Volumen de control  
donde se aplica el  
teorema de Kutta-  
Joukowski

La fuerza que el perfil ejerce sobre el fluido en la porción interna de la superficie de control es la reacción a la fuerza de sustentación:  $L = -F_y$

A través de la frontera interna del volumen de control no fluye fluido, ya que es adyacente al perfil. Las componentes de la velocidad del fluido en la frontera exterior del volumen de control se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} u &= V_\infty + u' \\ v &= v' \end{aligned}$$

$u'$  y  $v'$  son las fluctuaciones de velocidad respecto a los valores medios de  $V_x$  y  $V_y$ . En la frontera exterior de la superficie de control lejos del perfil,  $u'$  y  $v'$  son muy pequeñas en comparación con  $V_\infty$ .

$$\frac{u'}{V_\infty} \ll 1; \quad \frac{v'}{V_\infty} \ll 1;$$

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control en la dirección Y para una profundidad unitaria, se obtiene la fuerza  $F_y$  por unidad de profundidad.

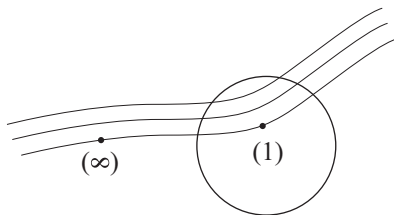
$$F_y + \oint_{\text{frontera exterior}} p \cdot dx = \oint_{\text{frontera exterior}} \rho \cdot \bar{v}_y \cdot \bar{v} \cdot d\bar{s}$$

$d\bar{s}$  es el diferencial de superficie para una profundidad unitaria.

Para flujo ideal e irrotacional, la integral de presión se evalúa partiendo de la ecuación de Bernoulli.



Fig. T 11.12



$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 + \rho g z_{\infty}$$

$$p = p_{\infty} + \rho g(z_{\infty} - z) + \frac{1}{2}\rho(V_{\infty}^2 - V^2)$$

Por otro lado:

$$V^2 = u^2 + v^2 = (V_{\infty} + u')^2 + v'^2 = V_{\infty}^2 + 2u'V_{\infty} + u'^2 + v'^2 =$$

$$V_{\infty}^2 \left[ 1 + 2\left(\frac{u'}{V_{\infty}}\right) + \left(\frac{u'}{V_{\infty}}\right)^2 + \left(\frac{v'}{V_{\infty}}\right)^2 \right]$$

Puesto que  $\frac{u'}{V_{\infty}} \ll 1$ ;  $\frac{v'}{V_{\infty}} \ll 1$ , queda:

$$V^2 = V_{\infty}^2 \left[ 1 + 2\left(\frac{u'}{V_{\infty}}\right) \right]; \quad V^2 = V_{\infty}^2 + 2V_{\infty} \cdot u';$$

$$V_{\infty}^2 - V^2 = -2V_{\infty} \cdot u';$$

Puesto que  $p = p_{\infty} + \rho g(z_{\infty} - z) + \frac{1}{2}\rho(V_{\infty}^2 - V^2)$ .

Y, considerando que  $z \approx z_{\infty}$ , se tiene que  $p_{\infty} - p = -\frac{1}{2}\rho(V_{\infty}^2 - V^2) = \rho V_{\infty} u'$

con lo que  $\oint p \cdot dx = -\oint \rho V_{\infty} u' \cdot dx$ .

La integral del flujo de cantidad de movimiento por unidad de área es:

$$\dot{M}_y = \oint \rho v_y \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint \rho v_y (u dy - v dx).$$

Sustituyendo  $u = V_{\infty} + u'$ ;  $v = v'$ ;

$$\dot{M}_y = \oint \rho v' ((V_{\infty} + u') dy - v' dx) = \oint \rho v' V_{\infty} dy + \oint \rho v' u' dy - \oint \rho v'^2 dx$$

Como las dos últimas integrales son muy pequeñas, comparadas con la primera, se puede establecer:

$$\dot{M}_y = \oint \rho v' V_{\infty} dy$$

Sustituyendo las integrales de flujo y cantidad de movimiento por unidad de área y de presión en la ecuación de fuerza por unidad de profundidad:

$$F_y = \oint \rho V_{\infty} \cdot u' dx \cdot (l) + \oint \rho \cdot v' V_{\infty} dy$$



$$F_y = \rho V_\infty \oint (u' dx + v' dy)$$

Como  $V_\infty$  es constante,  $\oint V_\infty dx = 0$  (la circulación del vector velocidad a lo largo de una línea cerrada es cero, puesto que la velocidad es constante, y el flujo es irrotacional).

Teniendo en cuenta lo que se acaba de decir con respecto a la circulación, la ecuación de la fuerza se puede dar:

$$F_y = \rho V_\infty \oint (V_\infty + u') dx + v' dy = \rho V_\infty \oint (u dx + v dy)$$

El vector de longitud de la trayectoria es:  $\vec{ds} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

por lo que  $\vec{V} \vec{ds} = (u\hat{i} + v\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j}) = u dx + v dy$

$$\text{Así } F_y = \rho V_\infty \oint \vec{V} \vec{ds} = -L;$$

La integral es la circulación  $\Gamma$ , de donde queda

$L = -\rho V_\infty \Gamma$ , esta ecuación recibe el nombre de *Teorema de Kutta-Joukowski*.

Dicho teorema demuestra que añadir un vórtice libre al patrón de flujo de un perfil no solo es una manera de aproximarse al flujo real, sino que es absolutamente necesario introducir circulación para producir sustentación.

El teorema demuestra, asimismo, que el análisis del volumen de control no puede resolver completamente un problema de flujo externo. Para hallar la sustentación, se debe conocer la circulación y, para determinar esta, se debe tener información sobre el campo de velocidades “cerca” del perfil. Solo el análisis diferencial puede aportar el nivel necesario de detalle sobre dicho campo de velocidades.

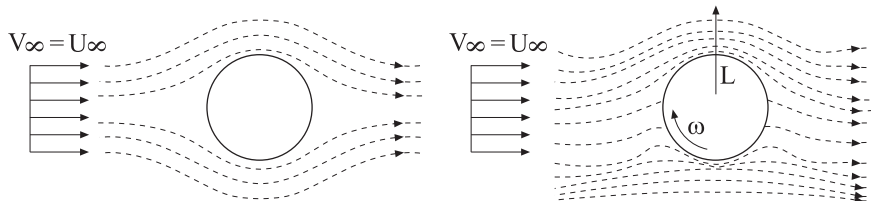
### 11.2.5 Efecto Magnus

El teorema de Kutta-Joukowski demuestra que todo cuerpo que de lugar a una circulación en una corriente de fluido experimenta una sustentación. El perfil que genera la circulación, experimenta una velocidad del fluido mayor en su lado superior que en su lado inferior.



Sea un cilindro circular inmerso en un fluido. Si el flujo alrededor del cilindro es simétrico, no existe circulación. Si el cilindro se hace girar con una velocidad angular  $\omega$  en sentido de las manecillas del reloj, el fluido en la parte superior del cilindro aumenta su velocidad, mientras que en la parte inferior la aminora, lo cual da lugar a que las líneas de corriente alrededor del cilindro no sean simétricas. El efecto se desvanece a medida que nos alejamos del cilindro. Este tipo de flujo tiene circulación y, por tanto, sustentación.

Fig. T 11.13  
Líneas de corriente  
alrededor de un  
cilindro estático y  
otro giratorio



El flujo sobre el cilindro giratorio se modeliza suponiendo un vórtice libre en el sentido de las manecillas del reloj.

La circulación del vórtice que se requiere en la superficie del cilindro queda definida por:

$$\Gamma = \oint \vec{V} d\vec{l} = - \int_0^{2\pi} UR \cdot d\theta = -2\pi UR = -2\pi\omega R^2$$

El signo  $-$  indica que el cilindro gira en sentido de las manecillas del reloj.

Al aplicar el teorema de Kutta-Joukowski se tiene:

$$L = -\rho V_\infty \Gamma(l) = 2\pi\rho UV_\infty R. \text{ Recuérdese que el cilindro tiene una longitud unitaria.}$$

El coeficiente de sustentación teórico valdrá:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{2\pi\rho UV_\infty R(l)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{2\pi\rho UV_\infty R(l)}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 2R(l)} = \frac{2\pi U}{V_\infty}$$

El modelo desarrollado, que determina el coeficiente de sustentación, no es capaz de predecir la resistencia.

En la figura T 11.14, se exponen los valores de los coeficientes de arrastre y sustentación para cilindros, hallados experimentalmente, entre los que se ha incluido el coeficiente de sustentación, hallado teóricamente. Obsérvese la diferencia entre los valores real y teórico.

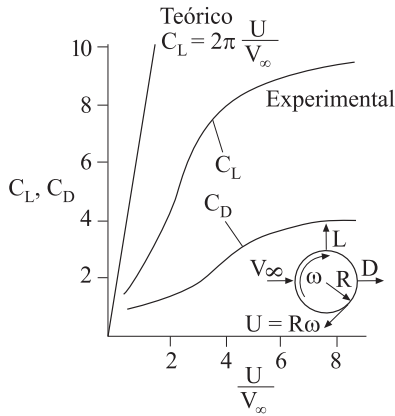


Fig. T 11.14  
Coeficientes de  
arrastre y sustentación  
para un cilindro

Experimentalmente, se ha comprobado que hacer más rugosa la superficie del cilindro produce una mayor sustentación, ya que una superficie rugosa causa una circulación más efectiva.

## 11.3 Introducción al Flujo Potencial

### 11.3.1 Ecuaciones de Euler y Bernoulli

En el estudio de movimientos bidimensionales o tridimensionales de un fluido ideal, como puede ser el estudio del flujo alrededor de un álabe, fuera de la zona de la capa límite, la condición de idealidad del fluido, es decir, fluido sin viscosidad, lleva asociada la condición de irrotacionalidad del mismo, con lo que el vector velocidad en un punto genérico se puede dar en función de la función potencial, simplificando de este modo el cálculo del campo de velocidades.

Las ecuaciones que caracterizan el movimiento de un fluido cuando los efectos viscosos son despreciables son, la de continuidad y la de Euler, y para coordenadas cartesianas, se enuncian:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g_z$$



Utilizando el concepto de presión reducida, la ecuación de Euler queda:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v \nabla w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial z}$$

De la ecuación de Euler, se extrae que, en ausencia de viscosidad, una partícula de fluido que tenga inicialmente una velocidad angular cero mantiene tal condición.

En capítulos anteriores, se ha visto que, cuando los esfuerzos viscosos son depreciables y el flujo es incompresible, el fluido se caracteriza por un movimiento irrotacional  $\nabla \wedge \vec{V} = 0$ ; existe, por tanto, un potencial de velocidades  $\phi$  tal que  $\vec{V} = \nabla \phi$ , ecuación que también se puede expresar como:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

La rotación del fluido se cuantifica por la vorticidad:  $\xi = \text{rot} \vec{V} = \nabla \wedge \vec{V}$

La ecuaciones de Navier-Stokes en notación vectorial, fluido incompresible, toma la forma:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}$$

Tomando el operador rotacional de la ecuación de Navier-Stokes, se obtiene la ecuación de transporte de la vorticidad:

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = (\vec{\xi} \nabla) \vec{V} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\xi}$$

Si el flujo carece de viscosidad, queda:

$$\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = (\vec{\xi} \nabla) \vec{V}$$

De esta ecuación, se deduce que, si inicialmente una partícula de fluido tiene  $\vec{\xi} = 0$ , entonces  $\frac{D\vec{\xi}}{Dt} = 0$ , con lo que la partícula de fluido mantiene su vorticidad constante. Si





la viscosidad es nula, un campo de flujo inicialmente irrotacional permanece irrotacional.

Cuando el flujo es irrotacional y estacionario, las ecuaciones diferenciales de Euler se pueden reemplazar por la ecuación algebraica de Bernoulli:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{P^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cte}$$

La ecuación de Bernoulli para flujo potencial y régimen transitorio tomará la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{P^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cte}$$

### 11.3.2 Concepto de potencial de velocidades y función de corriente

Para un flujo tridimensional, el vector velocidad se descompone en tres componentes. Por tanto, se requieren tres ecuaciones para determinar dichas componentes. La utilización de la función potencial simplifica el cálculo del vector velocidad, dado que una única ecuación permitirá determinar dicho vector.

Supóngase que el vector velocidad se puede encontrar a partir de una sola función escalar:

$$\phi(x, y, z) ; \quad \vec{v} = \text{gradiente } \phi = \nabla \phi$$

En términos de componentes:

$$\text{A)} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Matemáticamente, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal función son:

$$\begin{aligned} \text{B)} \quad & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$



Sustituyendo A en B se obtiene;

$$C) \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0;$$

Recuérdese que los componentes de la vorticidad en tres dimensiones se dan:

$$\text{rotr}_x = 2\omega_x = \xi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \text{rotr}_y = 2\omega_y = \xi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\text{rotr}_z = 2\omega_z = \xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones C se concluye que la función potencial  $\phi$  existirá únicamente si el flujo es irrotacional. Cualquier función derivada de una función potencial siempre constituye un flujo irrotacional. El potencial de velocidades para una geometría de flujo particular se determina resolviendo una sola ecuación.

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible, estacionario o no, toma la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

Sustituyendo las ecuaciones A en la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

Ecuación que recibe el nombre de ecuación de Laplace, aplicable a cualquier sistema de coordenadas:  $\nabla^2 \phi = 0$ .

En coordenadas polares y flujo bidimensional, la ecuación de Laplace toma la forma:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

Las componentes de la velocidad serán:  $V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$

Existe, asimismo, una segunda función escalar a partir de la cual se pueden deducir las componentes de la velocidad del fluido. Dicha función recibe el nombre de *función de corriente* o *función de líneas de corriente*  $\psi$ .

Las componentes de la velocidad se pueden dar como  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$



de donde la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas y flujo bidimensional se puede dar como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

ecuación que recibe el nombre de ecuación de Laplace para  $\psi$ .

Se demuestra que:

Las líneas de  $\psi = \text{cte.}$  son tangentes al vector velocidad y son las líneas de corriente.

La ecuación de continuidad es la condición necesaria y suficiente para que  $\psi$  exista.

Los campos de velocidad deducidos a partir de  $\psi$  satisfacen automáticamente la ecuación de continuidad.

Para que exista  $\psi$ , no es necesario que el flujo sea irrotacional.

En coordenadas polares, la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} = 0$$

Definiendo:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

se obtiene:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0$$

Ecuación que recibe el nombre de ecuación de Laplace para  $\psi$ , en coordenadas polares.

Considérese la variación de  $\psi$  entre dos líneas de corriente, coordenadas cartesianas:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 d\psi = \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

Recordando la relación entre la función de corriente y las componentes del vector velocidad, se establece:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_1^2 -v dx + \int_1^2 u dy = \int_2^1 v dx + \int_1^2 u dy = \int_1^2 dQ = Q_{1-2};$$



Es decir, se observa que esta integral representa el caudal volumétrico, por unidad de profundidad, entre las dos líneas de corriente.

Para determinar la función de corriente de un flujo particular, se debe resolver la ecuación diferencial gobernante adecuada.

En coordenadas cartesianas, la vorticidad se expresa en función de  $\psi$  según la expresión:

$$\xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -\nabla^2 \psi ;$$

Si el flujo es irrotacional:

$$\xi_z = 0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0; \quad \nabla^2 \psi = 0$$

Esta ecuación es del mismo tipo que la ecuación de Laplace, pero ambas ecuaciones tienen condiciones frontera diferentes.

Las líneas de  $\phi = \text{cte.}$ , líneas equipotenciales, son perpendiculares a las líneas de  $\psi = \text{cte.}$ , líneas de corriente. Esta propiedad se demuestra observando que:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{\phi=\text{cte}} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = -\frac{u}{v}; \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=\text{cte}} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{v}{u}$$

Como las líneas equipotenciales y las de corriente tienen pendientes recíprocas negativas, dichas líneas son perpendiculares entre sí.



## Problema 66

### Enunciado

Si se conoce que la superficie mojada de una embarcación es de  $70 \text{ m}^2$ , su longitud es de  $15 \text{ m}$  y se desplaza a una velocidad de  $20 \text{ Km/h}$ , halle:

1. El espesor de la capa límite a una distancia de  $3 \text{ m}$  de la proa. El valor del coeficiente de resistencia en la zona turbulenta de la placa. ¿Cuál es la fuerza de fricción que se opone al movimiento del barco?

Datos:  $v_{\text{agua}} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ; densidad =  $1.150 \text{ kg/m}^3$

2. Al navegar, el barco se encuentra con una mancha de petróleo. Si se conoce que en aquel instante las velas comunican al barco una fuerza de  $5.000 \text{ N}$  en la dirección del movimiento, determine a qué velocidad se podrá mover dicho velero a través de la mancha. Considere que la superficie mojada no varía y que toda ella está, en todo momento, en contacto con el petróleo.

Datos:  $v_{\text{petróleo}} = 1,076 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ; densidad =  $860 \text{ kg/m}^3$

### Resolución

1. Se asimilará la superficie mojada del barco a una placa plana de longitud  $15 \text{ m}$ . Se halla inicialmente el valor del número de Reynolds a una distancia de  $3 \text{ m}$  de la proa.

$$V = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Re}_{3\text{m}} = \frac{V \cdot X}{\nu} = \frac{5,56 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 3 \text{ m}}{1,3 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} = 1.282.051,3;$$

$$X_{\text{tr}} = \frac{500000 \cdot \nu}{V} = \frac{500000 \cdot 1,3 \cdot 10^{-5}}{5,56} = 1,1691 \text{ m}$$

Como  $\text{Re}_{3\text{m}} > 500.000$  en este punto se tiene capa límite turbulenta, las expresiones para el espesor de la capa límite y el coeficiente de resistencia serán:

$$\delta = 0,37 \cdot \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}}$$

donde  $\delta$  es el espesor de la capa límite a una distancia  $x$  del inicio de la placa, teniendo en cuenta que el valor mínimo que puede tener la “X” es la X de transición,  $X_{\text{tr}}$ .

$$C_D = 0,072 \cdot \text{Re}_L^{-\frac{1}{5}}$$



donde  $C_D$  es el coeficiente de resistencia para la zona turbulenta (y  $Re_L$  es el valor del número de Reynolds en el extremo final de la placa).

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{Re_L}$$

donde  $C_D$  es el coeficiente de resistencia para placa plana con zona turbulenta y zona laminar (función de  $Re_L$ ).

Procediendo al cálculo:

$$Re_L = \frac{V \cdot x}{\nu} = \frac{5,56 \frac{m}{s} \cdot 15 m}{1,3 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}} = 6.410.256,4$$

$$\delta_3 = 0,37 \cdot 1.282.051,3^{\frac{1}{5}} \cdot 3 m = 0,066 m$$

$$C_{D_{Turbulento}} = 0,072 \cdot 6.410.256,4^{\frac{-1}{5}} = 3,133 \times 10^{-3}$$

$$C_{D_{Turbulento + laminar}} = \frac{0,074}{6.410.256,4^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{6.410.256,4} = 2,949 \cdot 10^{-3}$$

La fuerza de fricción total que se opone al movimiento del barco es:

$$F = C_D S \rho \frac{V_{\infty}^2}{2} = 2,949 \cdot 10^{-3} \cdot 70 m^2 \cdot 1.150 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{5,56^2 \frac{m^2}{s^2}}{2} = 3.662,96 N$$

2. El valor del número de Reynolds en el extremo final del barco cuando navega en petróleo con una velocidad  $V$  es:

$$Re_L = \frac{V \frac{m}{s} \cdot 15 m}{1,076 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}} = 13.940,52 V \quad (A)$$

Considerando a priori que a lo largo de la longitud del barco tendremos únicamente capa límite laminar:

$$C_{D_{Laminar}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} = \frac{1,328}{\sqrt{13.940,52 \times V}}$$

Se impone la condición de que la fuerza de fricción que ha de vencer el barco es de 5.000 N:

$$F = C_D \times S \times \rho \times \frac{V_{\infty}^2}{2}$$



$$5.000 \text{ N} = \frac{1,328}{\sqrt{13.940,52 \times V}} 70 \text{ m}^2 860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{V^2 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2}$$

obteniendo el valor de la velocidad:  $V = 3,79 \text{ m/s}$

Se determina el número de Reynolds en el extremo de la placa con el fin de corroborar la hipótesis de régimen laminar en todo el dominio.

$$\text{Re}_L = \frac{3,79 \cdot 15}{1,076 \cdot 10^{-3}} = 52.834,5$$

## Problema 67

### Enunciado

Se quiere determinar la fuerza que un aeroplano opone al movimiento, debido a la fricción entre fluido y superficie. Para ello, y únicamente como primera aproximación, se va a considerar la superficie del aeroplano como una placa plana. Dicha placa tendrá 18 metros de ancho por 70 metros de largo (supóngase que el fluido pasa por un lado de la placa).

Si la velocidad de crucero del avión es de 750 Km/h; determine:

La fuerza que se opone al movimiento cuando dicho aeroplano está volando a 500 metros de altura, donde  $\mu = 1,7737 \cdot 10^{-5} \text{ Kg/m s}^2$  y  $\rho = 1,1673 \text{ Kg/m}^3$ , y cuando vuela a 20.000 metros donde:  $\mu = 1,4216 \cdot 10^{-5}$  y  $\rho = 0,08891 \text{ Kg/m}^3$ .

Determine en ambos casos el punto de transición entre la capa límite laminar y turbulenta, así como el espesor de la capa límite en este punto.

### Resolución

1. Se calculan las fuerzas que se oponen al movimiento a las alturas de 500 y 20.000 metros

a) Vuelo a 500 metros de altura

El objetivo del ejercicio es calcular la fuerza que se opone al movimiento del avión. Suponiendo el avión como una placa plana (tal como dice el enunciado), el valor de la fuerza viene dada por la expresión siguiente:

$$F_D = C_D \cdot B \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2}$$



donde:

$C_D$  : coeficiente de resistencia o de arrastre

$B$  : anchura de la placa

$L$  : longitud de la placa

$\rho$  : densidad del fluido en contacto con la placa.

$V_\infty$  : velocidad de la placa

Antes de calcular el coeficiente de resistencia, se determinará que zona de la placa se encuentra en régimen laminar y en régimen turbulento. Para ello, se utiliza:

$$500.000 = \frac{V_\infty X_{tr}}{\nu}$$

Sustituyendo valores, se obtiene:  $X_{tr} = 0,0364 \text{ m}$

Se observa que la mayor parte de la placa está sujeta a régimen turbulento; de todas maneras, y con el fin de trabajar con la mayor precisión, se va a utilizar la ecuación del coeficiente de resistencia, que considera tanto la zona laminar como la turbulenta.

$$C_D = \frac{0,072}{(Re_L)^{0,2}} - \frac{1.700}{Re_L}$$

de donde:

$$750 \text{ Km h}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \cdot \frac{1.000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} = 208,333 \text{ ms}^{-1}$$

$$Re_L = \frac{\rho \cdot v_\infty \cdot L}{\mu} = \frac{1,1673 \cdot 208,333 \cdot 70}{1,17737 \cdot 10^{-5}} = 959.750.677,285$$

El coeficiente de resistencia quedará:

$$C_D = \frac{0,072}{(959.750.677,285)^{0,2}} - \frac{1.700}{959.750.677,285} = 1,148 \cdot 10^{-3}$$

Siendo la fuerza:

$$F(h = 500 \text{ m}) = 1,148 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 70 \cdot 1,1673 \cdot \frac{(208,333)^2}{2}$$

$$F(h = 500 \text{ m}) = 36.666,618 \text{ N}$$

b) Vuelo a 20.000 metros de altura





De la misma manera que en el apartado anterior, se calculará el  $Re_L$  para poder determinar el coeficiente de resistencia,  $C_D$ .

$$Re_L = \frac{\rho \cdot v_{\infty} \cdot L}{\mu} = \frac{0,08891 \cdot 208,33 \cdot 70}{1,4216 \cdot 10^{-5}} = 91.207.237,767$$

La zona laminar y turbulenta de la placa, quedarán definidas:

$$500.000 = \frac{V_{\infty} X_{tr}}{\nu} = \frac{208,33 X_{tr}}{\frac{1,4216 \cdot 10^{-5}}{0,08891}}$$

$$X_{tr} = 0,38 \text{ m}$$

En este caso, es más necesario que antes utilizar la ecuación genérica con el fin de determinar el coeficiente de arrastre; así:

$$C_D = \frac{0,072}{(91.207.237,767)^{0,2}} - \frac{1.700}{91.207.237,767} = 1,8235 \cdot 10^{-3}$$

la fuerza será:

$$F(h = 20.000 \text{ m}) = 1,8235 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 70 \cdot 0,08891 \cdot \frac{(208,33)^2}{2}$$

$$F(h = 20.000 \text{ m}) = 4.433,2 \text{ N}$$

Véase la notable disminución de la fuerza de arrastre con la altura.

2. Cálculo del punto de transición entre régimen laminar y turbulento, así como el espesor de la capa límite en este punto.

a) Vuelo a 500 metros de altura

El punto de transición ha sido hallado anteriormente, y su valor era:

$$X_{tr \ 500} = 0,0364 \text{ m}$$

$$X_{tr \ 20.000} = 0,38 \text{ m}$$

El espesor de la capa límite entre estos dos puntos vendrá dado por la expresión:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

donde:

$\delta$ : espesor de la capa límite

$x$ : punto  $n$  donde se quiere calcular el espesor de la capa límite

$Re_x$ : número adimensional de Reynolds evaluado en el punto de estudio



Así:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5 \cdot 0,03646}{\sqrt{5 \cdot 10^5}}$$
$$\delta(h = 500 \text{ m}) = 2,578 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

b) Vuelo a 20.000 metros

Operando de la misma manera que en el caso anterior:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5 \cdot 0,38374}{\sqrt{5 \cdot 10^5}}$$
$$\delta(h = 20.000 \text{ m}) = 2,713 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

## Problema 68

### Enunciado

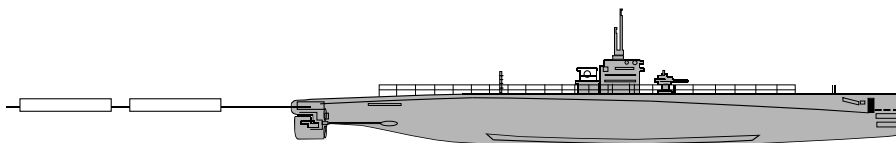
En la fase de ejecución de la obra de un oleoducto submarino, se ha pensado que para el transporte de los conductos hasta la zona donde han de ser soldados se utilizará un mini submarino. Se pretende que el submarino arrastre conductos de 50 m de longitud y 2 m de diámetro. Se entenderá que los conductos llevan unas boyas que los mantiene sumergidos y en posición horizontal.

Considérese los conductos como placas planas.

Viscosidad cinemática del agua =  $1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Densidad del agua =  $1.100 \text{ Kg/m}^3$

Fig. 68.1



1. Determine el número de conductos que puede llevar a la vez el mini submarino en función de la velocidad de desplazamiento (1-10 km/h) conociendo que puede realizar una fuerza de arrastre adicional de 500 N.
- 2.Cuál es el valor de los esfuerzos cortantes en la zona de transición de la capa límite.



### Resolución

$$\nu = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\rho = 1.100 \text{ Kg/m}^3$$

$$1.- \text{ Si } V = 1 \text{ Km/h} = 0,27 \text{ m/s}$$

La zona de separación entre el régimen laminar y turbulento de la placa viene dada por:

$$\text{Re} = \frac{V X_{tr}}{\nu} = \frac{0,27 X_{tr}}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 500.000$$

$$X_{tr} = 2,16 \text{ m}$$

Para el resto de velocidades posibles:

V (Km/h)	V (m/s)	$X_{tr}$ (m)
1	0,277	2,16
2	0,555	1,08
3	0,833	0,72
4	1,111	0,54
5	1,388	0,43

V (Km/h)	V (m/s)	$X_{tr}$ (m)
6	1,666	0,36
7	1,944	0,308
8	2,222	0,27
9	2,5	0,24
10	2,777	0,216

Obsérvese que la zona laminar de la placa es prácticamente relevante en todos los casos, con lo cual se utilizará para el cálculo la ecuación genérica del coeficiente de resistencia.

El coeficiente de resistencia para una placa, teniendo en cuenta la zona laminar y turbulenta, se expresa:

$$C_D = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{\text{Re}_L}$$

Cuando el submarino se desplaza a la velocidad mínima, se tiene:

$$\text{Re}_L = \frac{0,277 \cdot 50}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 11.574.074,1$$

$$C_D = \frac{0,074}{11.574.074,1^{\frac{1}{5}}} - \frac{1.740}{11.574.074,1} = 2,7107 \cdot 10^{-3}$$



$$F = C_D \cdot b \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2} = 2,7107 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1100 \cdot \frac{0,2777^2}{2} = 36,14 \text{ N}$$

Puesto que hay dos superficies de contacto,  $F = 2 \cdot 36,14 = 72,28 \text{ N}$

Cuando el submarino se desplaza a la velocidad máxima:

$$Re_L = \frac{2,77 \cdot 50}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 1,154 \cdot 10^8$$

$$C_D = \frac{0,074}{Re_L^{\frac{1}{5}}} - \frac{1,740}{Re_L} = 1,7902 \cdot 10^{-3}$$

$$F = C_D \cdot b \cdot L \cdot \rho \cdot \frac{V_\infty^2}{2} = 1,7902 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 2 \cdot 50 \cdot 1.100 \cdot \frac{2,777^2}{2} = 2.386,76 \text{ N}$$

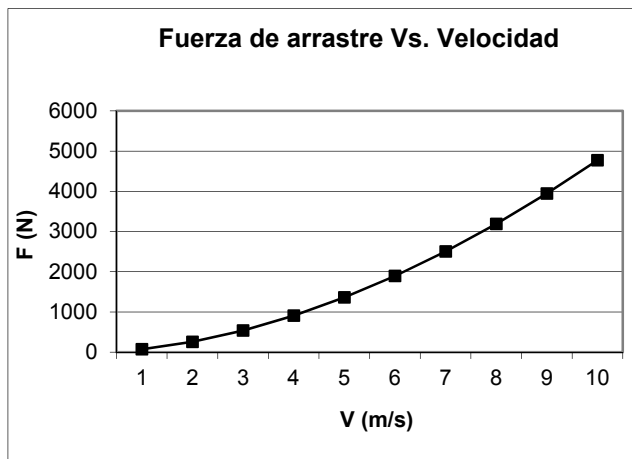
$$F_T = 2F = 4.773,53 \text{ N}$$

Puesto que la fuerza de arrastre en función de la velocidad del submarino venia definida por:

$$F = C_D b L \rho V^2/2$$

sustituyendo los valores para el resto de velocidades del submarino, se obtiene:

Fig. 68.2



V (m/s)	F (N)
0,27	72,28
0,55	257,63
0,83	539,13
1,11	909,02
1,38	1.362,27
1,66	1.895,2
1,94	2.504,94
2,22	3.189,16
2,5	3.945,87
2,77	4.773,53

El número de conductos en función de la velocidad se establece:

$$N.^{\circ} \text{ de tubos} = \frac{F \rightarrow \text{arrastre}}{F \leftarrow \text{necesaria}}$$

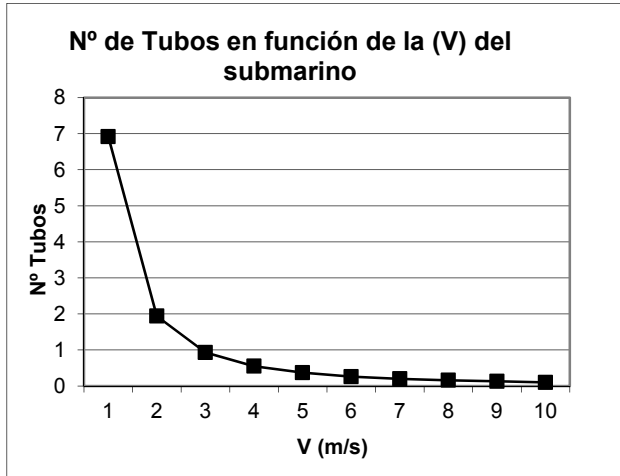


Fig. 68.3

V(m/s)	N.º Tubos
0,27	6,92
0,55	1,94
0,83	0,93
1,11	0,55
1,38	0,37
1,66	0,26
1,94	0,2
2,22	0,16
2,50	0,13
2,77	0,1

Obsérvese que el submarino sólo podrá transportar tubos cuando se desplace a baja velocidad.

2. La variación del esfuerzo cortante en el punto de transición para las diferentes velocidades se define:

$$\tau_w = \frac{2 \mu V_\infty}{\delta} = \frac{2 \nu \rho V_\infty}{5 \sqrt{\frac{\nu X_{tr}}{V_\infty}}}$$

de donde, sustituyendo para los valores determinados anteriormente, se tiene:

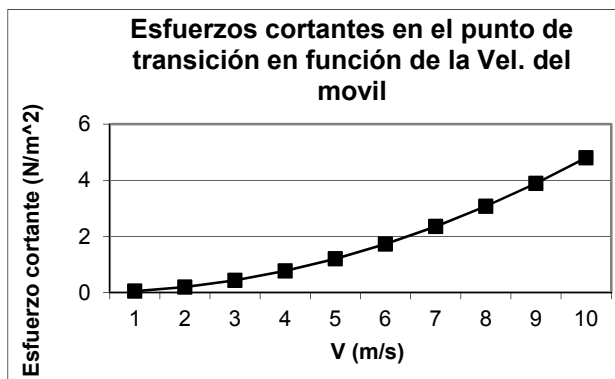


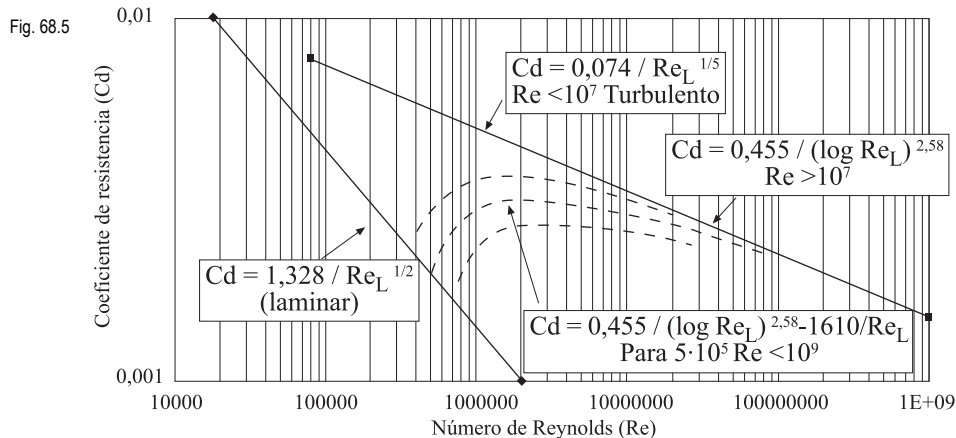
Fig. 68.4

V (m/s)	$\tau_w$ (N/m <sup>2</sup> )
0,27	0,048
0,55	0,192
0,83	0,432
1,11	0,768
1,38	1,2
1,66	1,728
1,94	2,353
2,22	3,073
2,5	3,889
2,77	4,801



A modo de ejemplo en la figura siguiente se detalla, el valor del coeficiente de arrastre hallado experimentalmente para placas planas lisas, en función del número de Reynolds.

Véase que los valores del coeficiente de arrastre obtenidos para sendos valores del número de Reynolds se podrían haber obtenido utilizando dicho diagrama.



## Problema 69

### Enunciado

Se desea construir un barco que utilice el efecto, Magnus, con el fin de producir el desplazamiento del mismo.

Las condiciones del navío son:

- Velocidad del crucero, 10 km/h; superficie en contacto con el agua, 80 m<sup>2</sup>(4x20 m)
- La velocidad del crucero debería alcanzarse para una velocidad del viento de 6m/s.
- Debido al diseño del barco se prevé que se puedan instalar, como máximo, dos mástiles de 15 m de altura, y 0,5 m de diámetro.

Determine:

1. La velocidad de giro de dichos mástiles para conseguir la velocidad de crucero deseada. Se puede considerar despreciable la velocidad relativa del barco, así como el rozamiento del aire sobre el mismo. Considere que el viento actúa ortogonalmente al eje principal del barco.
2. Qué ángulo ha de formar el eje del barco respecto al viento, con el fin de aprovechar al máximo la fuerza resultante del efecto Magnus.



3. Determine la potencia mínima necesaria para hacer girar los cilindros.

Propiedades del agua:  $\nu = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$$\rho = 1.150 \text{ Kg/m}^3$$

Propiedades del aire:  $P = 100.000 \text{ Pa}$

$$T = 293 \text{ K}$$

$$\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

## Resolución

1. El primer paso es determinar la fuerza que se opone al movimiento del barco. Considerando la superficie mojada del mismo como una placa plana, se debe hallar inicialmente qué zona de la placa está en régimen laminar y qué zona está en régimen turbulento; para ello, se determinará la distancia de transición.

$$\text{Re}_x = 500.000 = \frac{10 \cdot \frac{1.000}{3.600} \cdot X_{tr}}{1,3 \cdot 10^{-5}}; X_{tr} = 2,34 \text{ m}$$

Como la placa tiene 20 m de longitud, ha de considerar que la capa límite tiene una zona laminar y una turbulenta, con lo cual se utilizará la expresión del coeficiente de arrastre que considera tanto la capa límite laminar como la turbulenta.

$$C_D = 0,072 \cdot \text{Re}_L^{-\frac{1}{5}} - \frac{1.700}{\text{Re}_L}$$

de donde:

$$\text{Re}_L = \frac{10 \cdot \frac{1.000}{3.600} \cdot 20}{1,3 \cdot 10^{-5}} = 4.273.504,2$$

sustituyendo, se obtiene:

$$C_D = 3,3976 \cdot 10^{-3} - 3,978 \cdot 10^{-4} = 2,9998 \cdot 10^{-3}$$

Así pues, la fuerza necesaria para mover la embarcación a la velocidad requerida es:

$$F = C_D \cdot \frac{1}{2} \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot l = 2,9998 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.150 \cdot \left(10 \frac{1}{3,6}\right)^2 \cdot 4 \cdot 20 = 1.064,75 \text{ N}$$

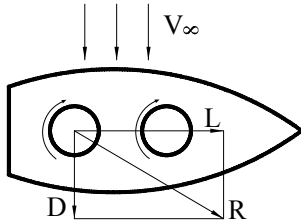
Esta fuerza en la dirección del movimiento ha de ser comunicada por los cilindros con efecto Magnus.



Dado que la relación  $\frac{u}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot r}{v_\infty} = \frac{\omega \cdot 0,25}{6}$  no es conocida, se partirá de la fuerza necesaria para determinar la velocidad angular.

Puesto que la dirección del viento es lateral, la fuerza en la dirección del movimiento será la *lift* creada por los dos cilindros:

Fig. 69.1  
Esquema del barco  
y las fuerzas  
actantes sobre el  
mismo



$$L_{1 \text{ cilindro}} = C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S$$

$$F = 2 \cdot L_{1 \text{ cilindro}} = 2 \cdot C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S$$

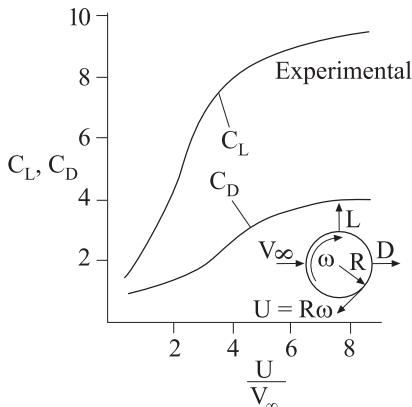
$$C_{L1 \text{ cilindro}} = \frac{F}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_\infty^2 \cdot S} = \frac{1.064,75}{1,189 \cdot 6^2 \cdot 15 \cdot 0,5} = \frac{1.064,75}{321,03} = 3,316$$

La densidad del aire se ha obtenido:  $\rho = \frac{P}{RT} = \frac{100.000}{287 \cdot 293} = 1,189 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$  considerando presión atmosférica y temperatura de 20°C.

Con el valor del coeficiente de sustentación, se obtienen de la figura 69.2 los valores:

$$\frac{u}{v_\infty} = 1,7; \quad C_D = 1,4;$$

Fig. 69.2  
Valores del coeficiente  
de arrastre y  
sustentación en  
función de la relación  
de velocidades  
tangencial y no  
perturbada







Consecuentemente, la velocidad de giro de los cilindros será:

$$\frac{u}{v_{\infty}} = \frac{\omega \cdot r}{v_{\infty}} = \frac{\omega \cdot 0,25}{6} = 1,7$$

$$\omega = 40,8 \text{ rad/s} \equiv 389,6 \text{ rpm}$$

2. Para determinar el ángulo que el eje del barco ha de formar respecto a la corriente no perturbada, con el fin de aprovechar al máximo el efecto Magnus, se deberá determinar la dirección de la fuerza resultante.

Así, la fuerza de arrastre valdrá:

$$C_D = 1,4 = \frac{D_{1 \text{ cilindro}}}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot S}$$

$$D_{1 \text{ cilindro}} = 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot S = 1,4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,189 \cdot 6^2 \cdot 0,5 \cdot 15 = 224,721 \text{ N}$$

$$D_{2 \text{ cilindros}} = 449,442 \text{ N}$$

de donde la fuerza resultante será:

$$R = \sqrt{D_2^2 + L_2^2} = \sqrt{449,44^2 + 1.064,75^2} = 1.155,72 \text{ N}$$

La cual forma un ángulo respecto la dirección inicial del movimiento de:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{449,44}{1.064,75} = 0,4221 ; \quad \alpha = 22,88^\circ$$

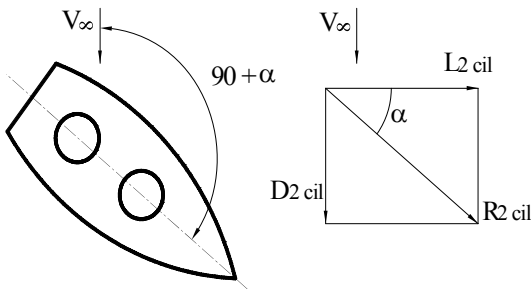


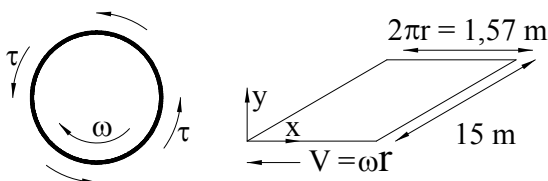
Fig. 69.3  
Ángulo óptimo  
para aprovechar  
al máximo el  
efecto Magnus

Con lo cual, el ángulo que el eje del barco ha de formar respecto al viento para aprovechar al máximo el efecto Magnus ha de ser de  $112,88^\circ$ . Obsérvese que este ángulo será diferente para cada valor de velocidad del viento y velocidad de giro de los cilindros.



3. Para hallar la potencia que ha de tener cada uno de los motores eléctricos que hace girar los cilindros, (y dado que no se dispone de la distribución de velocidades del fluido en dirección radial partiendo de la velocidad en la pared del cilindro), se considerará cada cilindro como una placa plana que se desplaza con una velocidad igual a la velocidad tangencial del cilindro. No obstante, ha de tenerse en cuenta que se está realizando una somera aproximación a la realidad.

Fig. 69.4  
Simil de los esfuerzos sobre el fluido en forma de placa plana



Los esfuerzos cortantes alrededor del cilindro se pueden dar:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial \omega}{\partial n} \approx \mu \cdot \frac{v - 0}{\delta} = \mu \cdot \frac{\omega \cdot r}{\delta}$$

$\delta$  = espesor de la capa límite, el cual variará en cada punto.

Puesto que no se tiene conocimiento del espesor, se procederá a asimilar el cilindro a una placa plana, la cual se desplaza a una velocidad  $v = \omega r$ .

La distancia respecto al origen para la cual la capa límite dejará de ser laminar es:

$$R_e = \frac{\omega \cdot r \cdot x}{v_{\text{aire}}} = \frac{40,8 \cdot 0,25 \cdot x}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 500.000 ; \quad x = 0,7352 \text{ m};$$

El número de Reynolds en el extremo de la placa vendrá dado por:

$$Re_L = \frac{40,8 \cdot 0,25 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,25}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 1.068.141,5$$

Por tanto, el coeficiente de arrastre y la fuerza necesaria para desplazar esta placa ficticia serán:

$$\begin{aligned} C_D &= 0,072 \cdot Re_L^{-1/5} - \frac{1.700}{Re_L} = 0,072 \cdot 1.068.141,5^{-1/5} - \frac{1.700}{1.068.141,5} = \\ &= 0,0044833 - 0,0015915 = 0,0028918 \end{aligned}$$

$$F = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot l = 0,0028918 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,189 \cdot (\omega \cdot r)^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,25 \cdot 15 = 4,21 \text{ N}$$

La potencia necesaria para mover esta placa ficticia sería:

$$N = F \cdot V_{\infty} = F \cdot \omega \cdot r = 4,21 \cdot 40,8 \cdot 0,25 = 42,98 \text{ W}$$



La potencia necesaria para mover los dos cilindros sería de 85,97 W.

En realidad, no sólo hay que tener en cuenta que el símil de la placa plana es poco satisfactorio, sino que además se deberían evaluar los esfuerzos debidos a los rozamientos mecánicos.

## Problema 70

### Enunciado

El ojo de un tornado tiene un radio de 30 m, la velocidad tangencial del viento para este radio es de 50 m/s. Asumiendo que la variación de velocidad desde el eje central del tornado al susodicho radio es la característica a la de un vórtice forzado, mientras que desde el radio del ojo hasta el radio exterior del tornado la distribución de velocidades puede considerarse como de un vórtice libre.

Determine la distribución de presiones en función del radio del tornado.

Se puede despreciar el efecto de las fuerzas másicas.

### Resolución

Lo primero que es necesario recordar es la ecuación característica de un vórtice libre y un vórtice forzado:

Para un vórtice libre, se cumple:  $v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi \cdot r}$

Para un vórtice forzado:  $v_{\theta} = \omega \cdot r$

Donde  $r$ , es el radio genérico,  $\omega$  es la velocidad de giro del aire y  $\Gamma$  es la circulación del vector velocidad a lo largo de una curva cerrada genérica.

Según el enunciado, la representación gráfica de la distribución de velocidades alrededor del ojo del tornado es:

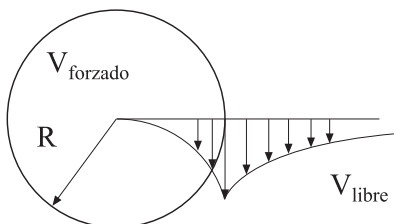


Fig. 70.1



Para el radio exterior del ojo del tornado ( $r = R$ ), el vórtice forzado y el libre se encuentran, con lo que se puede decir:

$$\omega R = \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Despejando el valor de la circulación del fluido, se obtiene:

$$\Gamma = 2\pi\omega R^2$$

con lo cual las ecuaciones para el vórtice forzado y libre se darán:

Vórtice forzado:  $v_\theta = \omega r$ ; ecuación válida para  $r \leq R$ ;

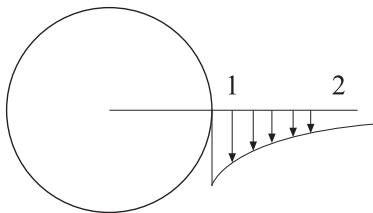
Vórtice libre:  $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{2\pi\omega R^2}{2\pi r} = \frac{\omega R^2}{r}$ ; ecuación válida para  $r \geq R$

El valor de la velocidad angular puede calcularse:

$$v_\theta = \omega r; \quad 50 = \omega \cdot 30; \quad \omega = \frac{5}{3} = 1,66 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right];$$

En la zona donde existe el vórtice libre, se va a aplicar la ecuación de la energía entre los puntos 1 y 2 que se detallan en la figura siguiente. Entendiendo que el punto 2 está situado suficientemente alejado del centro del tornado y por tanto, la velocidad del aire se puede considerar cero y la presión es la atmosférica, se tiene:

Fig. 70.2



$$\frac{P_1}{\rho} + g \cdot z_1 + \frac{v_\theta^2}{2} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + g \cdot z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Puesto que la velocidad del aire en un punto suficientemente alejado del centro del tornado se puede considerar nula, se tiene:

$$\frac{v_\theta^2}{2} = \frac{P_{\text{atm}} - P_1}{\rho}$$

Sustituyendo la ecuación del vórtice libre en la ecuación anterior, se obtiene:

$$P_1 = P_{\text{atm}} - \frac{\rho \cdot v_\theta^2}{2} = P_{\text{atm}} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^4}{r^2}; \quad \text{ecuación válida para } r \geq R$$



Por otro lado, en el ojo del huracán se puede aplicar la ecuación de Euler en coordenadas cilíndricas y flujo bidimensional, y se obtiene:

$$\text{En dirección radial: } -\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g_r$$

$$\text{En dirección angular: } 0 = -\frac{1}{\rho \cdot r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + g_\theta$$

Según el enunciado, los términos de fuerzas másicas pueden ser despreciados, con lo que la ecuación en dirección angular es:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0; \text{ con lo que la presión ha de ser constante respecto a } \theta;$$

Del término de la ecuación de Euler en dirección radial, se tiene:

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

cuya integración da lugar a:

$$\int dP = \int \frac{v_\theta^2}{r} \cdot \rho \cdot dr = \int \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} \cdot \rho \cdot dr$$

$$P = \omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{r^2}{2} + \text{cte}$$

Para determinar la constante, se necesita una condición de contorno. Dicha condición se obtiene al igualar la presión, en el contorno del ojo del tornado.

Igualando la presión en el punto  $r = R$ , desde el punto de vista de las dos distribuciones de presiones, se obtiene:

$$\omega^2 \cdot \rho \cdot \frac{R^2}{2} + \text{cte} = P_{\text{atm}} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^4}{R^2};$$

$$\text{cte} = P_{\text{atm}} - \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

con lo que la distribución de presiones para la zona de vórtice forzado queda:

$$P = \frac{\omega^2 \cdot \rho \cdot r^2}{2} + P_{\text{atm}} - \rho \cdot \omega^2 R^2$$

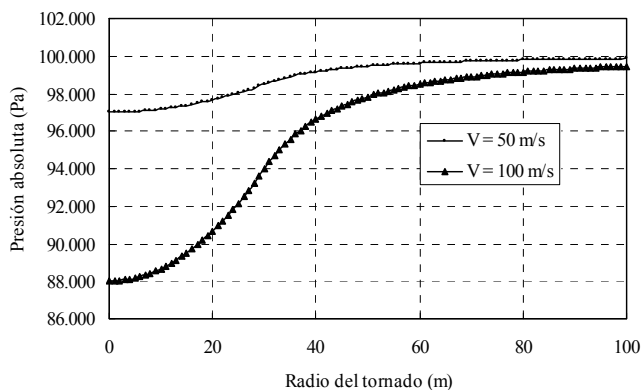
$$P = P_{\text{atm}} + \rho \cdot \omega^2 \cdot \left[ \frac{r^2}{2} - R^2 \right]; \text{ el límite de validez de esta ecuación es: } r \leq R;$$

Obsérvese que tanto la ecuación que caracteriza la distribución de presiones para vórtice forzado como la de vórtice libre dan lugar a distribuciones de presión menores que la atmosférica. Obsérvese que cuanto mayor es la velocidad angular del tornado, mayor será la depresión creada. A modo de ejemplo, en la figura siguiente se muestra cómo



varia la presión a lo largo del radio del tornado para dos velocidades angulares diferentes, que corresponden a una velocidad tangencial de 50 y 100 m/s para un radio del ojo del tornado de 30 m.

Fig. 70.3



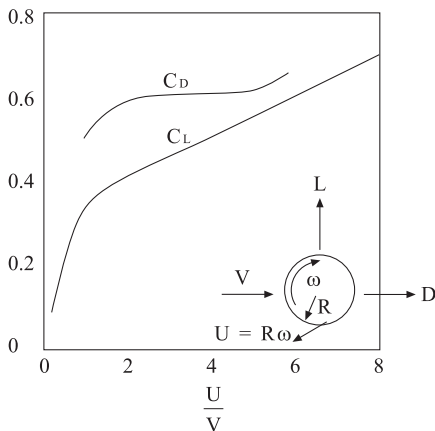
## Problema 71

### Enunciado

Una máquina de entrenamiento para tenistas tiene una boca de salida situada a  $Y$  metros del suelo. La máquina lanza paralelamente al suelo una pelota con una velocidad  $V_{\text{inicial}}$  y una rotación en sentido de las agujas del reloj de  $\omega$  radianes/segundo. Determine la posición de la pelota cuando llegue al tenista, el cual está situado a una distancia  $X$  de la máquina. Consideren conocido el diámetro de la pelota  $D$  y la masa de la pelota  $m$ .

Los valores de los coeficientes de arrastre y sustentación para una esfera que gira sobre sí misma se detallan en la figura siguiente.

Fig. 71.1 Coeficientes de arrastre y sustentación para una esfera sometida al efecto Magnus





## Resolución

La velocidad tangencial de la pelota, debida a su rotación, será:

$$U = \omega \frac{D}{2}; \quad \frac{m}{s}$$

La velocidad con la que la pelota sale de la máquina es la velocidad no perturbada  $V_\infty$ .

El cociente entre ambas velocidades  $\frac{U}{V_\infty}$  es el valor con que se entra en el diagrama inicial, y se obtienen los valores del coeficiente de arrastre y sustentación:  $C_D$ ;  $C_L$ ;

El diagrama del cuerpo libre para la pelota, en un punto genérico de su movimiento, sería:

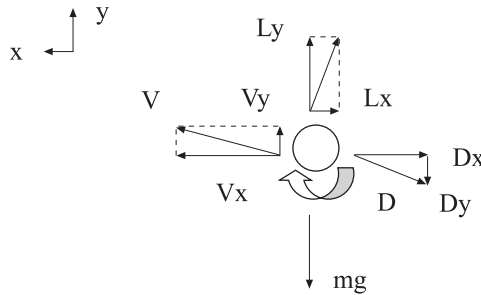


Fig. 71.2

De la aplicación de la segunda ecuación de Newton en las dos direcciones del movimiento, se tiene:

$$\sum F_x = m \cdot \ddot{a}_x$$

$$\sum F_y = m \cdot \ddot{a}_y$$

Sustituyendo las componentes de las fuerzas actuantes, se tiene:

$$-L_x - D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}; \quad L_y - D_y - mg = m \cdot \frac{dV_y}{dt};$$

de donde la relación entre los coeficientes de arrastre y sustentación y las fuerzas se pueden dar como:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot S} = \frac{D}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S}; \quad C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_\infty^2 \cdot S} = \frac{L}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S}$$

$$\text{siendo: } S = \frac{\pi \cdot d^2}{4};$$



Para un tiempo inicial, justamente cuando la pelota sale de la máquinas, se cumple:  $V_y = 0$ ;  $D_x \gg L_x$ ;  $L_y \gg D_y$ ; con lo que la segunda ecuación de Newton en las dos direcciones del movimiento será:

$$-D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt}$$

$$L_y - m \cdot g = m \frac{dV_y}{dt}$$

La integración de la ecuación del movimiento en dirección X da lugar a:

$$\int_{t=0}^t -C_D \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot dt = \int_{V_{x\text{ inicial}}}^{V_x} m \cdot \frac{dV_x}{V_x^2}$$

$$-C_D \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot t = -m \left[ \frac{1}{V_x} \right]_{V_{x\text{ inicial}}}^{V_x} = -m \cdot \left[ \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{x\text{ inicial}}} \right]$$

$$C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} = \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{x\text{ inicial}}}$$

$$V_x = \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{ inicial}}}};$$

Ecuación que da la velocidad de la pelota en dirección X y en función del tiempo.

De la integración de la ecuación del movimiento en dirección Y, se obtiene:

$$C_L \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V_x^2 \cdot S - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_y}{dt}$$

$$C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot \left[ \frac{1}{C_D \cdot \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{ inicial}}}} \right]^2 - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_y}{dt}$$

$$\int_{V_{y\text{ inicial}}=0}^{V_y} dV_y = \int_{t=0}^{t=t} \left[ -g + \frac{C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S}{m} \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{ inicial}}}} \right]^2 \right] dt$$

$$V_y = -g t - \frac{C_L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S}{m} \cdot \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \left[ \frac{1}{C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x\text{ inicial}}}} \right]_{t=0}^t$$





$$V_y = -g \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} - V_{x_{inicial}} \right]$$

Ésta es la ecuación que caracteriza la velocidad en dirección vertical en función del tiempo. Obsérvese que para el tiempo  $t = 0$ , se ha considerado que la velocidad  $V_y$  es asimismo nula.

La posición temporal de la pelota en dirección X se obtiene de la ecuación:

$$V_x = \frac{dx}{dt};$$

de donde:

$$\int_{x=0}^{x=X} dx = V_x dt = \int_{t=0}^t \frac{dt}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} = \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[ \frac{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right];$$

$$X \cdot C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m} = \ln \left( \frac{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}}{\frac{1}{V_{x_{inicial}}}} \right)$$

$$\left[ \frac{1}{V_{x_{inicial}}} e^{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot X}{m}} - \frac{1}{V_{x_{inicial}}} \right] \cdot \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S}{m}} = t \quad (A)$$

Esta ecuación caracteriza el tiempo que tarda la pelota en recorrer la distancia entre la máquina y el tenista (X).

La posición de la pelota en dirección vertical se determina:

$$\int_{y=y_{inicial}}^{y=y} dy = \int_{t=0}^{t=t} \left[ -g \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \cdot \left[ \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{inicial}}}} - V_{x_{inicial}} \right] \right] dt$$



$$Y - Y_{\text{inicial}} = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{C_L}{C_D} V_{x_{\text{inicial}}} \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[ C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}} \right]_{t=0}^{t=t}$$

$$Y - Y_{\text{inicial}} = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{C_L}{C_D} V_{x_{\text{inicial}}} \cdot t - \frac{C_L}{C_D} \frac{1}{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S}{m}} \cdot \ln \left[ \frac{C_D \frac{1}{2} \frac{\rho \cdot S \cdot t}{m} + \frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}}}{\frac{1}{V_{x_{\text{inicial}}}}} \right] \quad (B)$$

Esta ecuación caracteriza la posición vertical de la pelota en función del tiempo.

El proceso a seguir para obtener la información deseada es: de la ecuación (A), para la distancia X entre la máquina y el tenista se obtiene el tiempo necesario para que la pelota recorra dicha distancia. Este tiempo debe ser sustituido en la ecuación (B) y se obtendrá como resultado la altura final a la que se encontrará la pelota cuando ésta llegue al tenista.

Cabe remarcar, no obstante, que el proceso de resolución seguido no es estrictamente correcto, puesto que no se han utilizado todos los términos involucrados en la segunda ecuación de Newton en las direcciones X e Y.

Un proceso más correcto sería si se utilizase el procedimiento descrito para determinar la posición Y, el tiempo y las velocidades de la pelota  $V_{x1}$ ,  $V_{y1}$ , cuando se ha recorrido una distancia pequeña,  $\Delta X$  (en el límite sería una distancia infinitesimal), respecto a la posición de la máquina. No obstante, se supone que en todo momento la velocidad de giro de la pelota sobre sí misma se mantiene.

Así, cuando la pelota haya recorrido la distancia  $\Delta X$ , se podrán determinar los nuevos coeficientes de arrastre y sustentación entrando con el valor de:  $\frac{U}{V_{x1}}$  en la gráfica inicial, y se obtendrán  $C_{Ly1}$ ,  $C_{Dx1}$ .

Por otro lado, gracias a la relación  $\frac{U}{V_{y1}}$ , se puede determinar la relación  $C_{Lx1}$ ,  $C_{Dy1}$ .

Gracias al conocimiento de estos cuatro coeficientes, se pueden utilizar las ecuaciones del movimiento al completo:

$$-L_x - D_x = m \cdot \frac{dV_x}{dt};$$

$$L_y - D_y - mg = m \frac{dV_y}{dt};$$

y se obtiene:

$$-C_{Lx} \frac{1}{2} \rho V_{y1}^2 S - C_{Dx} \frac{1}{2} \rho V_{x1}^2 S = m \frac{dV_x}{dt} \approx m \frac{V_{x2} - V_{x1}}{\Delta t}$$



$$-C_{Ly} \frac{1}{2} \rho V_{x1}^2 S - C_{Dy} \frac{1}{2} \rho V_{y1}^2 S = m \frac{dV_y}{dt} \approx m \frac{V_{y2} - V_{y1}}{\Delta t}$$

De la resolución de estas ecuaciones, se obtiene:  $V_{x2}$ ,  $V_{y2}$ , para el segundo diferencial de tiempo, y dan paso a  $\frac{U}{V_{x2}}$ ,  $\frac{U}{V_{y2}}$ , dando lugar a unos coeficientes  $C_{Ly2}$ ,  $C_{Dx2}$ ,  $C_{Lx2}$ ,

$C_{Dy2}$ ; sustituyendo los valores de los nuevos coeficientes y las velocidades en las ecuaciones análogas a las dos precedentes se obtendrían las características en el diferencial de posición siguiente.  $V_{x3}$ ,  $V_{y3}$ . El proceso seguiría de manera homóloga.

## Problema 72

### Enunciado

En los procesos de aterrizaje y despegue de aeronaves, se producen vórtices que se generan originariamente bajo las alas de dichas aeronaves. Dichos vórtices interactúan con el suelo creando campos de presiones y velocidades que, de hecho, perturban el despegue y/o aterrizaje de aeronaves más pequeñas. En este problema, se pide determinar inicialmente la ecuación de Bernoulli para flujo potencial; posteriormente, definir el concepto de vorticidad y flujo de vorticidad, y finalmente se pide determinar, utilizando la teoría potencial, el colectivo de ecuaciones que, para el caso de tener dos vórtices paralelos y cercanos al suelo, definan el campo de velocidades y presiones en cualquier punto del vórtice bidimensional y del suelo. Partiendo de las expresiones genéricas halladas, se requiere asimismo determinar las expresiones particulares que caracterizan el campo de presiones y velocidades sobre el suelo.

### Resolución

#### 1 Determinación de la ecuación de Bernoulli para flujo potencial

Distribución de presiones causada por un flujo vorticular sobre una superficie plana paralela al eje del vórtice.

La distribución de presiones a lo largo del eje  $x$ , puede ser determinada utilizando la ecuación de Bernoulli para flujo potencial, la cual puede obtenerse partiendo de la ecuación de Navier-Stokes. Dicha ecuación para fluido incompresible, toma la forma:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$



Recordando las relaciones vectoriales:

$$\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = \text{grad} \frac{V^2}{2} - \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} = \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - (\vec{V} \nabla) \vec{V} \quad (2)$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{V} = \text{grad} \text{div} \vec{V} - \nabla^2 \vec{V} \quad (3)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2 y 3 en 1, se obtiene:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu [\text{grad} \text{div} \vec{V} - \text{rot} \text{rot} \vec{V}] \quad (4)$$

Asumiendo el flujo como potencial, se ha de cumplir,  $\text{rot} \vec{V} = 0$ , de donde:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu [\text{grad} \text{div} \vec{V}] \quad (5)$$

Por otro lado, para flujo incompresible, se tiene que  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , obteniendo:

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \right) = -\nabla P + \rho \vec{g} \quad (6)$$

dividiendo por la densidad:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left[ \left( \frac{V^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{\rho} \right) \right] = \vec{g} \quad (7)$$

De acuerdo con la teoría potencial,  $\text{rot} \vec{V} = 0 \equiv \vec{V} = \nabla \phi$ , siendo  $\phi$  el potencial de velocidades, de donde:

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left[ \left( \frac{V^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{\rho} \right) \right] = \vec{g} \quad (8)$$

Esta ecuación puede ser asimismo presentada como:

$$\nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left( \frac{V^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{\rho} \right) \right] = \vec{g} \quad (9)$$

Las fuerzas gravitacionales pueden expresarse como  $\vec{g} = -\nabla U = -\nabla (gh)$ , siendo  $h$ , la posición de un punto genérico *versus* un plano establecido, de donde:

$$\nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left( \frac{V^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{\rho} \right) + (g \cdot h) \right] = 0 \quad (10)$$



La integración de esta ecuación tiene como resultado:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left( \frac{V^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{\rho} \right) + (g h) = \text{cte.} \quad (11)$$

La ecuación (11) puede también expresarse como:

$$\frac{\partial(\phi_2 - \phi_1)}{\partial t} + \left( \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + \left( \frac{P_2 - P_1}{\rho} \right) + g(h_2 - h_1) = 0 \quad (12)$$

Para el caso en estudio, las fuerzas gravitacionales juegan un papel insignificante, con lo cual:

$$\frac{\partial(\phi_2 - \phi_1)}{\partial t} + \left( \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} \right) + \left( \frac{P_2 - P_1}{\rho} \right) = 0 \quad (13)$$

ecuación que también puede darse como:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left( \rho \frac{V^2}{2} \right) + P = P_0 \quad (14)$$

donde  $P_0$  representa la presión total en un punto genérico.

Las ecuaciones 11-14 reciben el nombre de ecuación de Bernoulli para flujo potencial y evalúan la energía existente en un punto genérico en comparación con la energía asociada al fluido en otro punto conocido. Por tanto, esta ecuación ha de ser aplicada entre dos puntos situados en una misma línea de corriente. Si uno de estos dos puntos está situado sobre una superficie horizontal, se tiene:

$$\rho \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}} + \left( \rho \frac{V_{\text{wall}}^2}{2} \right) + P_{(x)} = P_0 \quad (15)$$

Con el fin de determinar la presión a lo largo de la placa plana,  $P_{(x)}$ , será necesario hallar la velocidad  $V_{\text{wall}}$ , así como la variación temporal del potencial de velocidades

$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}}$  sobre la superficie horizontal.

## 2 Definición de vorticidad y flujo de vorticidad

La ecuación de Navier-stokes para fluido incompresible, dada como ecuación (1), puede ser extendida en dirección  $x$  y toma la forma:

$$\rho \left( \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial Z^2} \right) \quad (16)$$



La ecuación de continuidad para fluido incompresible se representa:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 = \frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} \quad (17)$$

Para el presente estudio, en flujo bidimensional, dado que se quiere evaluar la velocidad del fluido sobre una placa plana, se puede asumir:  $V_z = 0$ ;  $V_y = 0$ ;  $V_x \neq 0$

con lo que la ecuación de continuidad tomará la forma:  $\frac{\partial V_x}{\partial X} = 0$

Así, la ecuación de Navier-Stokes a lo largo del eje x tomará la forma:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{\text{wall}} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right) \Big|_{\text{wall}} \quad (18)$$

Considerando que las fuerzas gravitacionales son muy poco relevantes en este estudio, se tiene:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{\text{wall}} + \mu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial Y^2} \right) \Big|_{\text{wall}} \quad (19)$$

El subíndice *wall* clarifica que esta ecuación es aplicable a una placa plana situada a lo largo del eje X. Véase que se han considerado las condiciones de flujo deslizante sobre la placa plana.

Por otro lado, la vorticidad del fluido  $\vec{\varepsilon} = \text{rot} \vec{V}$  se puede dar en tres dimensiones como:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial Y} - \frac{\partial V_y}{\partial Z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial V_x}{\partial Z} - \frac{\partial V_z}{\partial X} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) \hat{k} \quad (20)$$

Considerando las mismas condiciones de contorno que las utilizadas hasta el momento,  $V_z = 0$ ,  $V_y = 0$ ,  $V_x \neq 0$ , la ecuación (20) para la dirección  $\hat{k}$ , tomara la forma:

$$\varepsilon_z = \left( -\frac{\partial V_x}{\partial Y} \right) \hat{k} \quad (21)$$

Combinando las ecuaciones (19) y (21), resulta:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{\text{wall}} - \mu \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right) \Big|_{\text{wall}} \quad (22)$$

ecuación que relaciona la variación de presión a lo largo de la placa horizontal con la ratio de vorticidad a lo largo de un eje situado perpendicularmente a la placa. Algunos autores definen el concepto de flujo de vorticidad como  $\varepsilon_f$ , de donde:



$$\varepsilon_f = \frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{\text{wall}} = -\mu \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y} \right) \Big|_{\text{wall}} \quad (23)$$

La ecuación (23) puede ser utilizada para graficar el flujo de vorticidad a lo largo de la placa plana horizontal.

### 3 Distribución de velocidades y variación temporal del potencial de velocidades en un punto genérico del plano del fluido y sobre una superficie plana

El campo de fluido bajo estudio, consiste en dos vórtices localizados sobre una superficie plana. La posición del centro de cada vórtice, esta dada, para un sistema de coordenadas cartesianas, como:  $Z_0 = (X_0, Y_0)$ ;  $Z_1 = (-X_0, Y_0)$ ; ver figura 72.1. En dicha figura 72.1, se puede ver asimismo, la posición de los dos vórtices imagen, cuyos centros están definidos por las coordenadas:  $Z_0^* = (X_0, -Y_0)$ ;  $Z_1^* = (-X_0, -Y_0)$ :

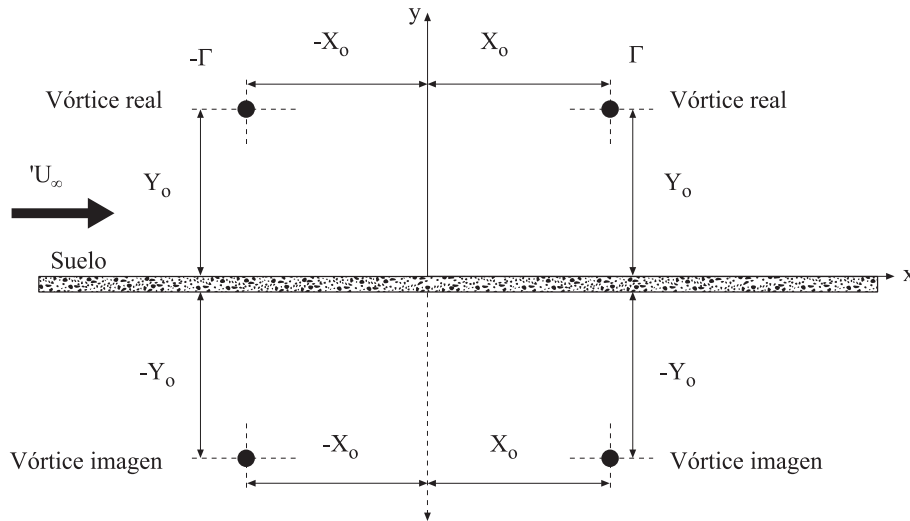


Fig. 72.1  
Representación  
esquemática de los  
dos vórtices reales y  
los dos vórtices  
imagen

Para determinar la velocidad del fluido sobre la placa (suelo),  $V_{\text{wall}}$ , se va a utilizar la teoría potencial. Esta teoría se va a aplicar inicialmente a los dos vórtices (real e imagen), situados a la derecha de la figura 72.1, y posteriormente a los otros dos vórtices localizados en la parte izquierda de dicha figura.

Consideremos, inicialmente, los dos vórtices (real e imagen) situados en las posiciones:  $Z_0 = (X_0, Y_0)$ ; y su imagen  $Z_0^* = (X_0, -Y_0)$ .

La función potencial para este par de vórtices se define como:

$$f(Z) = U_\infty Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{Z - Z_0^*}{Z - Z_0} \right) \quad (24)$$



donde  $\Gamma$  es la circulación asociada a cada vórtice.

La relación entre la función potencial compleja, el potencial de velocidades  $\phi$ , y la función de corriente  $\psi$  se define como  $f(Z) = \phi + i\psi$  (25)

Así, para los dos vórtices situados en la parte derecha del plano, la función potencial compleja toma la forma:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_{\infty} Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X+iY)-(X_0-iY_0)}{(X+iY)-(X_0+iY_0)} \right) \\ &= U_{\infty}(X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X-X_0)+i(Y+Y_0)}{(X-X_0)+i(Y-Y_0)} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Esta ecuación puede ser dada como:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_{\infty}(X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X-X_0)+i(Y+Y_0)) \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X-X_0)+i(Y-Y_0)) \end{aligned} \quad (27)$$

Recuérdese que el logaritmo de una función compleja puede ser representado como:

$$\ln(Z) = \ln|Z| + i\theta \quad (28)$$

donde:  $|Z| = (Z \bar{Z})^{1/2} = (X^2 + Y^2)^{1/2}$  representa la función compleja y  $\theta$  es el ángulo de un punto genérico *versus* el sistema de coordenadas cartesiano elegido.

La ecuación (27) puede ser representada como:

$$\begin{aligned} f(Z) &= U_{\infty}(X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X-X_0)+i(Y+Y_0)| + i \arctg \left( \frac{Y+Y_0}{X-X_0} \right) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X-X_0)+i(Y-Y_0)| + i \arctg \left( \frac{Y-Y_0}{X-X_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (29)$$

Una vez los términos logarítmicos en la ecuación (29) han sido multiplicados por su conjugado, y las partes real e imaginaria han sido separadas, se obtiene:

$$\phi(x, y) = U_{\infty} X - \frac{\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \arctg \left( \frac{Y+Y_0}{X-X_0} \right) + \frac{\Gamma}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \arctg \left( \frac{Y-Y_0}{X-X_0} \right) \quad (30)$$

$$\psi(x, y) = U_{\infty} Y + \frac{\Gamma}{4} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln[(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2] - \ln[(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2] \right] \quad (31)$$

De acuerdo con la teoría potencial, la relación entre la velocidad potencial ó (potencial de velocidades)  $\phi$ , la función de corriente  $\psi$  y las velocidades del fluido  $V_X$  y  $V_Y$  se define:





$$V_X = U = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y}; \quad V_Y = V = \frac{\partial \phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \psi}{\partial X}; \quad (32)$$

con lo cual la distribución de velocidades en la dirección X e Y queda definida como:

$$U = V_{X_R} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right] \quad (33)$$

$$V = V_{Y_R} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right] \quad (34)$$

Las ecuaciones (33) y (34) proporcionan la velocidad del fluido  $V_X$  e  $V_Y$  en cualquier punto del campo del fluido, cuando son considerados únicamente los dos vórtices de la derecha.

Para determinar las velocidades del fluido sobre la superficie sólida,  $V_X$  e  $V_Y$ , será únicamente necesario considerar  $Y = 0$  en las ecuaciones (33) y (34). El resultado es:

$$V_{X_R} = U_\infty + \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \frac{Y_0}{(X - X_0)^2 + Y_0^2} \right] \quad (35)$$

$$V_{Y_R} = 0 \quad (36)$$

Procediendo del mismo modo para los dos vórtices situados en la parte izquierda de la figura 1, cuyas posiciones coordenadas de sus centros son:  $Z_1 = (-X_0; Y_0)$ ,  $Z_1^* = (-X_0; -Y_0)$ , la función potencial compleja toma la forma: (las coordenadas de estos dos nuevos puntos han sido ya sustituidas en la ecuación).

$$f(Z) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X + iY) - (-X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (-X_0 + iY_0)} \right) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)} \right) \quad (37)$$

(Obsérvese que la velocidad no perturbada  $U_\infty$ , ya ha sido considerada en la función compleja que definía los dos vórtices de la derecha y, dado que la teoría potencial es una teoría lineal, dicha velocidad no ha de ser ahora introducida de nuevo).

Véase que la circulación presentada en la ecuación (37) ha de tener un signo diferente al de la circulación utilizada en la ecuación (26), con lo que el signo de la circulación de la ecuación (37) ha de ser negativo.

La ecuación (37) puede expresarse como:

$$f(Z) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + X_0) + i(Y + Y_0)) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \quad (38)$$



Considerando la forma compleja de los términos logarítmicos, se tiene:

$$f(Z) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln |(X + X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left( \frac{Y + Y_0}{X + X_0} \right) \right] - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln |(X + X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg} \left( \frac{Y - Y_0}{X + X_0} \right) \right] \quad (39)$$

La solución de esta ecuación da lugar a: (Obsérvese que el valor de la circulación es aún considerado como positivo, cuando en realidad es negativo).

$$\phi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{Y + Y_0}{X + X_0} \right) + \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{Y - Y_0}{X + X_0} \right) \quad (40)$$

$$\psi(x, y) = \frac{\Gamma}{4} \frac{1}{\pi} \left[ \ln \left[ (X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2 \right] - \ln \left[ (X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 \right] \right] \quad (41)$$

Recordando lo definido en la ecuación (32), las velocidades  $V_X$  e  $V_Y$  resultan:

$$U = V_{X_L} = \frac{\partial \phi}{\partial X} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right] \quad (42)$$

$$V = V_{Y_L} = \frac{\partial \phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \right] \quad (43)$$

Es necesario recordar que el valor de la circulación en las ecuaciones (42) y (43) es, en realidad, negativo.

La velocidad del fluido  $V_X$  e  $V_Y$  sobre la superficie plana, debido a los dos vórtices (real e imaginario) de la izquierda, se determina considerando  $Y = 0$  en las ecuaciones (42) y (43). El resultado es: (obsérvese que ahora se ha incluido el signo real de la circulación).

$$U = V_{X_L} = -\frac{\Gamma}{\pi} \left[ \frac{Y_0}{(X + X_0)^2 + Y_0^2} \right] \quad (44)$$

$$V = V_{Y_L} = 0 \quad (45)$$

Con el fin de calcular la velocidad total sobre la superficie estática, es necesario considerar el efecto del conjunto total de vórtices sobre la superficie plana. Así:

$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = V_{X_R} + V_{X_L}$ , con lo que:

$$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \frac{Y_0}{(X - X_0)^2 + Y_0^2} \right] + \left[ \frac{-\Gamma}{\pi} \left[ \frac{Y_0}{(X + X_0)^2 + Y_0^2} \right] \right] \quad (46)$$



ecuación que se puede dar como:

$$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \frac{4X X_0 Y_0}{(X^2 + X_0^2 + Y_0^2)^2 - 4X^2 X_0^2} \right] = U_{\infty} + \frac{4\Gamma}{\pi} \left[ \frac{X X_0 Y_0}{B} \right] \quad (47)$$

Véase que la ecuación (47) da la velocidad del fluido a lo largo del eje X y encima de la superficie plana. Las ecuaciones genéricas que dan la distribución de velocidades  $V_X$  e  $V_Y$  en cualquier punto del plano X,Y, se obtienen de la combinación de las ecuaciones genéricas (33) y (42) para  $V_X$  y (34) y (43) para  $V_Y$ .

*Cálculo de las ecuaciones de velocidad mediante la utilización del sistema total de vórtices en una única ecuación.*

Es interesante remarcar que el procedimiento utilizado para desarrollar la ecuación (46), puede acortarse mediante el cálculo del efecto causado por los cuatro vórtices en una sola ecuación. La función potencial compleja que considera el efecto de los cuatro vórtices toma la forma:

$$f(Z) = U_{\infty} Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{Z - Z_0^*}{Z - Z_0} \right) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{Z - Z_1^*}{Z - Z_1} \right) \quad (48)$$

El valor negativo que se ha dado al segundo de los términos es para considerar el valor negativo de la circulación.

Cuando se sustituyen las coordenadas de los vórtices en la ecuación (48), se obtiene:

$$f(Z) = U_{\infty} Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X+iY) - (X_0 - iY_0)}{(X+iY) - (X_0 + iY_0)} \right) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X+iY) - (-X - iY_0)}{(X+iY) - (-X_0 + iY_0)} \right) \quad (49)$$

Esta ecuación puede asimismo presentarse como:

$$f(Z) = U_{\infty} (X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X - X_0) + i(Y + Y_0)}{(X - X_0) + i(Y - Y_0)} \right) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left( \frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)} \right) \quad (50)$$

Extendiendo los términos logarítmicos, se tiene:

$$f(Z) = U_{\infty} (X+iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) - \ln((X - X_0) + i(Y - Y_0)) \right] - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln((X + X_0) + i(Y + Y_0)) - \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \right] \quad (51)$$



Recordando el concepto de logaritmo de una función compleja, se tiene:

$$f(Z) = U_{\infty}(X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X - X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X - X_0}\right) - \left[ \ln|(X - X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X - X_0}\right) \right] - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X + X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X + X_0}\right) - \left[ \ln|(X + X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X + X_0}\right) \right] \right] \quad (52)$$

Extrayendo de la ecuación (52) los términos reales e imaginarios, se tiene:

$$\phi(x, y) = U_{\infty} X - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X - X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X - X_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y + Y_0}{X + X_0}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{Y - Y_0}{X + X_0}\right) \quad (53)$$

$$\psi(x, y) = U_{\infty} Y + \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \ln[(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2] - \ln[(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2] + \ln[(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2] - \ln[(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2] \right] \quad (54)$$

Recordando la relación existente para flujo potencial entre las funciones potencial y de corriente con las velocidades del fluido en la dirección X e Y, ver ecuaciones (32), se obtiene: (obsérvese que se ha considerado el signo real de la circulación para cada uno de los vórtices).

$$V_{x_T} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} + \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right] \quad (55)$$

$$V = V_{y_T} = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} + \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right] \quad (56)$$

Las ecuaciones (55) y (56) son capaces de dar la velocidad del fluido en las direcciones X e Y, y, para cualquier punto del campo fluido bidimensional, el efecto de todos los vórtices existentes es asimismo considerado. Véase que estas dos ecuaciones podrían ser ampliadas para un número genérico de vórtices.



Dado que lo que se requería en el problema es la velocidad del fluido sobre la superficie plana, para obtener el resultado requerido, es únicamente necesario sustituir el valor de  $Y = 0$  en las ecuaciones (55) y (56), obteniendo:

$$V_{\text{wall}} = V_{X_T} = U_{\infty} + \frac{4\Gamma}{\pi} \left[ \frac{X - X_0 - Y_0}{B} \right] \quad (57)$$

$$V = V_{Y_T} = 0 \quad (58)$$

Obsérvese que la ecuación (57) es la misma que la ecuación (47) y que la ecuación (58) produce el mismo resultado que las ecuaciones (36) y (48), determinadas mediante el procedimiento precedente.

*Calculo de la variación temporal de la función potencial de velocidades  $\phi$ , la denominada velocidad potencial*

Con el fin de considerar todos los términos involucrados en la ecuación (15), es necesario determinar la velocidad potencial  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}}$ . Este término, considera la variación

temporal de la posición de los vórtices, con lo que no es necesario que se considere cuando se quieren estudiar vórtices estacionarios.

Matemáticamente, la velocidad temporal del potencial de velocidades, para un flujo vorticular dado, se puede representar como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \frac{\partial Y_0}{\partial t} \quad (59)$$

Para el presente caso, esta ecuación ha de ser calculada sobre la placa plana, con lo que se puede establecer:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{\text{wall}} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{\text{wall}} \frac{\partial Y_0}{\partial t} \quad (60)$$

Es necesario tener presente que los parámetros  $X_0$  e  $Y_0$  representan la posición del centro del vórtice real. (Se ha elegido el vórtice de la derecha, con el fin de determinar su velocidad de desplazamiento).

La ecuación (60) puede ser aplicada a cada uno de los dos vórtices reales, sumando luego los resultados obtenidos, ecuación (63), o bien puede ser aplicada directamente al conjunto de vórtices, siempre que se determine previamente la función potencial de velocidades de dicho conjunto de vórtices, para este caso, se aplicara directamente la ecuación (59) o la (60).



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{(R)} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{(L)} \quad (61)$$

En cualquier caso, debe recordarse que cada término lleva su circulación asociada.

*Calculo de la velocidad del vórtice*

Los términos  $\frac{\partial X_0}{\partial t}$  y  $\frac{\partial Y_0}{\partial t}$  de la ecuación (59) representan la velocidad del vórtice real de la derecha con respecto al sistema de coordenadas central X, Y. Para determinar dichos términos, será necesario considerar el efecto que los otros tres vórtices causan sobre el vórtice elegido. Para realizar dicha operación es necesario determinar la denominada *función potencial reducida*, que se define como:

$$\phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty Z + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln(Z - Z_0^*) - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{Z - Z_1^*}{Z - Z_1}\right) \quad (62)$$

siendo:  $Z_0^* = (X_0 - iY_0)$ ;  $Z_1 = (-X_0 + iY_0)$ ;  $Z_1^* = (-X_0 - iY_0)$ ;  $Z = (X + iY)$

Sustituyendo las diferentes coordenadas de los tres vórtices en la ecuación (62), se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty (X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + iY) - (X_0 - iY_0)) \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{(X + iY) - (-X_0 - iY_0)}{(X + iY) - (-X_0 + iY_0)}\right) \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty (X + iY) + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln\left(\frac{(X + X_0) + i(Y + Y_0)}{(X + X_0) + i(Y - Y_0)}\right) \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = f^*(z) = U_\infty X + iU_\infty Y + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X - X_0) + i(Y + Y_0)) \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \ln((X + X_0) + i(Y + Y_0)) + \frac{i}{2\pi} \ln((X + X_0) + i(Y - Y_0)) \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \phi^* + i\psi^* = U_\infty X + iU_\infty Y + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X - X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{(Y + Y_0)}{X - X_0}\right) \right] \\ - \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X + X_0) + i(Y + Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)}\right) \right] \\ + \frac{i}{2} \frac{\Gamma}{\pi} \left[ \ln|(X + X_0) + i(Y - Y_0)| + i \operatorname{arctg}\left(\frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)}\right) \right] \end{aligned} \quad (66)$$



con lo que:

$$\phi^* = U_\infty X - \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \arctg\left(\frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)}\right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \arctg\left(\frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)}\right) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \arctg\left(\frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)}\right) \right] \quad (67)$$

$$\psi^* = U_\infty Y + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2) - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2) + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2) \quad (68)$$

La velocidad del vórtice localizado en el punto  $(X_0 ; Y_0)$  se define como:

$$U_0 = \frac{\partial X_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial X} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} \quad (69)$$

$$V_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = - \frac{\partial \psi^*}{\partial X} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} \quad (70)$$

Derivando las funciones potencial y de corriente, ecuaciones (67) y (68), se obtiene:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial X} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \quad (71)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial Y} = - \frac{\partial \psi^*}{\partial X} = - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y+Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \quad (72)$$

sustituyendo  $X = X_0$  y  $Y = Y_0$  en las ecuaciones (71) y (72), se obtiene:

$$U_0 = \frac{\partial X_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial X} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial Y} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{Y_0}{Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{Y_0}{X_0^2 + Y_0^2} = U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \frac{X_0^2}{Y_0(X_0^2 + Y_0^2)} \right] \quad (73)$$



$$\begin{aligned}
 V_0 = \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi^*}{\partial Y} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} &= - \frac{\partial \psi^*}{\partial X} \bigg|_{\substack{X=X_0 \\ Y=Y_0}} = \frac{\Gamma}{4 \pi} \left( \frac{X_0}{X_0^2 + Y_0^2} \right) - \frac{\Gamma}{4 \pi X_0} = \\
 &= \frac{\Gamma}{4 \pi} \left[ \frac{-Y_0^2}{X_0 (X_0^2 + Y_0^2)} \right]
 \end{aligned} \quad (74)$$

Las ecuaciones (73) y (74) dan la velocidad del vórtice respecto a los ejes X e Y respectivamente. Recuerdese que el vórtice analizado se halla inicialmente en el punto  $X = X_0$  ;  $Y = Y_0$ ; y su velocidad de desplazamiento es debida al efecto que los otros tres vórtices causan sobre el elegido.

*Cálculo de los términos*  $\frac{\partial \phi}{\partial X_0}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}$

Para calcular los últimos dos términos necesarios para evaluar completamente las ecuaciones (59) y (60), la función potencial  $\phi$ , que considera el efecto de los cuatro vórtices, ha de ser calculada y posteriormente derivada con respecto a  $X_0$  y  $Y_0$ ; dicha función potencial de velocidades ha sido ya previamente determinada, y viene definida como la ecuación (53). La ecuación (54) proporcionaba, asimismo, la función de corriente  $\psi$  generada por el conjunto de los cuatro vórtices.

Derivando la ecuación (53) con respecto a  $X_0$  y  $Y_0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial X_0} = & - \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(Y + Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(Y - Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \\
 & - \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(Y + Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(Y - Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}
 \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} = & - \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} \\
 & + \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}
 \end{aligned} \quad (76)$$

En realidad, y de acuerdo con la ecuación (60), estos dos términos (ecuaciones (75) y (76)), han de ser evaluados sobre la superficie plana que separa los vórtices reales con los imaginarios. Lo cual significa que las ecuaciones (75) y (76) han de ser evaluadas cuando  $Y = 0$ , y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \bigg|_{Y=0} = & - \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(Y_0)}{(X - X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(-Y_0)}{(X - X_0)^2 + (-Y_0)^2} \\
 & - \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2 \pi} \frac{(-Y_0)}{(X + X_0)^2 + (Y_0)^2}
 \end{aligned} \quad (77)$$





$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{(Y_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{\pi} \frac{(Y_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \quad (78)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{((X-X_0)^2 + Y_0^2)((X+X_0)^2 + Y_0^2)} \quad (79)$$

Procediendo del mismo modo con la ecuación (76), se obtiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{Y=0} &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \end{aligned} \quad (80)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{Y=0} = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2 + (Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2 + (Y_0)^2} \quad (81)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{Y=0} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{X_0}{((X-X_0)^2 + Y_0^2)((X+X_0)^2 + Y_0^2)} \quad (82)$$

Es necesario puntualizar que, al llevar a término las derivaciones precedentes, la siguiente consideración ha de ser recordada:  $\frac{\partial \phi}{\partial X_0} \neq \frac{\partial \psi}{\partial Y_0}$ ; y  $\frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \neq -\frac{\partial \psi}{\partial X_0}$

A partir de este punto, se utilizara la siguiente relación:

$$((X-X_0)^2 + Y_0^2)((X+X_0)^2 + Y_0^2) = B \quad (83)$$

*Cálculo final de la ecuación (60)*

Para determinar el resultado final de la ecuación (60), lo único que hace falta es sustituir los diferentes términos hallados en dicha ecuación. Dichos términos están definidos en las ecuaciones (79), (82), (73) y (74). El resultado de la sustitución es:

La ecuación (62) era:  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{wall}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \right|_{\text{wall}} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \right|_{\text{wall}} \frac{\partial Y_0}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{Y=0} &= -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{B} \left[ \frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right] \left[ U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{(X_0^2 + Y_0^2)} \right] \\ &+ \frac{2\Gamma X_0}{\pi} \left[ \frac{(-X^2 + Y_0^2 + X_0^2)}{B} \right] \left[ \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{X_0}{(X_0^2 + Y_0^2)} - \frac{\Gamma}{4\pi X_0} \right] \end{aligned} \quad (84)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} = & -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \frac{U_\infty}{B} \left( \frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) - \frac{\Gamma^2}{2\pi^2} \left( \frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) \\ & + \frac{\Gamma^2 Y_0^2}{2\pi^2} \left( \frac{X^2 + Y_0^2 + X_0^2}{B(X_0^2 + Y_0^2)} \right) + \frac{\Gamma^2 X_0^2}{2\pi^2} \left( \frac{-X^2 + Y_0^2 + X_0^2}{B(X_0^2 + Y_0^2)} \right) - \frac{\Gamma^2}{2\pi^2} \left( \frac{-X^2 + Y_0^2 + X_0^2}{B} \right) \end{aligned} \quad (85)$$

Reordenando la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} = & -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \frac{U_\infty}{B} \left( \frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) - \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 B} (2(X_0^2 + Y_0^2)) \\ & + \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 B(X_0^2 + Y_0^2)} (X^2(Y_0^2 - X_0^2) + (X_0^2 + Y_0^2)^2) \end{aligned} \quad (86)$$

ecuación que se puede dar como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} = & -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{Y_0}{2} \frac{U_\infty}{B} \left( \frac{X^2 + X_0^2 + Y_0^2}{B} \right) + \\ & \frac{\Gamma^2}{2\pi^2 B(X_0^2 + Y_0^2)} (X^2(Y_0^2 - X_0^2) - (X_0^2 + Y_0^2)^2) \end{aligned} \quad (87)$$

ecuación que caracteriza la variación temporal de la función potencial.

*Generalización de la ecuación (60), ecuación (59)*

Si, en lugar de determinar el término  $\frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}}$  sobre la superficie plana, se quiere hallar

el término genérico  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  en un punto cualquiera del campo fluido, término que está

definido en la ecuación (59), será necesario seguir el mismo procedimiento que el utilizado para hallar el término definido en la ecuación (60).

La ecuación (59) tomaba la forma:  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial X_0} \frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial Y_0} \frac{\partial Y_0}{\partial t}$ .

Los términos que dan la velocidad del vórtice,  $\frac{\partial X_0}{\partial t}$  y  $\frac{\partial Y_0}{\partial t}$ , son los mismos que los hallados previamente, y están definidos en las ecuaciones (73) y (74). Pero ahora no es necesario que los términos  $\frac{\partial \phi}{\partial X_0}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial Y_0}$  sean evaluados en el punto  $Y = 0$ , dado que



en la ecuación (59) estos términos están definidos en forma genérica. La forma genérica de estos dos términos, fue determinada en las ecuaciones (75) y (76). Así, sustituyendo las ecuaciones (73), (74), (75) y (76) en la ecuación (59), se obtendrá la forma genérica de la variación temporal de la función potencial de velocidades, que es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & \left( -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \right) \\ & \left[ U_\infty + \frac{\Gamma}{4\pi Y_0} - \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \frac{Y_0}{X_0^2+Y_0^2} \right) \right] + \\ & \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X-X_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(X+X_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \right) \\ & \left[ \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \frac{X_0}{X_0^2+Y_0^2} \right) - \frac{\Gamma}{4\pi X_0} \right] \end{aligned} \quad (88)$$

#### *Distribución genérica de presiones. Caso vórtices estacionarios*

La ecuación (14) es capaz de determinar la presión en cualquier punto del campo fluido, en función de la magnitud de la velocidad del fluido en dicho punto y de la variación temporal del potencial de velocidades. Para el caso de que se quieran considerar vórtices estáticos, entonces el término que caracteriza la variación temporal de la velocidad potencial se debe considerar nulo, la ecuación resultante tendrá la forma:

$$\left( \rho \frac{V^2}{2} \right) + P = P_0 \quad (89)$$

Donde:

$$V^2 = V_X^2 + V_Y^2 \quad (90)$$

Las ecuaciones que caracterizan las velocidades  $V_X$  e  $V_Y$  en cualquier punto del campo fluido, han sido halladas anteriormente y definidas como ecuaciones (55) y (56). Dichas expresiones tomaban la forma:

$$V_{X_T} = \frac{\partial \psi}{\partial Y} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{(Y+Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y+Y_0)^2} - \frac{(Y-Y_0)}{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2} \right. \\ \left. + \frac{(Y-Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y-Y_0)^2} - \frac{(Y+Y_0)}{(X+X_0)^2+(Y+Y_0)^2} \right] \quad (55)$$



$$V_{Y_T} = V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} - \frac{(X - X_0)}{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} + \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y - Y_0)^2} - \frac{(X + X_0)}{(X + X_0)^2 + (Y + Y_0)^2} \right] \quad (56)$$

Con lo cual, la presión en cualquier punto del campo de fluido bidimensional se calculará sustituyendo las ecuaciones (55) y (56) en la ecuación (90) y esta en la ecuación (89). Si, además, en estas ecuaciones se le asigna a la coordenada  $Y$ , el valor  $Y = 0$ , entonces, se obtendrá la presión a lo largo del eje  $X$  situado sobre la placa plana horizontal.

*Distribución genérica de presiones. Caso vórtices en movimiento (dinámicos)*

La evaluación completa de la ecuación (14) implica considerar el término que caracteriza la variación temporal del potencial de velocidades, con lo que la ecuación (88) deberá ser implementada a los términos ya hallados de la ecuación (14). Dicha ecuación era:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left( \rho \frac{V^2}{2} \right) + P = P_0 \quad (14)$$

*Distribución de presiones sobre la superficie plana horizontal. Caso vórtices dinámicos.*

Si se quiere evaluar la distribución de presiones sobre la placa plana y teniendo además en cuenta el posible desplazamiento de los vórtices, la ecuación a utilizar es la (15), la cual tomaba la forma:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{\text{wall}} + \left( \rho \frac{V_{\text{wall}}^2}{2} \right) + P_{(x)} = P_0 \quad (15)$$

Los diferentes términos de esta ecuación, fueron ya definidos en las ecuaciones (87) y (57). Cuando estas dos ecuaciones son sustituidas en la ecuación (15), y considerando el caso particular en que  $U_\infty = 0$ , se obtiene:

$$P - P_0 = -\frac{\rho_0}{2\pi^2} \frac{\Gamma^2}{\left[ \left( \frac{4X - X_0}{B} - \frac{Y_0}{B} \right)^2 + \frac{A}{B(X_0^2 + Y_0^2)} \right]} \quad (91)$$

$$\text{donde se ha definido: } A = X^2(Y_0^2 - X_0^2) - (X_0^2 + Y_0^2)^2 \quad (92)$$

La ecuación (91) caracteriza la distribución de presiones a lo largo del eje  $X$  situado sobre la placa plana horizontal (suelo) y considerando que no existe corriente de fluido no perturbada  $U_\infty = 0$ .



A continuación se presentan algunos resultados que se obtienen directamente de la aplicación de algunas de estas ecuaciones. Otras gráficas, y aplicaciones quedan como ejercicio para el lector

Supóngase que se tienen dos vórtices situados paralelamente sobre una superficie plana (suelo) y que el centro de dichos vórtices está situado en los puntos:  $Z_0 = (X_0, Y_0) = (1, 1)$ ; y  $Z_0^* = (-X_0, Y_0) = (-1, 1)$ . Si, por ejemplo, se quiere ver cuál es el desplazamiento de dichos vórtices debido a su interacción mutua, e incluso para diferentes velocidades no perturbadas del fluido, se deberá aplicar la ecuación (91) para el caso de que  $U_\infty = 0$ , y la ecuación (15) para el caso de que  $U_\infty \neq 0$ . Tomando los valores de la circulación y

la densidad del fluido como:  $\Gamma = 0,1 \left( \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right)$ ;  $\rho_0 = 1,2 \left( \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \right)$ , se obtiene:

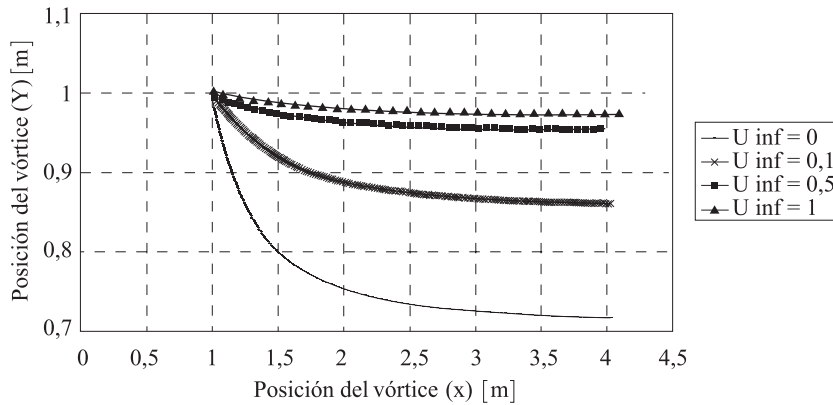


Fig. 72.2  
Posición del vórtice  
dependiendo de la  
iteración con su  
homologo y la  
velocidad no pertur-  
bada del fluido.  
Posición inicial del  
vórtice.  
 $Z_0 = (X_0; Y_0) = (1, 1)$ .

(Obsérvese que a medida que la velocidad no perturbada aumenta, el vórtice tiende a desplazarse en la dirección de dicha velocidad). Aunque no se muestra en la figura 72.2, a medida que la velocidad no perturbada aumenta, la velocidad de desplazamiento del vórtice también aumenta

La figura 72.3 presenta la distribución de presiones a lo largo del eje x y sobre la placa plana (suelo). Véase que la presión mínima aparece en un punto situado justamente debajo de la posición del centro del vórtice. La figura 72.4, presenta el flujo de vorticidad sobre la placa plana, caracterizado por la ecuación (23). Obsérvese el cambio del flujo de vorticidad justamente debajo de la posición del centro del vórtice.

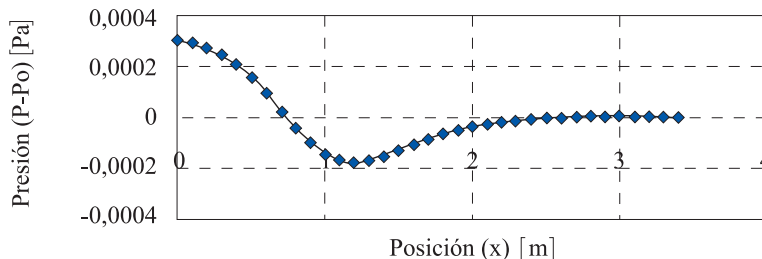
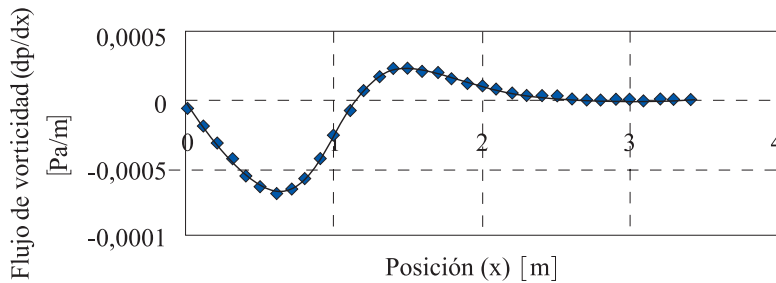


Fig. 72.3  
Distribución de  
presiones sobre la  
placa plana y a lo  
largo del eje "x".  
Ecuación (91).  
 $Z_0 = (X_0, Y_0) = (1, 1)$ .  
 $U_\infty = 0$



Fig. 72.4  
Flujo de vorticidad  
calculado mediante la  
ecuación (23).  
 $Z_0 = (X_0, Y_0) = (1, 1)$ .  
 $U_\infty = 0$



Las figuras 72.5 y 72.6, presentan la distribución de presiones y el flujo de vorticidad determinados mediante las ecuaciones (89) y (23), respectivamente. Las mismas condiciones que las utilizadas para hallar las figuras 72.3 y 72.4 son también utilizadas ahora.

Fig. 72.5  
Distribución de presio-  
nes sobre la placa  
plana y a lo largo del  
eje "x".  
Ecuación (89).  
 $Z_0 = (X_0, Y_0) = (1, 1)$ .  
 $U_\infty = 0$

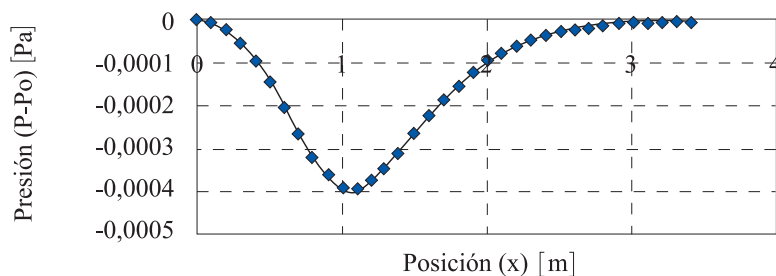
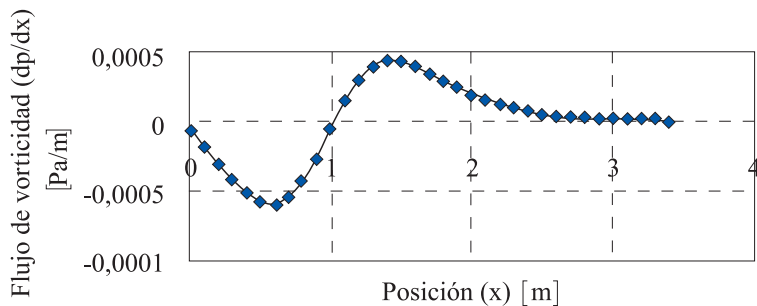


Fig. 72.6  
Flujo de vorticidad  
calculado mediante la  
ecuación (23) y basado  
en la distribución de  
presiones presentada  
en la figura 72.4.  
 $Z_0 = (X_0, Y_0) = (1, 1)$ .  
 $U_\infty = 0$





→ 12





## Golpe de ariete

### 12.1 Fenómeno físico

El fenómeno del golpe de ariete tiene un gran interés para la industria de transporte de fluidos, puesto que permite evaluar las pulsaciones de presión experimentadas en cualquier punto del conducto cuando el fluido se somete a deceleraciones o a aceleraciones, ya sea por el cierre de válvulas o por la puesta en marcha o parada de máquinas que existan en el circuito. En consecuencia, su entendimiento, ha de permitir evitar posibles fallos catastróficos en sistemas de tuberías.

El estudio al completo del fenómeno del golpe de ariete requiere tener en cuenta que el fluido es compresible, que el conducto es elástico y que el régimen de flujo es transitorio, lo cual implica que las ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno sean de difícil resolución, siendo necesarios métodos gráficos o bien programas informáticos para calcular y visualizar las fluctuaciones de presión y caudal que experimenta el fluido.

Si, por ejemplo, se analiza el caso de la apertura o el cierre de una válvula, se observa que, al cerrar una válvula rápidamente, la energía cinética del fluido se transforma en energía de presión, que produce una dilatación de la tubería. Al abrir rápidamente una válvula, se produce una depresión de la tubería, o un golpe de ariete negativo.

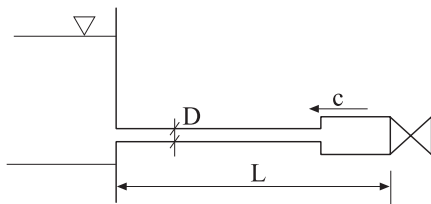
Aunque la apertura o el cierre instantáneos de una válvula son físicamente imposibles, su estudio va a aportar conocimientos decisivos en el estudio de los casos reales.

Sea un fluido que circula por el conducto definido en la figura siguiente. En un momento dado, se cierra por completo e instantáneamente la válvula localizada en el extremo del conducto. Al producirse dicho cierre, se crea a la entrada de la válvula una onda elástica, es decir, una onda de presión que se propaga por la tubería a una veloci-



dad  $c$ , celeridad del fluido. Dicha onda tiene una dirección contraria a la velocidad del fluido y, cuando llega al extremo superior de la tubería, retorna hacia la válvula, acreando consigo una descompresión del conducto. Al llegar de nuevo la onda a la válvula, cambia de nuevo de dirección y retorna hacia el depósito. En teoría, el proceso se repite indefinidamente, aunque, en realidad, las pérdidas de energía que experimenta el fluido en su movimiento alternativo originan un decaimiento de las sobrepresiones y depresiones que se crean en la tubería.

Fig. T 12.1  
Esquema de la  
evolución de una  
onda de presión a  
lo largo del  
conducto



Tal como se observa en la figura precedente, si  $c$  es la velocidad de propagación de la onda de presión en el medio, onda que se produce al cerrar instantáneamente la válvula, y  $L$  es la longitud de la tubería, el tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia entre la válvula y el embalse es:

$$t_0 = \frac{L}{c}$$

Entendiendo que no se consideran las pérdidas de energía, de acuerdo con la exposición que se realiza a continuación, se observa que para  $T = 4t_0$  el ciclo se repite.

Sea un conducto que separa un embalse y una válvula de regulación. Se quiere estudiar cómo evolucionan las ondas de presión a lo largo del conducto al cerrar la válvula instantáneamente y por completo. En la explicación que sigue, cada punto se refiere a la situación definida en cada una de las figuras que se detallan a continuación.

1. Situación inicial. El fluido se desplaza por la tubería con una velocidad constante  $v$ . Situación de régimen permanente.
2. Tiempo inicial. La válvula se cierra instantáneamente, con lo que, la velocidad del fluido a la entrada de la válvula se anula.
3. Tiempo  $t_0/2$ . La onda de presión se ha propagado hacia el embalse con una celeridad  $c$  y el frente de onda ha llegado a la mitad de la tubería. En la mitad derecha, la velocidad del fluido es nula y la tubería se ha dilatado por efecto de la sobrepresión creada. En cambio, la mitad izquierda mantiene el radio y la velocidad del fluido.
4. Tiempo  $t_0$ . La onda de presión ha llegado al embalse; el fluido en el interior del conducto se encuentra en reposo, aunque no esté en equilibrio, puesto que existe una sobrepresión en toda la tubería.



5. Tiempo  $3t_0/2$ . Ahora la onda está retornando hacia la válvula; la mitad izquierda de la tubería se ha contraído a su forma inicial; el fluido circula a una velocidad  $v$  y en sentido contrario al original. En el resto de tubería, sigue habiendo una sobrepresión.

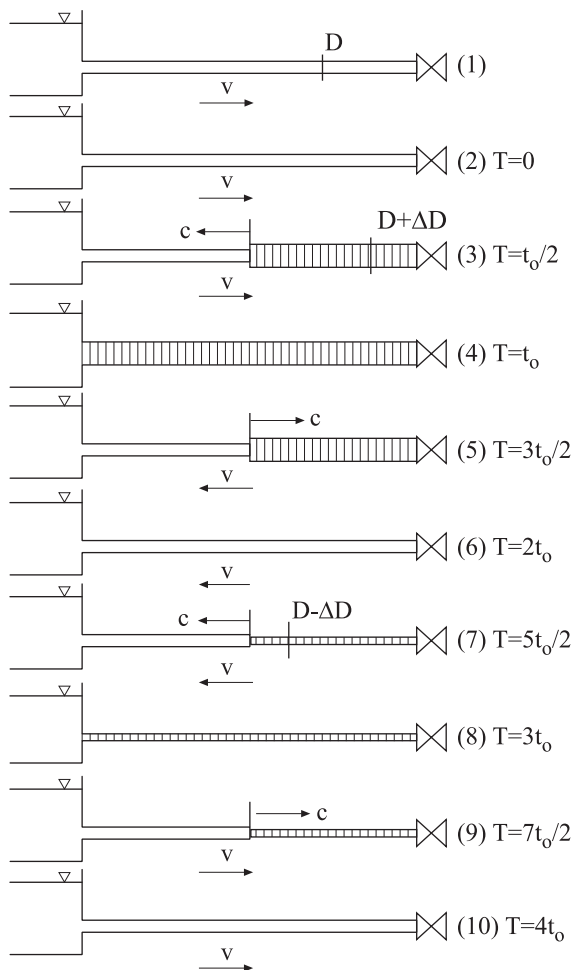


Fig. T 12.2  
Fenómeno del  
golpe de ariete

6. Tiempo  $2t_0$ . Todo el conducto tiene el diámetro inicial pero, a diferencia del estado inicial, el fluido se desplaza a velocidad  $v$ , pero en sentido contrario, hacia el depósito. Debido a la inercia del fluido, la presión en el conducto sigue disminuyendo, con lo que la onda se sigue propagando, ahora hacia el depósito, creando una depresión en el conducto, lo cual da lugar a una disminución del diámetro del tubo.

7. Tiempo  $5t_0/2$ . La onda de presión (depresión) alcanza la mitad de la tubería, el diámetro del conducto en esta mitad de conducto ha disminuido; el fluido en esta zona está en reposo, siendo su presión menor que la que había en el estado inicial. En la otra mitad del conducto, el fluido sigue fluyendo hacia el tanque.



8. Tiempo  $3t_0$ . El fluido, en toda la tubería, se encuentra en reposo pero no en equilibrio, dado que su presión es menor que la que existía en el estado inicial. Este desequilibrio da lugar a que el fluido vuelva a circular con velocidad  $v$  en sentido a la válvula.

9. Tiempo  $7t_0/2$ . En la mitad de la tubería cercana al depósito, el fluido se desplaza a una velocidad  $v$  hacia la válvula y su diámetro ha recuperado el diámetro normal; la mitad derecha del conducto sigue en depresión y en reposo (no en equilibrio) y la onda se desplaza a velocidad  $c$ , con el mismo sentido que  $v$ .

10. Tiempo  $4t_0$ . La tubería recupera el tamaño inicial y se repiten exactamente las condiciones iniciales, en que el fluido se desplazaba hacia la válvula a una velocidad  $v$  y la válvula se cerraba instantáneamente. Se demuestra, por tanto, que el período es de  $4t_0$ .

## 12.2 Expresiones para obtener el valor de la presión máxima o sobrepresión en el conducto

Este estudio fue realizado inicialmente por Joukowski, aunque la solución definitiva la dio Allievi.

La sobrepresión que se obtenga en el conducto dependerá de la velocidad de cierre de la válvula. Denominando  $t_c$  el tiempo de cierre de la válvula, se distinguen tres casos:

**Cierre instantáneo:**  $t_c=0$ . La válvula se cierra instantáneamente.

**Cierre rápido:**  $0 < t_c < 2t_0$ . La válvula se cierra antes de que la onda de presión haya retornado a la válvula. En este caso, se verá que la presión máxima será la misma que en el caso anterior.

**Cierre lento:**  $t_c > 2t_0$ . La depresión de la onda elástica llega a la válvula antes de que se complete el cierre de la misma e impide el aumento ulterior de la presión.

1. Determinación de la sobrepresión máxima para el caso de cierre instantáneo o rápido.

La fuerza de inercia asociada a la deceleración del fluido se evalúa:

$$F_i = -m \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

donde  $\Delta t$  es el tiempo transcurrido para que una cierta masa  $m = \rho l \cdot A$  de fluido que ocupa una longitud finita de la tubería ( $l$ ) reduzca su velocidad a un cierto valor finito dependiendo del tipo de cierre.

Se considera  $v_0$  la velocidad inicial del fluido y  $v$  la velocidad final:

Para un cierre total de la válvula  $\Delta v = -v_0$ , se tiene:

$$F_i = \rho \cdot l \cdot A \frac{v_0}{\Delta t}$$

Para un cierre parcial de la válvula:  $\Delta v = v - v_0$

$$F_i = \rho \cdot l \cdot A \frac{v_0 - v}{\Delta t}$$

Recuérdese que  $l$  es la longitud recorrida por la onda elástica en el tiempo  $\Delta t$ .

La sobrepresión que experimenta el fluido es:

$$\Delta P = \frac{F_i}{A}$$

Dado que la velocidad de propagación de la onda elástica es  $c = \frac{l}{\Delta t}$ , al sustituir esta ecuación en la ecuación del aumento de presión, se obtiene:

Para el cierre total:

$$\Delta P = \frac{F_i}{A} = \rho \cdot c \cdot v_0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho} = c v_0 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho \cdot g} = \frac{c v_0}{g} = \Delta H \Rightarrow \text{fórmula de Joukowsky}$$

Para el cierre parcial:

$$\Delta P = \rho \cdot c \cdot (v_0 - v)$$

Es necesario destacar que la expresión que determina la velocidad de propagación de la onda de presión en una tubería, cuando se considera que tanto el fluido como el propio conducto son compresibles, es:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\beta \cdot D}{E \cdot \delta}}}$$

donde:

$c \equiv$  celeridad de la onda elástica [m/s]

$\beta \equiv$  módulo de elasticidad del fluido [N/m<sup>2</sup>] (para el agua,  $\beta = 2,03 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup>)

$\rho \equiv$  densidad del fluido [Kg/m<sup>3</sup>]

$D \equiv$  diámetro de la tubería [m]

$E \equiv$  módulo de elasticidad del material de la tubería (para acero,  $E = 2,5 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>)

$\delta \equiv$  espesor de la pared del conducto [m]



2. Para el caso en que el cierre de la válvula sea lento, total y uniforme, y la tubería se considere rígida (indeformable).

Como se ha visto anteriormente, la fuerza de inercia depende de la masa de fluido que se decelera y de la variación de la velocidad con respecto al tiempo; la sobrepresión que se produce es asimismo función de estos dos factores.

$$F_i = -\rho \cdot L \cdot A \frac{dv}{dt}$$

$$\Delta P = \frac{F_i}{A} = -\rho \cdot L \cdot \frac{dv}{dt}$$

Para el cierre total, la velocidad final será cero:

$$\Delta P = \frac{\rho \cdot L \cdot v_0}{t_c}$$

ecuación que proporciona el incremento de presión para cierre lento y uniforme y tubería rígida. Obsérvese que la longitud de la tubería es la longitud total de la misma, puesto que para el tiempo de cierre menor a  $t_c$  la onda de presión ha llegado al extremo superior del conducto, y todo el fluido del conducto ha quedado afectado.

Si el conducto se considera elástico, se tiene:

$$\Delta P = k \frac{\rho \cdot L \cdot v_0}{t_c}$$

donde el valor de  $k$  en general oscila entre 1 y 2,  $1 < k < 2$ .

Se concluye que las condiciones en que la sobrepresión debida al golpe de ariete es mayor son:

- Cuanto mayor es la longitud de la tubería.
- Cuanto mayor es la velocidad del fluido en la tubería.
- Cuanto más rápido es el cierre de la válvula.

Algunos de los medios que se emplean actualmente para reducir el golpe de ariete son:

- Cerrar lentamente la válvula de regulación.
- Escoger un diámetro de tubería grande, con el fin de reducir la velocidad del fluido que circule por ella.
- Instalar las bombas con un volante de inercia, para que, en el caso de corte de la corriente, se reduzca lentamente la velocidad de la máquina y, por consiguiente, la velocidad del fluido en la tubería.

- Inyectar aire con un compresor para producir un muelle elástico durante la sobrepresión.
- Utilizar una válvula de seguridad, normalmente cerrada, pero que se abre cuando la sobrepresión sobrepasa un límite establecido.
- Utilizar acumuladores con cámara de aire para que absorban la energía creada al producirse la sobrepresión.
- Utilizar chimeneas de equilibrio que permitan un alivio de la sobrepresión producida.

### 12.3 Estudio temporal de las perturbaciones de presión en un punto genérico del conducto

El estudio del golpe de ariete para un sistema de tuberías donde la válvula de cierre está situada hacia la mitad de un conducto es especialmente interesante, puesto que se muestran las ondas de presión y depresión con más detenimiento y de manera simultánea.

La figura siguiente muestra la evolución de las ondas de presión, tanto aguas arriba como aguas abajo de la válvula, al producirse un cierre total e instantáneo.

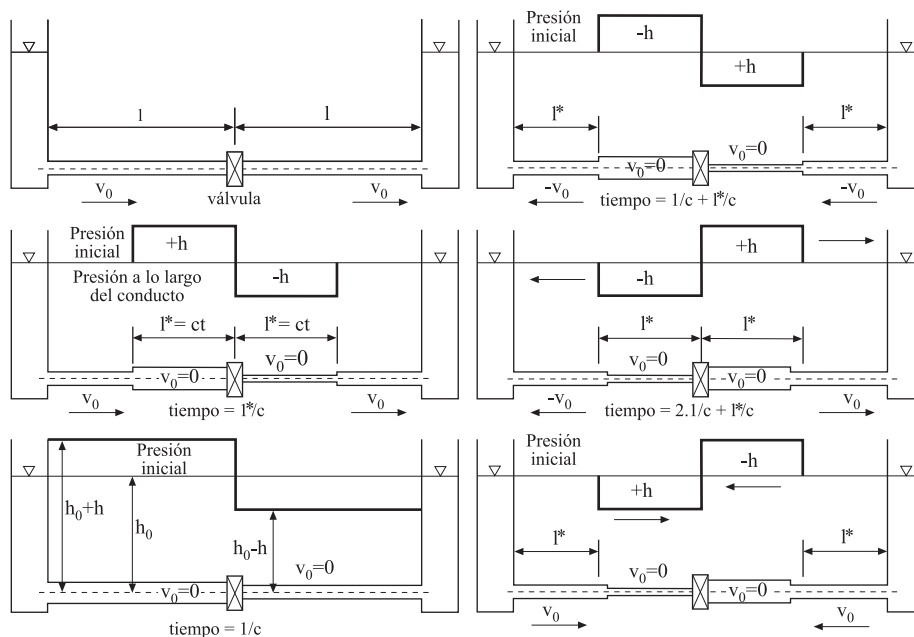


Fig. T 12.3  
Evolución de las ondas de presión en un conducto con una válvula situada en su parte central  
Fuente: Douglas JF, Gasiorek JM, Swaffield JA. Fluid Mechanics 3rd edition, 1998

Se observa que, tanto en la tubería superior como en la inferior, el ciclo vuelve a su estado inicial para  $t = 4l/c$ , tal como se había deducido para el caso de un depósito y una tubería; además, los ciclos de ambas tuberías se superponen.

Partiendo de la descripción del transitorio en los conductos, es posible realizar el diagrama de presión respecto al tiempo. Este diagrama se halla calculando el tiempo para



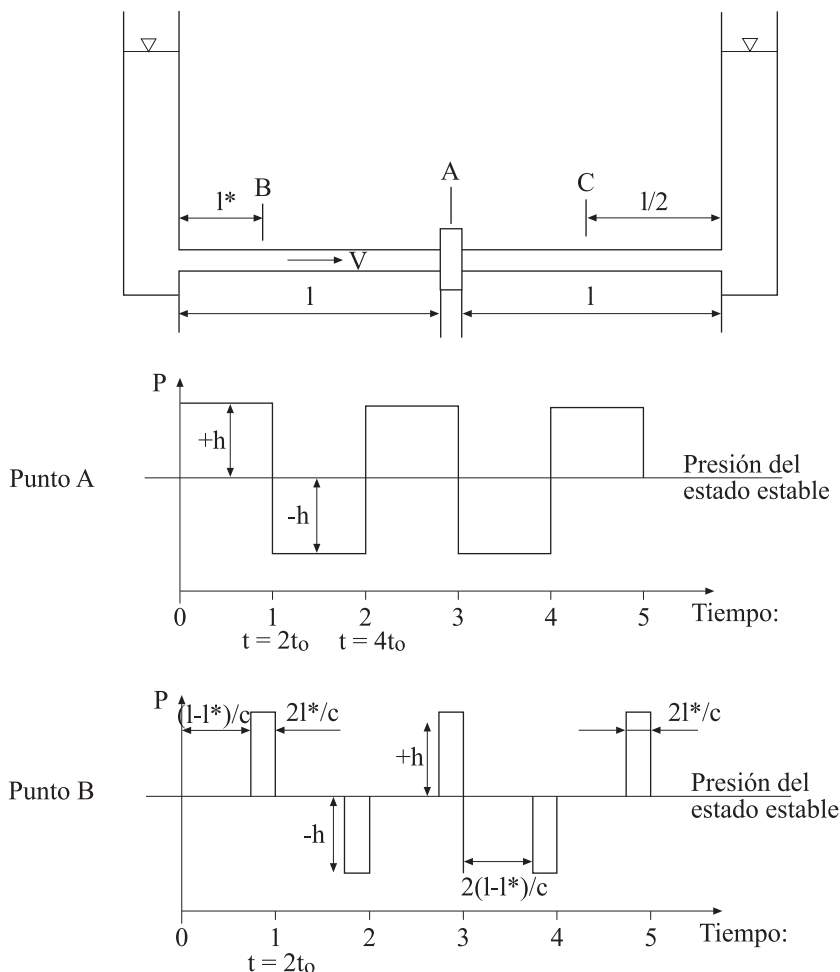
el cual alguna de las ondas de  $\pm h$  llega a un punto determinado del sistema, y se asume que la velocidad de propagación  $c$  es constante.

El interés por el estudio de los transitorios es debido a la posibilidad de limitar la presión máxima, que se consigue disminuyendo la velocidad de cierre de la válvula.

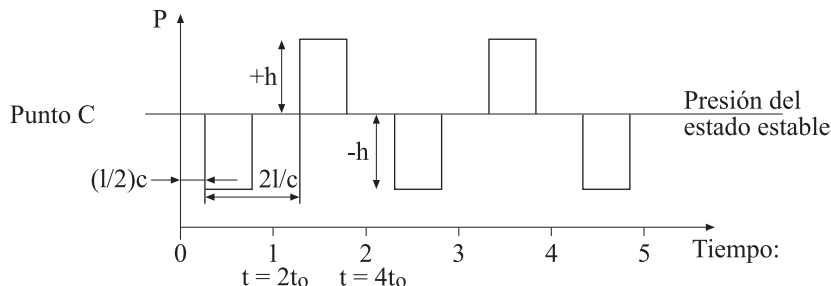
Mediante estas gráficas, se puede extraer que, mientras el tiempo de cierre de la válvula no supere un período de la tubería, no se producirá disminución de presión. En realidad, la reducción de presión se produce cuando la onda negativa procedente de aguas arriba llega a la válvula.

En la figura siguiente, se presentan las variaciones de presión para cierre instantáneo y cuando no se considera el efecto del rozamiento en el conducto. Estas variaciones de presión se presentan en tres puntos diferentes, A, B y C; obsérvese que, según el punto elegido, el tiempo de permanencia a alta o a baja presión variará.

Fig. T 12.4  
Variación temporal  
de la presión en  
diferentes puntos  
de la instalación  
Fuente:  
Douglas JF,  
Gasiorek JM,  
Swaffield JA.  
Fluid Mechanics  
3rd edition, 1998







Es muy interesante remarcar que, el efecto de la fricción del conducto, provoca que la sobrepresión en la entrada de la válvula, sea, durante un cierto periodo de tiempo, mayor que la sobrepresión teórica ( $pcv$ ); y está sobrepresión será tanto mayor cuanto mayor sean las pérdidas de carga del conducto. En consecuencia, para tuberías de gran longitud esta sobrepresión puede ser muy significativa.

A la entrada de la válvula, y para un tiempo  $4l/c$ , la presión será mínima. Dicha presión en valores absolutos ha de ser mayor que la presión de vapor del fluido; si no es así, se producirá cavitación. Es necesario remarcar que, en una instalación, hay que evitar la aparición de presiones negativas, puesto que su efecto destructivo es incluso mayor que el provocado por las sobrepresiones.

## 12.4 Ecuaciones diferenciales que caracterizan el fenómeno del golpe de ariete

Se obtienen a partir de la ecuación de continuidad y de la conservación de la cantidad de movimiento.

Las variables dependientes serán la velocidad media del fluido y la presión, mientras que las independientes, el tiempo y la distancia.

Las hipótesis de trabajo son:

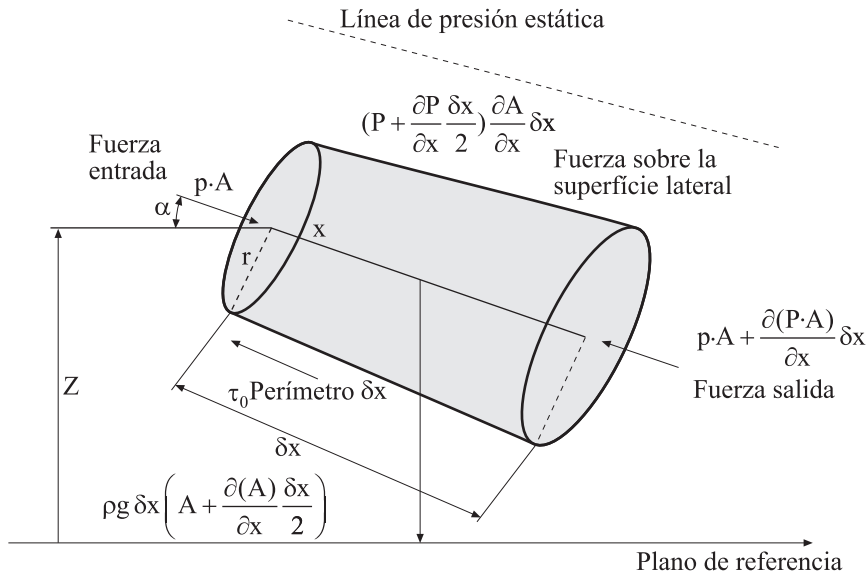
- Flujo unidimensional.
- La fricción se asume proporcional a la velocidad al cuadrado. Las condiciones varían suficientemente despacio como para que puedan ser incorporadas las pérdidas por rozamiento en la ecuación de la cantidad de movimiento.
- Se considera que tanto el fluido como el conducto son elásticos.
- En todo momento el conducto está lleno de líquido (no se llega nunca a la presión de vapor).



### 12.4.1 Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

Considérese un elemento diferencial de fluido localizado en el interior de un conducto, como el que se muestra en la figura siguiente. Sobre dicho elemento diferencial, actúan fuerzas superficiales y másicas.

Fig. T 12.5  
Elemento  
diferencial de  
volumen



Realizando el sumatorio de fuerzas que actúan sobre todas las caras del volumen de control diferencial, y utilizando la segunda ecuación de Newton  $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ , se obtiene:

$$P \cdot A - \left( P \cdot A + \frac{\partial(P \cdot A)}{\partial x} \delta x \right) + \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + \rho g \delta x \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \sin \alpha - \tau_0 P_{\text{perímetro}} \delta x = \rho \delta x \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{dv}{dt}$$

donde:

$P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \rightarrow$  presión en el centro del elemento diferencial.

$\left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \rightarrow$  representa la proyección de la fuerza sobre el lateral del elemento diferencial y en la dirección del movimiento.

$A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \rightarrow$  sección en el punto medio del elemento diferencial.

$\delta x \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \rightarrow$  volumen del elemento diferencial.



puesto que se cumple que:

$$\frac{\partial(PA)}{\partial x} = A \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial A}{\partial x}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial y despreciando los diferenciales de segundo orden, se obtiene:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} A \cdot \delta x + \rho \cdot g \cdot \delta x \cdot A \cdot \sin \alpha - \tau_0 P_{\text{perímetro}} \delta x = \rho \cdot \delta x \cdot A \frac{dv}{dt}$$

Dividiendo por  $-\rho \cdot \delta x \cdot A$ .

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin \alpha + \frac{\tau_0}{\rho \cdot m} + \frac{dv}{dt} = 0$$

donde se denomina:  $m = \frac{\text{área}}{\text{perímetro}} = \frac{A}{P_{\text{perímetro}}}$

Si se considera la velocidad del fluido como constante, el esfuerzo cortante en la pared se puede expresar como:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \rho \cdot f \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho f v |v|$$

La representación del esfuerzo cortante en función de la velocidad en valor absoluto se realiza para que la propia velocidad dé el signo del esfuerzo cortante.

donde  $f$  es el factor de fricción definido en la ecuación de Darcy-Weisbach.

Como la velocidad es función de la posición y del tiempo, la aceleración en la dirección del movimiento puede ser dada, utilizando el concepto de derivada material y para flujo unidireccional:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

Agrupando las tres ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin \alpha + \frac{f \cdot v \cdot |v|}{2m} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

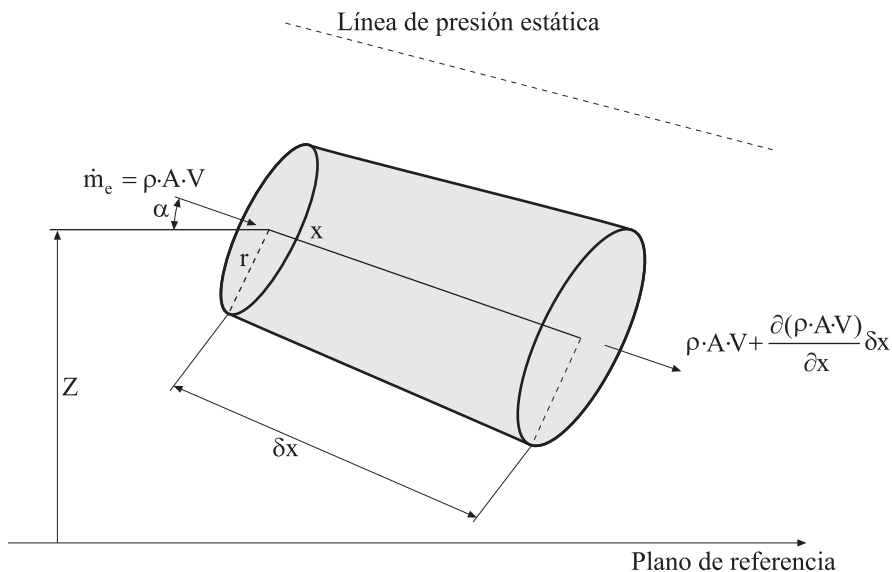
Esta es la ecuación dinámica del movimiento, ecuación que se ha obtenido de aplicar la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control diferencial. Es interesante denotar que tiene unidades de aceleración  $[m/s^2]$ .



## 12.4.2 Ecuación de continuidad

Para determinar la ecuación de continuidad, se parte del siguiente volumen diferencial:

Fig. T 12.6  
Elemento  
diferencial de  
volumen



La ley de conservación de la masa establece que el flujo neto por unidad de tiempo en el volumen elemental ha de ser igual a la variación de masa en dicho volumen elemental.

En forma de ecuación, será:

$$\rho \cdot A \cdot v - \left( \rho \cdot A \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot v)}{\partial x} \delta x \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \left( A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right))$$

Despreciando el diferencial de segundo orden, queda:

$$\rho \cdot A \cdot v - \left( \rho \cdot A \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot v)}{\partial x} \delta x \right) = \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot \delta x)}{\partial t}$$

donde:

$\rho \cdot A \cdot v \rightarrow$  Caudal másico entrante

$\rho \cdot A \cdot v + \frac{\partial(\rho \cdot A \cdot v)}{\partial x} \delta x \rightarrow$  Caudal másico saliente

$\frac{\partial(\rho \cdot A \cdot \delta x)}{\partial t} \rightarrow$  variación temporal de masa en el volumen de control

Desarrollando las derivadas de los productos en la ecuación diferencial de continuidad, se obtiene:

$$-A \cdot v \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x - \rho \cdot v \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - \rho \cdot A \frac{\partial v}{\partial x} \delta x = A \delta x \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \delta x \frac{\partial A}{\partial t} + \rho A \frac{\partial \delta x}{\partial t}$$

Dividiendo por  $\rho \cdot A \cdot \delta x$  se llega:

$$\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{\delta x} \frac{\partial \delta x}{\partial t} = 0$$

El último término de la ecuación anterior representa la variación de un diferencial con respecto al tiempo, con lo cual dicho término es prácticamente cero.

Recordando el concepto de derivada material:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}; \quad \frac{DA}{Dt} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x};$$

La ecuación de continuidad se puede expresar como:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dt} = 0$$

Siendo esta la ecuación de continuidad que caracteriza el fenómeno del golpe de ariete en conductos. Sus términos representan:

$\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow$  Variación de velocidad entre entrada y salida

$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} \rightarrow$  Tiene en cuenta la compresibilidad del líquido

$\frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dt} \rightarrow$  Valora el incremento de sección del conducto

### 12.4.3 Modificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para que puedan ser aplicadas a transitorios y conductos deformables

Para un conducto de sección constante, se ha definido una variable  $m$  tal que:

$$m = \frac{\text{Superficie}}{\text{Perímetro}} = \frac{\frac{\pi \cdot D^2}{4}}{\pi \cdot D} = \frac{D}{4}$$



Sustituyendo dicha variable en la ecuación de cantidad de movimiento anteriormente deducida, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin \alpha + \frac{4 \cdot f \cdot v \cdot |v|}{2D} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Saint Venant.

Suponiendo aplicable la teoría de cilindros de pared delgada, que es para casos en que

$\frac{D}{e_{\text{espesor de la pared}}} > 30$ , el incremento de diámetro al aumentar la presión en el interior del

conducto, se puede definir como:

$$\frac{dD}{D} = \frac{D}{2 \cdot E \cdot e} dp$$

donde  $E$  = módulo de Young del material del conducto.

$e$  = espesor de la pared del tubo.

El diferencial de superficie del conducto se puede dar como:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow dA = \frac{\pi}{4} \cdot 2D \cdot dD = \frac{\pi \cdot D}{2} \cdot dD$$

de donde, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\frac{2 \cdot dA}{\pi \cdot D^2} = \frac{D}{2 \cdot E \cdot e} dp \Rightarrow \frac{1}{A} \cdot dA = \frac{D}{E \cdot e} dp \Rightarrow \frac{1}{A} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{D}{E \cdot e} \frac{dp}{dt}$$

El módulo de elasticidad volumétrica para el fluido  $\beta$  se ha definido en el capítulo primero como:

$$\beta = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{dp}{dt}$$

Utilizando las relaciones halladas, se consigue modificar las ecuaciones de régimen transitorio, la ecuación de continuidad queda:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{1}{\beta} + \frac{D}{E \cdot e} \right) \frac{dp}{dt} = 0$$

Recuérdese que la velocidad de propagación de una onda de presión en el interior de un conducto, donde se considera que tanto el fluido como el conducto son deformables, se define como:

$$\frac{1}{c^2} = \rho \cdot \left( \frac{1}{\beta} + \frac{D}{E \cdot e} \right) \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\beta}{1 + \frac{D \cdot \beta}{E \cdot e}} \right)$$

Sustituyendo el concepto de velocidad de propagación, la ecuación de continuidad toma la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot c^2} \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow \rho \cdot c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{dp}{dt} = 0$$

y, recordando que en la ecuación de la continuidad se había utilizado el concepto de derivada material:

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{dp}{dt} = v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \frac{Dp}{Dt} = \frac{dp}{dt} = v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t};$$

la ecuación de continuidad finalmente queda:

$$\rho \cdot c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

Esta representación de la ecuación de continuidad tiene en cuenta la expansión y/o la compresión del conducto al variar la presión en el interior del mismo.

#### 12.4.4 Simplificación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en régimen transitorio

Si no se tiene en cuenta el efecto de la fricción, las fuerzas másicas se consideran despreciables y se ignoran los términos convectivos, se obtiene:

Los términos convectivos se pueden ignorar en comparación con:  $\frac{\partial p}{\partial t}$  y  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ;

$$v \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial v}{\partial t}; \quad v \frac{\partial p}{\partial x} \ll \frac{\partial p}{\partial t}$$

Si, además, las fuerzas másicas se consideran despreciables las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad resultantes, que se denominan ecuaciones de D'Alembert dan lugar a las ecuaciones de las cuerdas vibrantes, su determinación es:

La ecuación de cantidad de movimiento para este caso, quedará:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Mientras que la de continuidad:

$$\rho \cdot c^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$



Derivando la primera de estas dos ecuaciones con respecto a  $x$  y la segunda con respecto a  $t$ , y combinándolas, se obtiene una expresión que pone de manifiesto los incrementos de presión con la velocidad de propagación de la onda de presión.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} &= 0 \\ \rho c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Según D'Alembert, las soluciones a estas ecuaciones, que representan la ecuación de la onda que recorre la tubería, son:

$$\begin{aligned} p - p_0 &= F\left(t + \frac{x}{c}\right) + f\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ v - v_0 &= -\left(\frac{1}{\rho c}\right) \left[ F\left(t + \frac{x}{c}\right) - f\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] \end{aligned}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones generales de Allievi.

$F$  y  $f$  son funciones arbitrarias, que pueden ser seleccionadas para satisfacer las condiciones impuestas mediante las condiciones de contorno.

En un sistema consistente en un depósito y una tubería, en cuyo extremo más alejado del depósito existe una válvula de regulación, la función  $F$  puede ser interpretada como una onda de presión moviéndose en dirección  $-x$  (hacia el depósito). La función  $f$  puede ser interpretada como una onda de presión moviéndose en dirección  $x$  (del depósito hacia la válvula); ambas ondas se propagan a la velocidad del sonido  $c$ .

La primera de las ecuaciones de Allievi proporciona la presión en cualquier punto de la tubería y en cualquier tiempo gracias al sumatorio de las funciones de onda  $F$  y  $f$ .



## Problema 73

### Enunciado

Sea un sistema de distribución de agua formado por un depósito y un conducto de 1.965 m de longitud. En el extremo inferior del conducto está instalada una válvula de descarga a la atmósfera; el nivel de la superficie libre del depósito respecto de la válvula es de 70 m y se conoce que la velocidad de propagación de la onda de presión en la instalación es de 1.310 m/s. Se ha observado que la velocidad de circulación del fluido por el conducto es de 2,5 m/s, cuando la válvula está totalmente abierta.

Determine:

1. El diámetro del conducto que satisfaga las condiciones establecidas anteriormente, sabiendo que el factor de fricción se puede considerar de  $f = 0,02$
2. Si se considera que el proceso de cierre de la válvula es lineal con el tiempo, y el tiempo de cierre es de 6 s, determine el diagrama de variación temporal de la presión en la entrada de la válvula en función del tiempo. Considere despreciables, como primera aproximación, las pérdidas de energía por rozamiento. Se puede asimismo considerar que el proceso de cierre se ejecuta en 6 pasos.
3. A la vista de los resultados, comente las anomalías encontradas en el diseño de la instalación y proporcione posibles soluciones al problema. ¿Qué sucedería si el conducto fuese de 0,5 m de diámetro?

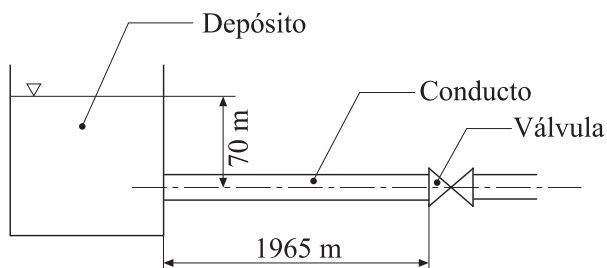


Fig. 73.1  
Esquema de la  
instalación

### Resolución

1. En primer lugar, se observa que se trata de un problema de golpe de ariete, para la resolución del cual se determinará el diámetro del conducto mediante la aplicación de la ecuación de Bernoulli entre la superficie del depósito y el extremo del conducto, de modo que:

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{12} \quad [m]$$



y queda

$$z_1 - z_2 = 70 \text{ m} = \frac{v_2^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} = \frac{2,5^2}{2 \times 9,8} + 0,02 \frac{1.965}{D} \times \frac{2,5^2}{2 \times 9,8}$$

$$\frac{1}{D} = \frac{70 - \frac{2,5^2}{2 \times 9,8}}{0,02 \times 1.965 \times \frac{2,5^2}{2 \times 9,8}} \Rightarrow D = 0,1798 \text{ m}$$

La curva característica de la instalación en forma gráfica se puede dar como:

Fig. 73.2 H (m)

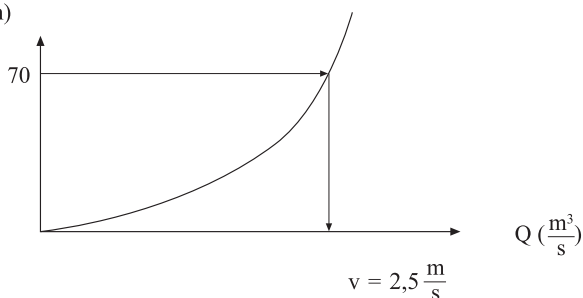
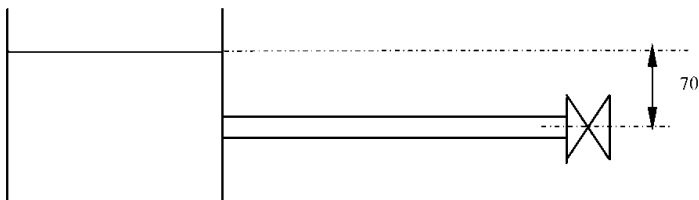


Fig. 73.3



2. Las características iniciales del sistema, que son el punto de partida para la realización del análisis dinámico, son:

$V_{\text{fluido}} = 2,5 \text{ m/s}$       Pérdidas por fricción despreciables

$H = 70 \text{ m}$        $L_{\text{tubería}} = 1.965 \text{ m}$

$C = 1.310 \text{ m/s}$

Suponiendo cierre uniforme en seis pasos y en 6 s, se tiene:

$$\Delta P = \rho C (V_f - V_o) = -\rho C \Delta V$$

$$\frac{\Delta P}{\rho g} = \Delta h = -\frac{C}{g} \Delta V \Rightarrow h_f - h_o = \frac{C}{g} (V_o - V_f)$$

Aplicando la ecuación de continuidad entre el conducto y la válvula, considerando además que, entre la entrada y la salida de la válvula, la energía de presión en la entrada se convierte en energía cinética a la salida, se tiene:

$$S_{\text{tubo}} \times V_{\text{tubo}} = Q = S_v \times V_{\text{válvula}} = C_d \times S_v \sqrt{2gh}$$

$$V_{\text{tubo}} = \frac{C_d S_v}{S_{\text{tubo}}} \sqrt{2gh}$$

en forma genérica, esta ecuación se puede dar:

$$V = \Omega \times \sqrt{h} \Rightarrow \Omega = \frac{C_d S_v}{S_{\text{tubo}}} \sqrt{2g}, \text{ considerando el coeficiente de descarga (Cd) constante}$$

La variación de la sección de la válvula con el tiempo presenta la forma siguiente:

$$\frac{S_v}{S_t} = 1 - \frac{t}{T} \text{ y se verifica:}$$

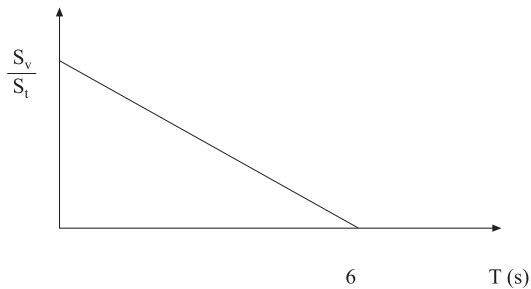


Fig. 73.4

$$\frac{S_v}{S_{\text{tubo}}} = 1 - \frac{t}{T}$$

Véase, a continuación, cómo varía la constante de tiempo  $\Omega$  con el tiempo respecto al número de segundos transcurridos y al número de pasos realizados hasta su cierre.

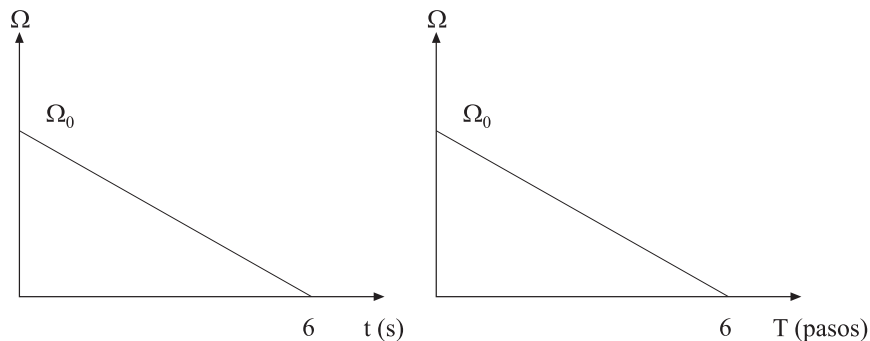


Fig. 73.5

$$\Omega = \Omega_0 \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \quad T = \text{tiempo} = 6$$

$$\Omega = \Omega_0 \left( 1 - \frac{t}{T} \right) \quad T = \text{pasos} = 6$$



Para el estado inicial, se tiene:

$$V_i = \Omega_0 \sqrt{H} \Rightarrow 2,5 = \Omega_0 \sqrt{70}, \text{ donde } \Omega_0 = 0,2988 \left[ \frac{\text{m}^{\frac{1}{2}}}{\text{s}} \right]$$

En la tabla siguiente, se muestra el conjunto de valores de la constante de tiempo, en función de las diferentes posiciones de abertura de la válvula.

t(s)	T(pasos)	Posición de la válvula	$\Omega = 0,2988 \left( 1 - \frac{t}{6} \right) \left[ \frac{\text{m}^{\frac{1}{2}}}{\text{s}} \right]$
0	0	Abierta	0,2988
1	1	1/6 cerrada	0,2490
2	2	2/6 cerrada	0,1992
3	3	3/6 cerrada	0,1494
4	4	4/6 cerrada	0,0996
5	5	5/6 cerrada	0,0498
6	6	cerrada	0

Las ecuaciones que se utilizarán para la determinación de las velocidades y los incrementos temporales de presión serán:

$$\Delta h = \frac{C}{g} (V_0 - V)$$

$$V = \Omega \sqrt{h_i + \Delta h}$$

Para el primer paso, cuando t = 1 (s), se tiene:

$$\Delta h = 133,67 (2,5 - V)$$

$$V = 0,249 \sqrt{70 + \Delta h}$$

Estas dos ecuaciones se satisfacen para los valores de V= 2,354 m/s y Δh = 19,21 m.

En la tabla que se encuentra a continuación, se resumen estos resultados y los obtenidos para tiempos sucesivos.



t(s)	$\Omega$	v	$\Delta h$	$h_i + \Delta h$	Total
0	0,2988	2,5	0	70	70
1	0,2490	2,35	19,21	70+19,21	89,2100
2	0,1992	2,15	27,27	70+19,21+27,27	116,480
3	0,1494	1,86235	38,74	70+19,21+27,27+38,74	155,220
4	0,0996	1,4464	55,59	70-19,21+27,27+38,74+55,59	172,390
5	0,0498	0,8697	77,072	70-19,21- 27,27+38,74+55,59+77,072	194,922
6	0	0	116,27	70-19,21-27,27- 38,74+55,59+77,072+116,275	233,717
7	0	0	-	70+19,21-27,27-38,74- 55,59+77,072+116,275	160,957
8	0	0	-	70+19,21+27,27-38,74-55,59- 77,072+116,275	61,3530
9	0	0	-	70+19,21+27,27+38,74-55,59- 77,072-116,275	-93,7170
10	0	0	-	70-19,21+27,27+38,74+55,59- 77,072-116,275	-20,9570
11	0	0	-	70-19,21- 27,27+38,74+55,59+77,072- 116,275	78,6470

Por tanto el diagrama temporal será:

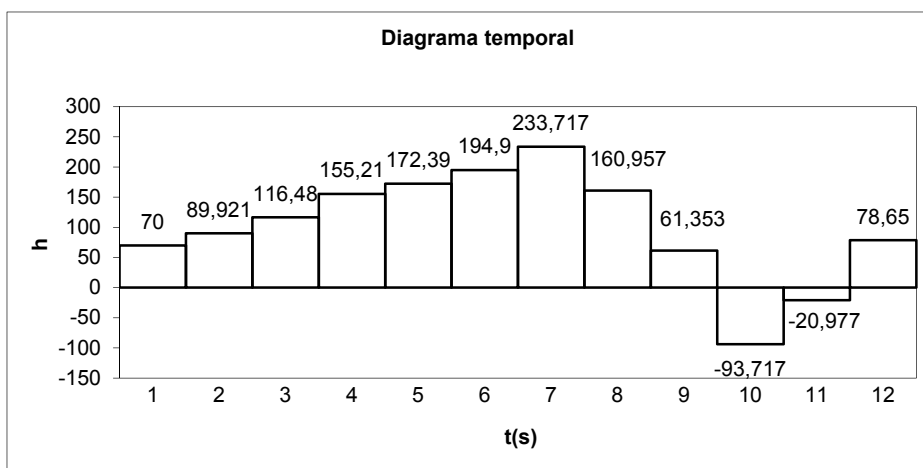


Fig. 73.6

Obsérvese que las ecuaciones explícitas para la determinación en cada paso, además de la velocidad de circulación del fluido, son:



$V = \Omega \sqrt{h_i + \Delta h}$ ,  $h_i$  y  $v_i$  son la presión en forma de altura de elevación y la velocidad a la entrada de la válvula utilizadas para la iteración.

$$\Delta h = 133,67 (V_i - V)$$

$$V = \Omega \sqrt{h_i + 133,67 (V_i - V)}$$

$$V^2 = \Omega^2 [h_i + 133,67 (V_i - V)]$$

$$V^2 = h_i \Omega^2 + 133,67 V_i \Omega^2 - \Omega^2 133,67 V$$

$$V^2 + \Omega^2 133,67 V - \Omega^2 (h_i + 133,67 V_i) = 0$$

$$V = \frac{-\Omega^2 133,67 \pm \sqrt{(\Omega^2 \times 133,67)^2 + 4\Omega^2 (h_i + 133,67 V_i)}}{2}$$

De modo que para la primera iteración se tendrá:

$$V = \frac{-0,2479^2 \times 133,67 \pm \sqrt{(0,2479^2 \times 133,67)^2 + 4 \times 0,2479^2 (70 + 133,67 \times 2,5)}}{2}$$

$$= 2,356 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por tanto:

$$\Delta h = 133,67 (2,5 - 2,356) = 19,21 \text{ m}$$

3. Se observa que el aumento de presión respecto al estado de régimen permanente es de unas tres veces, lo cual no causaría grandes problemas en la instalación, pero, por otro lado, las presiones negativas que aparecen en el diagrama temporal son demasiado elevadas y no sólo causarían cavitación en la instalación, sino que muy probablemente destrucción de la misma. En definitiva, sería más que recomendable disminuir la velocidad de cierre de la válvula, aumentando su tiempo de cierre. En un primer paso, se podría aumentar el tiempo de cierre a 10 segundos en lugar de los seis actuales. Una vez realizado el diagrama temporal, se podría ver si este aumento en el tiempo de cierre es suficiente o no.

Por otro lado, si el diámetro del conducto aumenta a 0,5 m la fuerza de inercia asociada al mismo aumenta y consecuentemente, aumentarán las sobrepresiones; consecuentemente el tiempo de cierre debería aumentar con el fin de mantener el aumento de presión a un nivel aceptable.

## Problema 74

### Enunciado

Sea el sistema depósito-conducto esquematizado en la figura 74.1. En el extremo del conducto, existe una válvula cuyo cierre será lento y progresivo. La sección de paso de la válvula adimensionalizada en función de las cuatro etapas de cierre se define en la tabla 1. En la tabla 2 se define la constante de pérdidas de la válvula para las diversas etapas de cierre. Dicha constante se entenderá que obedece a la ecuación.

$$\Delta h_{\text{válvula}} = K \frac{v^2}{2g}$$

$$\Delta h \text{ [m]}$$

$v$  = velocidad del fluido en el conducto

$g$  = aceleración gravitatoria

Conociendo que:

Factor de fricción,  $f = 0,02$

Longitud del conducto, 1.250 m

Diámetro del conducto,  $D = 0,2$  m

Celeridad de la onda de presión,  $C = 1.250$  m/s

Diferencia de alturas geométricas entre el nivel de líquido del depósito y la válvula:  
100 m

El extremo del conducto descarga a la atmósfera.

Determine:

1. La velocidad de circulación del fluido por el conducto en las cuatro etapas de cierre.
2. La variación temporal de la altura de elevación en la entrada de la válvula. Comente los resultados obtenidos.

Tabla 1

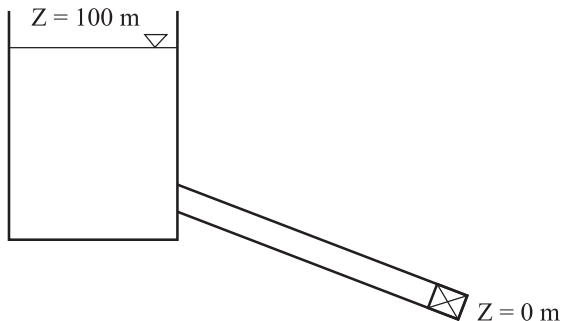
$S/S_{\text{total}}$	$T_c/(L/C)$
1	0
0,8	1
0,6	2
0,4	3
0	4

Tabla 2

$T_c/(L/C)$	$K$
0	1.000
1	5.000
2	10.000
3	18.000
4	$\infty$



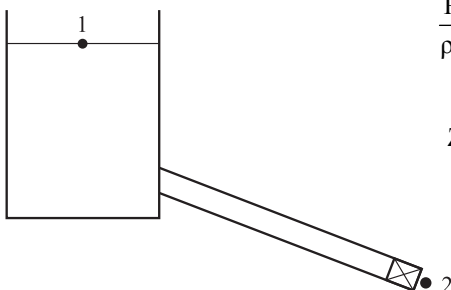
Fig. 74.1



### Resolución

1. Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se tiene:

Fig. 74.2



$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + K \frac{v^2}{2g}$$

$$Z_1 - Z_2 = \frac{Q^2}{S_2^2 \cdot 2 \cdot g} + f \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g} + K \frac{Q^2}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g}$$

$$Q^2 = \frac{Z_1 - Z_2}{\frac{1}{S_2^2 \cdot 2 \cdot g} + f \frac{L}{D} \cdot \frac{1}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g} + K \frac{1}{S_T^2 \cdot 2 \cdot g}}$$

Para las diferentes posiciones de la válvula, se tiene:

Abierta	$S_2 = S_T \cdot 1$	$K = 1.000$
1	$S_2 = S_T \cdot 0,8$	$K = 5.000$
2	$S_2 = S_T \cdot 0,6$	$K = 10.000$
3	$S_2 = S_T \cdot 0,4$	$K = 18.000$
4	$S_2 = S_T \cdot 0$	$K = \infty$

Sustituyendo para los diferentes casos en la expresión del caudal, se obtiene:

$$v_{abierta} = \frac{Q}{S} = 1,319 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 0,618 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 0,439 \text{ m/s}$$

$$v_3 = 0,3287 \text{ m/s}$$

$$v_4 = 0 \text{ m/s ;}$$



Adimensionalizando los valores de la velocidad:

$$v^* = \frac{v}{v_0} = \frac{v}{1,319}$$

$v^*$	$T_c / \frac{L}{C}$
1	0
0,468	1
0,3328	2
0,2486	3
0	4

Adimensionalizando el término de pérdidas de carga en el conducto:

$$\frac{H_0}{H_0} \Delta h = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{v_0^2}{v_0^2}$$

$$\Delta h^* = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^{*2}}{2g} \cdot \frac{v_0^2}{H_0}$$

$$\Delta h^* = 0,11095 \cdot v^{*2}$$

Adimensionalizando allievi:

$$h - h_i = -\frac{c}{g} (v - v_i)$$

$$\frac{H_0}{H_0} \Delta h = -\frac{c}{g} \Delta v \frac{v_0}{v_0}$$

$$\Delta h^* = -\frac{c \cdot v_0}{g \cdot H_0} \Delta v^*$$

Sustituyendo por:

$$v_0 = 1,319 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = 1250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$H_0 = 100 \text{ m}$$

Se obtiene:

$$\Delta h^* = -1,68 \cdot \Delta v^*$$



En la gráfica adjunta, se representan las variaciones de la presión en función del tiempo. En ella se observa que el incremento de presión más preponderante se da en el segundo espacio temporal. La mayor depresión se da en el séptimo espacio temporal, aunque no se llegan a registrar presiones negativas, con lo que a priori queda descartada la aparición de cavitación.

Para disminuir el pico de presión en el segundo espacio temporal, se debería utilizar una válvula en la que la constante de pérdidas en el primer y el segundo espacios temporales fuese menor.

Fig. 74.3  
Gráfica  
adimensional para  
los diferentes  
tiempos de cierre

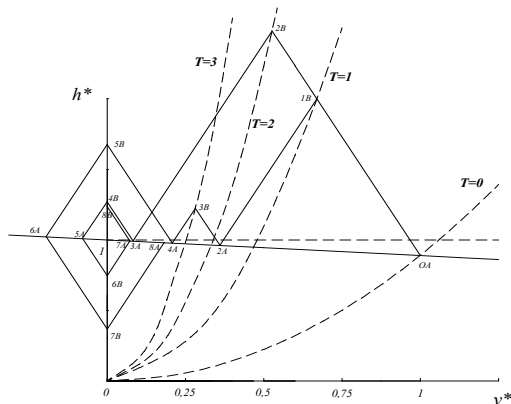
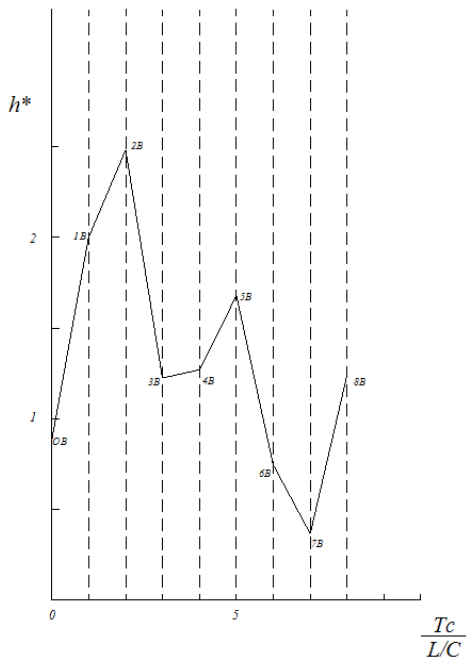


Fig. 74.4  
Variación temporal  
de la presión en la  
válvula









## Flujo compresible

### 13.1 Relaciones termodinámicas

El tratamiento del fluido como compresible conlleva generalmente, debido a la baja densidad de los gases, la consideración de que las fuerzas másicas desempeñan un papel prácticamente irrelevante. Asimismo es muy común considerar que el fluido se comporta como un gas ideal. Bien es cierto que, por ejemplo, en el análisis de la evolución del vapor de agua en calderas y conductos, el gas es necesario que se considere real. En este capítulo, que es únicamente una introducción al flujo compresible, se estudiará el fluido como ideal.

Cabe recordar que algunas relaciones termodinámicas aplicables a gases perfectos, son:

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_v dT;$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT;$$

$$h = u + \frac{p}{\rho};$$

$$C_p = C_v + R; \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma; \quad \gamma = \text{índice de politropía}$$

$$h_2 - h_1 = C_v(T_2 - T_1) + R(T_2 - T_1) = u_2 - u_1 + \left(\frac{p}{\rho}\right)_2 - \left(\frac{p}{\rho}\right)_1;$$



Diferenciando la ecuación de la entalpía:

$$dh = du + \frac{dp}{\rho} + p \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) = du + \frac{dp}{\rho} - p \cdot \left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)$$

La relación entre la variación de entropía y el calor transferido a un sistema se enuncia:

$$s_2 - s_1 \geq \int_1^2 \frac{dq}{T}; \quad \begin{array}{l} = \text{proceso reversible} \\ > \text{proceso irreversible} \end{array}$$

Las ecuaciones de Gibbs se enuncian:

$$dq = dh - \frac{dp}{\rho}; \quad Tds = dh - \frac{dp}{\rho}; \quad Tds = du - p \frac{d\rho}{\rho^2}$$

Para gas ideal y calor específico constante, las ecuaciones de Gibbs se pueden integrar para dar:

$$ds = \frac{dh}{T} - \frac{dp}{\rho T} = C_p \frac{dT}{T} - \frac{R \cdot dp}{p}; \quad ds = \frac{du}{T} - \frac{p \, d\rho}{\rho^2 T} = C_v \frac{dT}{T} - \frac{R \cdot d\rho}{\rho};$$

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right); \quad s_2 - s_1 = C_v \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \cdot \ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Si el proceso es isentrópico:  $s_2 - s_1 = 0$

$$0 = C_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{P_2}{P_1}; \quad 0 = C_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} - R \cdot \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Dividiendo por R, tomando antilogaritmos y teniendo en cuenta:

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v}; \quad \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}; \quad \gamma - 1 = \frac{R}{C_v}; \quad \frac{C_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1};$$

$$\frac{C_p}{R} = \frac{C_v + R}{R} = \frac{C_v}{R} + 1 = \frac{\gamma}{\gamma - 1};$$

se obtienen las relaciones:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{C_p}{R}}; \quad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}; \quad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}$$

Cabe recordar que estas relaciones son utilizables para gas ideal y proceso isentrópico.

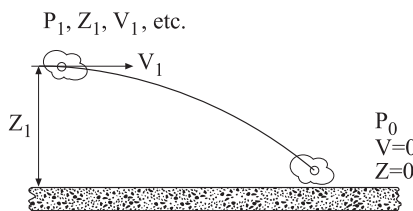


### 13.2 Concepto de propiedades de estancamiento

Se definen dos tipos de propiedades en función del parámetro a medir:

- Propiedades de estado o estáticas: son los valores que medirían los instrumentos que no son capaces de apreciar el efecto de la velocidad del fluido.
- Propiedades de estancamiento: resultan de la combinación de las propiedades termodinámicas, con la velocidad y la posición del fluido. Estas propiedades representan el estado total (termodinámico y mecánico).

Con el fin de introducir el concepto de estancamiento, se procede al estudio de una partícula de fluido que se desplaza del punto 1 al punto 0.



Aplicando la ecuación de la energía entre 1 y 0, se tiene:

Fig. T 13.1  
Concepto de estancamiento

$$q - w_s = h_0 - h_1 + \frac{V_0^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g \cdot z_0 - g \cdot z_1;$$

Si entre estos dos puntos no existe aporte de calor o trabajo y por definición,  $v_0$  y  $z_0$  son 0, se llega a:

$$h_0 = h_1 + \frac{V_1^2}{2} + g \cdot z_1; \quad h_0 = \text{se define como la entalpía de estancamiento.}$$

Recuérdese que, en el estudio del flujo compresible, la energía potencial debida a la fuerza de la gravedad es, en la mayoría de los casos, despreciable, de donde:

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2}$$

Si el fluido es un gas ideal con calor específico constante, se cumple:

$$C_p \cdot T_0 = C_p \cdot T + \frac{v^2}{2}$$

Así, la temperatura de estancamiento o remanso se definirá:  $T_0 = T + \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$

Para gas ideal y proceso de estancamiento isentrópico, la relación entre presión y densidad de estancamiento con la temperatura se define:

$$\frac{P_0}{P} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left( \frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Dividiendo la temperatura de estancamiento por la temperatura estática, se tiene:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T};$$



Sustituyendo esta ecuación en las dos anteriores, se llega a:

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \rho_0 = \rho \left( 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

ecuaciones que determinan la presión y la densidad de estancamiento para un gas ideal en función de las características estáticas del mismo.

### 13.3 Estudio de la propagación de una onda débil en un fluido compresible. Concepto de velocidad del sonido y el número de Mach. Límite de incompresibilidad

En este apartado, se definirán las características principales de las ondas de presión al propagarse en el seno de un fluido.

Se define como:

$c$  = velocidad de la onda de presión

$\Delta v$  = velocidad del fluido detrás de la onda de presión

$A$  = área de paso

Se supondrá que inicialmente el fluido está en reposo y se pone en movimiento por acción de la onda de presión; alternatively, se podría suponer que el frente de onda es estacionario y el fluido se desplaza a la velocidad  $c$  en sentido contrario al frente de onda cuando este se movía.

Aplicando la ecuación de continuidad delante y detrás de la onda, volumen de control, se tiene:

$$\dot{m} = \rho \cdot A \cdot c = (\rho + \Delta\rho) \cdot (c - \Delta v) \cdot A$$

$$\frac{\rho \cdot c}{\rho + \Delta\rho} = c - \Delta v$$

$$\Delta v = c - \frac{\rho \cdot c}{\rho + \Delta\rho} = \frac{c(\rho + \Delta\rho) - \rho \cdot c}{\rho + \Delta\rho} = \frac{\Delta\rho \cdot c}{\rho + \Delta\rho}$$

Asumiendo que la variación de densidad entre ambos extremos sea pequeña:

$$\Delta v = c \cdot \left( \frac{\Delta\rho}{\rho} \right)$$

Aplicando ahora la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control que engloba el frente de onda, y considerando que, los lados superior e inferior del volumen





de control son de tamaño despreciable, se obtendrá que la fuerza debida a la presión sobre las caras de entrada y salida ha de ser igual al flujo de cantidad de movimiento a través de las fronteras del volumen de control. Véase que la dirección positiva del eje de abscisas es hacia la izquierda.

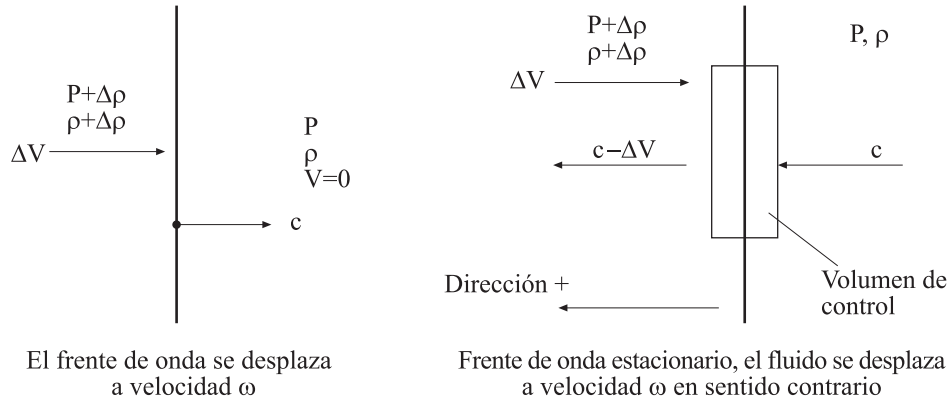


Fig. T 13.2  
Frente de onda y volumen de control utilizado para su análisis

$$\begin{aligned}\sum F_x &= p \cdot A - (p + \Delta p) \cdot A = \int \rho c_x \bar{c} d\bar{A} + \int (\rho + \Delta \rho)(c - \Delta v)_x (\bar{c} - \Delta \bar{v}) d\bar{A} \\ &= \dot{m}((c - \Delta V) - c)\end{aligned}$$

y se obtiene:

$$-A \cdot \Delta p = -\dot{m} \cdot \Delta v$$

$$\Delta p = \frac{\dot{m} \cdot \Delta V}{A} = \rho \cdot A \cdot c \cdot \frac{\Delta V}{A} = \rho \cdot c \cdot \Delta V$$

Sustituyendo en esta ecuación, la ecuación de continuidad, queda:

$$\begin{aligned}\Delta p &= \rho \cdot c \cdot \frac{\Delta \rho \cdot c}{\rho + \Delta \rho} \\ c^2 &= \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \cdot \frac{\rho + \Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right)\end{aligned}$$

La velocidad de propagación de una onda muy débil, es decir cuando el gradiente de presión y densidad entre extremos de la misma es muy pequeño, se denomina velocidad del sonido.

$$c^2 = \lim_{\substack{\Delta p \rightarrow 0 \\ \Delta \rho \rightarrow 0}} \left[ \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \left( 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

En realidad, considerando el proceso termodinámico provocado por la onda como un proceso adiabático isentrópico, se puede definir la velocidad del sonido como:

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$$



Para un gas ideal, un proceso isentrópico obedece a la ecuación:

$$\frac{p}{p_{\text{ref}}} = \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \right)^{\gamma},$$

de donde:  $p = p_{\text{ref}} \left( \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \right)^{\gamma}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial \rho} = \left( \frac{p_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}^{\gamma}} \right) \gamma \rho^{\gamma-1}$ ,  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{p=p_{\text{ref}}} = \left( \frac{p_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}} \right)^{\gamma} \gamma = \gamma R T$

Así, para un gas ideal,  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \gamma \frac{p_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}} = \gamma R \cdot T$ , con lo cual:  $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R \cdot T}$

Para cualquier líquido y sólido, la velocidad de propagación del sonido y el módulo de elasticidad isentrópico están relacionados mediante la expresión:

$$c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho}}. \text{ Recuérdese que el módulo de elasticidad se definió como: } \beta = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

Un grupo adimensional básico para el análisis del flujo compresible es el número de Mach, cuya definición era:

$$M = \frac{v}{\sqrt{\frac{\beta}{\rho}}} = \frac{v}{c}; \quad \text{o bien para gases ideales: } M^2 = \frac{v^2}{\gamma R \cdot T} = \frac{\rho \cdot v^2}{\gamma p}$$

Un fluido se considera matemáticamente como incompresible cuando el número de Mach es pequeño,  $M \ll 1$ . En realidad, se puede evaluar el error que se comete al considerar un fluido como incompresible en función de su número de Mach.

Sea un flujo estacionario, ideal, donde no hay transferencia de trabajo o calor y donde se consideran irrelevantes los cambios de elevación. La presión de estancamiento en cualquier punto viene dada:

Según Bernoulli, fluido incompresible,  $P_0 = P + \frac{1}{2} \rho V^2$ ;

Para fluido compresible, gas ideal,  $P_0 = P \cdot \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Si la consideración se restringe a números de Mach inferiores a 1, expandiendo en serie se tiene:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1) \cdot (n-1)}{3!} x^3 + \dots$$



Llamando a

$$x = \frac{\gamma-1}{2}M^2 \text{ y } n = \frac{\gamma}{\gamma-1} \text{ se obtiene:}$$

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1 + \frac{\gamma}{2}M^2 + \frac{\gamma}{8}M^4 + \dots$$

Sustituyendo en la ecuación de la relación de presiones para fluido compresible, se tiene:

$$P_0 = P \left(1 + \frac{\gamma}{2}M^2 + \frac{\gamma}{8}M^4 + \dots\right)$$

Despreciando los términos de orden superior, esta relación se establece:

$$P_0 \cong P + \frac{\gamma P M^2}{2} \left(1 + \frac{M^2}{4}\right);$$

Recuérdese que el número de Mach para gas ideal se puede dar como:

$$M^2 = \frac{v^2}{\gamma R T} = \frac{\rho v^2}{\gamma P}$$

$$\text{Así: } \gamma P M^2 = \rho V^2$$

Sustituyendo en la ecuación de presión de estancamiento para fluido ideal, se obtiene:

$$P_0 \cong P + \frac{1}{2}\rho V^2 \left(1 + \frac{M^2}{4}\right)$$

Para valores del número de Mach pequeños, se tiene:  $\frac{M^2}{4} \ll 1$

con lo cual la ecuación queda:

$$P_0 \cong P + \frac{1}{2}\rho V^2$$

que es exactamente igual a la ecuación de Bernoulli para fluido incompresible.

Se demuestra así que la ecuación de Bernoulli es una aproximación de la relación de presión del flujo isentrópico para números de Mach  $\ll 1$ .

Si se desea, por ejemplo, que el error al utilizar la ecuación de Bernoulli sea menor del 2%, entonces

$$M \leq \sqrt{4 \cdot 0,02} = 0,283$$

Si el error es  $\leq 2,25\%$   $\rightarrow M \leq 0,3$  (valor que se acepta como límite de incompresibilidad)



### 13.4 Relación entre el número de Mach y las propiedades de estancamiento del fluido

La relación entre la temperatura de estancamiento y la temperatura estática se había definido como:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por  $\gamma \cdot R$ , y utilizando las relaciones:

$$C_p = C_v + R; \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma; \quad c = \sqrt{\gamma R \cdot T}; \quad M^2 = \frac{v^2}{\gamma R \cdot T} = \frac{\rho \cdot v^2}{\gamma p}$$

se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} &= \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} \cdot \frac{\gamma R}{\gamma R} = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{\gamma R}{C_p} = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \frac{\gamma (C_p - C_v)}{C_p} = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \gamma \left( 1 - \frac{C_v}{C_p} \right) = \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot \gamma \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \\ &= \frac{v^2}{2 \cdot c^2} \cdot (\gamma - 1) = \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2$$

Haciendo lo propio para las demás ecuaciones halladas, ecuaciones de presión, densidad y entalpía de estancamiento, se concluye:

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}; \quad \frac{P_0}{P} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\rho_0 = \rho \left( 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}; \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} \quad \frac{h_0}{h} = 1 + \frac{M^2 (\gamma - 1)}{2}$$

La relación entre presiones y densidades estáticas y de estancamiento se puede obtener:

$$\frac{P}{\rho \cdot T} = R; \quad \frac{P_0}{\rho_0 \cdot T_0} = R; \quad \frac{P}{P_0} = \frac{\rho \cdot T}{\rho_0 \cdot T_0};$$

Cabe recordar que la mayoría de las expresiones que se acaban de definir se encuentran tabuladas; por tanto para la realización de problemas, es común utilizar las tablas.

### 13.5 El cono de Mach

Se observa que, en función de la velocidad del fluido, las ondas de pequeña perturbación, como pueden ser las ondas sonoras, crean una envolvente que delimita la zona audible.

Para observar este fenómeno, se supone que se tiene una fuente sonora en reposo, y se estudia la propagación de las ondas sonoras cuando el fluido se desplaza a diferentes velocidades con respecto a la fuente. Se distinguen cuatro casos, (v. figura T 13.3):

- (a) el fluido inicialmente no tiene movimiento
- (b) el fluido se mueve a  $M=0,5$  (efecto Doppler)
- (c) el fluido se mueve a  $M=1$
- (d) el fluido se mueve a  $M=2$

Obsérvese que, de estos cuatro casos, en tres de ellos las ondas de presión generadas son arrastradas corriente abajo por el fluido. Para el caso (c), las ondas forman una envolvente recta perpendicular a la velocidad del fluido. Las ondas no se propagan corriente arriba. En el caso (d), las ondas se arrastran corriente abajo más rápido de lo que se difunden, y quedan confinadas en una región triangular, o cónica, que se extiende corriente abajo desde el punto origen de las mismas. La envolvente formada se conoce como el *cono de Mach*. El semiángulo de la envolvente se puede calcular:

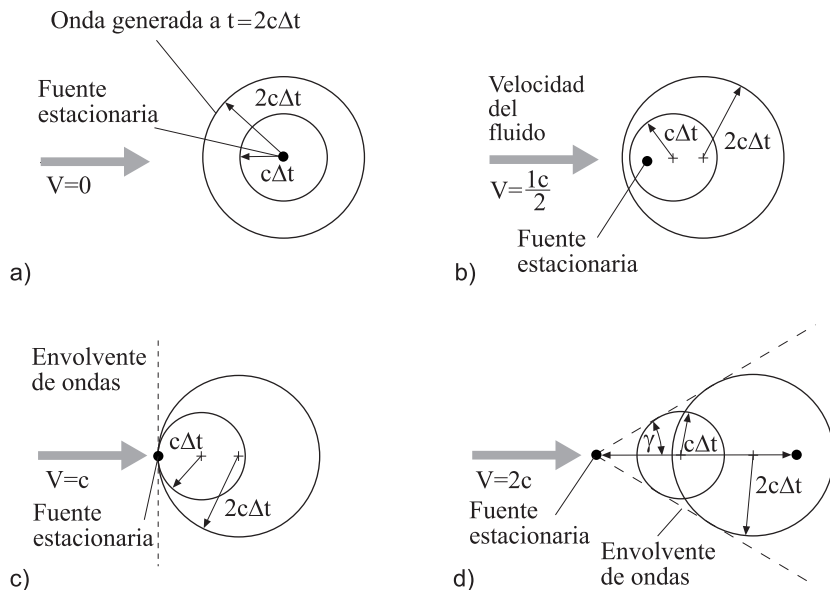
$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \Delta t}{v \cdot \Delta t} = \frac{2 \cdot c \cdot \Delta t}{2 \cdot v \cdot \Delta t} = \dots = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}; \quad \gamma = \sin^{-1} \left( \frac{1}{M} \right);$$

En conclusión se puede decir que:

- Cuando el flujo es incompresible  $M \ll 1$ , la influencia de la fuente sonora se percibe en todos los demás puntos del campo. Dicha influencia tiene la misma intensidad corriente arriba que corriente abajo.
- Para flujo subsónico, la influencia de la fuente sonora se percibe en todo el campo de fluido. El efecto se concentra más cerca del punto en la región corriente arriba.
- Para flujo sónico, la influencia de la fuente sonora no se percibe corriente arriba.
- Cuando el flujo es supersónico, la influencia de la fuente sonora está confinada a una región limitada corriente abajo. Cuanto mayor sea el número de Mach, menor será la región de influencia corriente abajo.



Fig. T 13.3  
El cono de Mach



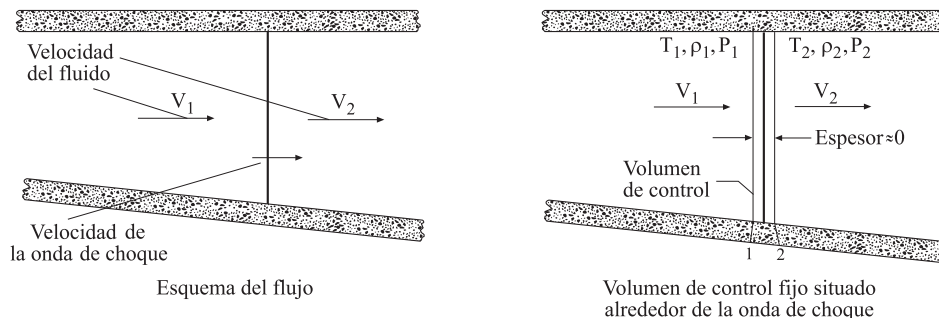
### 13.6 Características de las ondas de choque

Hasta este punto, se han considerado perturbaciones infinitesimales y ondas de fuerza infinitesimal; ahora, se considerarán ondas asociadas a perturbaciones finitas. Si se coloca un objeto finito, una cuña, un cono, etc., en el seno de una corriente de un flujo supersónico, se genera una onda de fuerza finita, a estas ondas se les denomina *ondas de choque* y son muy delgadas; las propiedades del fluido y su velocidad cambian muchísimo delante y detrás de la onda de choque.

Puesto que este capítulo es meramente introductorio, el estudio se centra en las ondas de choque normales, ondas que aparecen en el flujo unidimensional y unidireccional.

Sea la onda de choque normal que se desplaza a lo largo del conducto que se muestra en la figura T 13.4.

Fig. T 13.4  
Esquema de ondas de choque normales





Como hipótesis de trabajo, se establece:

El fluido tiene una distribución de velocidades uniforme, tanto a la entrada como a la salida de la onda.

La onda de choque tiene un espesor prácticamente nulo, con lo cual las secciones delante y detrás de la onda serán idénticas:  $A_1=A_2=A$ .

El volumen del fluido englobado en el interior del volumen de control se considera nulo.

De la aplicación de la ecuación de continuidad al volumen de control, se establece:

$$\rho_1 \cdot A \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A \cdot v_2$$

La velocidad del fluido viene dada por:  $V=M \cdot c = M \cdot \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$

de donde la ecuación de continuidad puede expresarse como:

$$M_1 \cdot \rho_1 \cdot A \cdot \sqrt{\gamma R \cdot T_1} = \rho_2 \cdot A \cdot \sqrt{\gamma R \cdot T_2} \cdot M_2$$

$$M_1 \cdot \frac{P_1}{R \cdot T_1} \cdot \sqrt{T_1} = \frac{P_2}{R \cdot T_2} \cdot \sqrt{T_2} \cdot M_2$$

$$\frac{M_1 \cdot P_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{P_2 \cdot M_2}{\sqrt{T_2}}; \quad \frac{M_2}{M_1} = \frac{P_1}{P_2} \cdot \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

ecuación que relaciona los números de Mach delante y detrás de la onda de presión con la presión y la temperatura en esos mismos dos puntos.

La aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento en el mismo volumen de control y para el flujo en dirección x da lugar a:

$$\sum F_x = \rho_2 \cdot v_2^2 \cdot A - \rho_1 \cdot v_1^2 \cdot A$$

Si el espesor del volumen de control es  $\approx 0$ , las únicas fuerzas que actúan sobre la superficie son las de presión, con lo que:

$$\sum F_x = P_1 \cdot A - P_2 \cdot A$$

Puesto que el número de Mach se puede expresar como  $M^2 = \frac{v^2}{\gamma R \cdot T} = \frac{\rho \cdot v^2}{\gamma P}$ ;

$$\rho \cdot v^2 = M^2 \cdot \gamma P.$$



Agrupando ambos términos de la ecuación de cantidad de movimiento, se tiene:

$$P_1 \cdot A - P_2 \cdot A = \rho_2 \cdot v_2^2 \cdot A - \rho_1 \cdot v_1^2 \cdot A$$

$$P_1 - P_2 = M_2^2 \cdot \gamma P_2 - M_1^2 \cdot \gamma P_1$$

$$P_1 \cdot (1 + \gamma M_1^2) = P_2 \cdot (1 + \gamma M_2^2)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

Aplicando al mismo volumen de control la ecuación general de la energía, se tiene:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \dot{m} \left( h_2 - h_1 + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right)$$

Considerando, además, que no existe transferencia de calor ni de trabajo, se llega a:

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_1 + \frac{v_1^2}{2}$$

ecuación que implica que la entalpía de estancamiento delante y detrás de la onda permanece constante:  $h_{02} = h_{01}$

Para gas ideal, que la entalpía de estancamiento sea constante implica  $T_{02} = T_{01}$

Recordando que la relación entre temperatura estática y de estancamiento venía dada por la ecuación:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p \cdot T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M^2$$

La relación de temperaturas estáticas delante y detrás de la onda de choque será:

$$T_2 \cdot \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_2^2 \right) = T_1 \cdot \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot M_1^2 \right)$$

ecuación que, en general, se presenta como:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \left[ \frac{(\gamma - 1)}{2} \right] \cdot M_1^2}{1 + \left[ \frac{(\gamma - 1)}{2} \right] \cdot M_2^2}$$





La relación del número de Mach con la presión y la temperatura en ambos extremos de la onda de choque se obtuvo de la ecuación de continuidad. Al elevarla al cuadrado, se obtiene:

$$\frac{M_2^2}{M_1^2} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^2 \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Sustituyendo en esta ecuación las ecuaciones que proporcionan la relación de presiones y temperaturas en función del número de Mach, se obtiene una ecuación cuadrática, que relaciona los números de Mach a la entrada y salida de la onda de choque. Las soluciones de dicha ecuación resultante son:

-1. Solución válida cuando no hay onda de choque:

$$M_2^2 = M_1^2$$

-2. Proporciona el número de Mach corriente abajo, en función del número de Mach corriente arriba.

$$M_2^2 = \frac{M_1^2 + \frac{2}{(\gamma-1)}}{\left[ \frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \right] \cdot M_1^2 - 1}$$

Sustituyendo esta ecuación en las expresiones que relacionaban las presiones estáticas y las temperaturas estáticas con los números de Mach a la entrada y a la salida de la onda de choque, se obtienen estas mismas expresiones, en función ahora únicamente del número de Mach aguas arriba de la onda, y se obtiene:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{1+\gamma} \cdot M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} \cdot M_1^2 \right) \cdot \left( \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot M_1^2 - 1 \right) \cdot \left[ \frac{2 \cdot (\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 \cdot M_1^2} \right]$$

Ecuaciones que relacionan respectivamente, las presiones estáticas y temperaturas estáticas en la entrada y salida de la onda de choque en función del número de Mach a la entrada.

La relación entre la presión estática y de estancamiento en un punto cualquiera se ha definido:

$$\frac{P_0}{P} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$



Así, la relación entre las presiones de estancamiento delante y detrás de la onda de choque sería:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2 \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_1 \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Sustituyendo en esta ecuación, la ecuación que proporciona la relación de presiones entre extremos de la onda y la ecuación que da la relación de números de Mach, se obtiene:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\gamma+1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

ecuación que relaciona la presión de estancamiento entre los dos extremos de la onda de choque con el número de Mach a la entrada.

La onda de choque se ha de entender como un cambio brusco de las propiedades del fluido.

La segunda ley de la termodinámica se expresa:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dq}{T}$$

cuyo desarrollo, expuesto al principio de este capítulo, ha dado lugar a la relación:

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - R \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Dividiendo por R y recordando que  $\frac{C_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$  se obtiene:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right);$$

Si en esta ecuación se sustituyen las ecuaciones que proporcionan la diferencia de temperaturas y presiones entre extremos de la onda en función del número de Mach aguas arriba, se obtiene una expresión que relaciona la variación de entropía en función del número de Mach aguas arriba, de la cual se deduce:



- El cambio de entropía es negativo para números de Mach subsónicos a la entrada, en consecuencia, no puede existir tal onda de choque.
- Las ondas de choque pueden existir solamente si el flujo corriente arriba (en relación con la onda de choque) es supersónico.

### 13.7 Estudio del flujo isentrópico y estacionario para un gas ideal

Hipótesis de trabajo:

- El flujo es estacionario.
- Las fuerzas másicas son despreciables.
- No se consideran los esfuerzos cortantes.
- No existe transferencia de calor.
- No existe onda de choque en la zona donde se realiza el estudio.

La ecuación de la energía en forma integral y para flujo en régimen permanente queda representada por:

$$q - W_{\text{eje}} + W_{\tau} = \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)$$

Según las hipótesis establecidas,  $q=0$  y  $W_{\tau}=0$ , de donde:

$$-W_{\text{eje}} = \left( h_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left( h_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)$$

Utilizando la definición de entalpía de estancamiento:

$$-W_{\text{eje}} = h_{02} - h_{01}$$

para un gas ideal.

$$-W_{\text{eje}} = C_p (T_{02} - T_{01})$$

Esta ecuación indica que, si se realiza un trabajo sobre un fluido, se incrementa su temperatura de estancamiento.

La entropía de estancamiento para flujo isentrópico cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} S_{01} &= S_1 \quad ; \quad S_{02} = S_2 \\ S_{02} - S_{01} &= S_2 - S_1 = 0 \end{aligned}$$



Recordando la relación entre la variación de la entropía en función de la variación de temperaturas y presiones para un gas ideal:

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right); \text{ para flujo isentrópico, } 0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

Sacando logaritmos:

$$1 = \frac{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}, \text{ o bien: } \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Realizando un proceso homólogo para el caso de la entropía de estancamiento, se obtendría:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}}\right)^{\frac{C_p}{R}}$$

$$\text{Puesto que } -W_{\text{eje}} = C_p (T_{02} - T_{01}); \quad \frac{-W_{\text{eje}}}{C_p T_{01}} = \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1\right)$$

La relación de presiones de estancamiento se podrá dar:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left(1 - \frac{W_{\text{eje}}}{C_p T_{01}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Esta ecuación concluye que, si el flujo es isentrópico, las presiones de estancamiento son constantes si y solo si no existe trabajo en el eje. (Recuérdese que, según el convenio de signos de termodinámica, el trabajo comunicado al fluido es negativo).

Si  $W_{\text{eje}}=0$ , el flujo se denomina *isentrópico e isoenergético*,  $P_{01} = P_{02}$ .

Véase, asimismo, que, según la ecuación de la energía:

$$-W_{\text{eje}} = 0 = C_p (T_{02} - T_{01}); \Rightarrow T_{01} = T_{02} \Rightarrow h_{01} = h_{02}$$

La relación entre las temperaturas estáticas y el número de Mach se estableció cuando se realizó el estudio para ondas de choque planas, y se obtuvo:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2] \cdot M_1^2}{1 + [(\gamma - 1)/2] \cdot M_2^2},$$

Obsérvese que la relación de temperaturas estáticas obtenida en el apartado de ondas de choque planas es aplicable a flujo isentrópico, puesto que en ambos casos las temperaturas de estancamiento se mantienen constantes.



Para un flujo isentrópico e isoenergético, la presión de estancamiento, estática, y el número de Mach se relacionan:

Teniendo en cuenta que  $P_{01} = P_{02}$  y recordando que

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{V^2}{2C_p T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$P_1 \left( 1 + \frac{V_1^2}{2C_p T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_2 \left( 1 + \frac{V_2^2}{2C_p T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \text{ o bien:}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left\{ 1 + \left[ (\gamma-1)/2 \right] \cdot M_1^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left\{ 1 + \left[ (\gamma-1)/2 \right] \cdot M_2^2 \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Se observa que las ecuaciones que relacionan las presiones y temperaturas estáticas entre dos puntos de una instalación y cuando el flujo es isentrópico, son función de los números de Mach en ambos puntos.

### 13.8 Condiciones críticas

Se denomina *estado crítico* cuando el flujo se desplaza a una velocidad sónica. Las propiedades del fluido en la sección donde esto suceda se denominan *propiedades críticas*.

Se quiere estudiar la aceleración de un gas, partiendo de una velocidad inicial nula hasta llegar a la velocidad sónica, y cuando el proceso es isoenergético e isentrópico. A medida que la velocidad del fluido aumenta, decrece su temperatura, con lo que la velocidad del sonido también decrecerá. Recuérdese que:

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\sqrt{\gamma R T}}{\sqrt{\gamma R T_0}} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para un proceso isentrópico y gas ideal, la relación entre la temperatura estática y la temperatura de estancamiento se ha definido como:

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right);$$

En el estado crítico,  $M = 1$ , con lo cual:

$$T_0 = T^* \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} 1^2 \right), \quad \text{o bien:} \quad \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma-1}$$



Se denomina  $T^*$ ,  $P^*$  y  $\rho^*$  a las propiedades del fluido en el estado crítico, mientras que  $T_0$ ,  $P_0$  y  $\rho_0$  son las propiedades de estancamiento.

Para un proceso isoenergético e isentrópico dado, la relación entre las presiones críticas y de estancamiento y las densidades críticas y de estancamiento con la temperatura se definen:

$$\frac{P^*}{P_0} = \left( \frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{T^*}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Estas dos ecuaciones se obtienen de combinar la ecuación que relacionaba la temperatura estática y de estancamiento con el número de Mach con, por un lado, la ecuación que relacionaba la presión estática y de estancamiento con el número de Mach y, por otro lado, la ecuación que relaciona la densidad estática y de estancamiento con el número de Mach. En las ecuaciones resultantes, se han sustituido los parámetros estáticos por los críticos.

### 13.9 Flujo unidimensional de un fluido compresible evolucionando a lo largo de un conducto de sección variable

Cuando un fluido fluye a lo largo de un conducto, su movimiento está afectado por los cambios en el área del conducto, la fricción en las paredes y la transferencia de calor o trabajo. No obstante, en conductos de sección variable, es común no considerar la transferencia de calor o trabajo, ni tampoco la existencia de fricción con las paredes, con lo cual las posibles aceleraciones o desaceleraciones del fluido estarán causadas por el cambio de sección del conducto. El flujo se considerará isoenergético e isentrópico.

Se denomina *flujo isoenergético*, cuando no existe transferencia de calor o trabajo. El flujo es isentrópico, cuando no existen ondas de choque ni fricción en el volumen de control a estudiar.

El fluido debe satisfacer las ecuaciones de:

Ecuación de continuidad:  $\rho V A = \dot{m} = \text{cte.}$

Ecuación de la Energía:  $h + \frac{V^2}{2} = h_0 = \text{cte.}$

Ecuación de Gibbs:  $dh - \frac{dP}{\rho} = T ds = 0$

Tomando logaritmos de la ecuación de continuidad y diferenciando, se llega a:

$$\log \rho + \log V + \log A = \log \text{cte.}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0;$$

Diferenciando la ecuación de la energía:

$$dh + V dV = 0$$

De la relación de Gibbs, se tiene:

$$dh = \frac{dP}{\rho}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0$$

La velocidad de propagación de una perturbación se definió como

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s, \quad dP = c^2 \cdot d\rho$$

de donde:

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} + V dV = 0$$

Combinando esta ecuación con la ecuación de continuidad, se llega a:

$$c^2 \left( -\frac{dV}{V} - \frac{dA}{A} \right) + V dV = 0$$

$$-c^2 \frac{dV}{V} + V dV = \frac{dA}{A} c^2$$

$$\frac{dV}{V} (V^2 - c^2) = \frac{dA}{A} c^2$$

$$\frac{dV}{V} \left( \frac{V^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{dA}{A};$$

Recordando que el número de Mach se define:  $M = \frac{V}{c}$ , se obtiene:



$$\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} \left( \frac{1}{\frac{V^2}{c^2} - 1} \right) = \frac{dA}{A} \left( \frac{1}{M^2 - 1} \right);$$

De esta última ecuación, se obtiene que la relación entre el cambio de velocidad y el cambio de sección del conducto depende del número de Mach del fluido, así para flujo subsónico y supersónico y un conducto convergente, se tiene:

- Para flujo subsónico,  $M < 1$ , si  $dA < 0$ ; entonces  $V \uparrow \Rightarrow h \downarrow$ ;  $P \downarrow$ ;  $\rho \downarrow$
- Para flujo supersónico,  $M > 1$ , si  $dA < 0$ ; entonces  $V \downarrow \Rightarrow h \uparrow$ ;  $P \uparrow$ ;  $\rho \uparrow$

De las ecuaciones diferenciales acabadas de hallar, se observa que, al aumentar la velocidad del fluido, la entalpía, la presión y la densidad disminuyen.

Con lo cual se concluye, que para flujo isoenergético e isentrópico, un conducto convergente siempre conduce el número de Mach hacia la unidad, mientras que uno divergente siempre lo lleva lejos de la unidad.

Si se considera el proceso de aceleración de un gas desde el reposo o desde un número de Mach subsónico bajo un conducto convergente, el número de Mach máximo posible que se puede alcanzar es la unidad. Este valor máximo puede ocurrir sólo al final del conducto convergente. Así, para que un fluido pase de régimen subsónico a supersónico, es necesaria una tobera convergente divergente.

Con el fin de averiguar si en la garganta de un conducto por el que fluye un fluido compresible el número de Mach es siempre la unidad, se utilizará de nuevo la ecuación:

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

Véase que, si  $dA = 0$ , la igualdad en la ecuación se cumple si  $M = 1$  o bien si  $dV = 0$ ; a priori, no es posible conocer cuál de las dos condiciones se cumple. Con el fin de averiguarlo, se realiza el siguiente estudio. Sea un conducto de sección variable por el que circula un fluido compresible. La ecuación de continuidad aplicada entre dos puntos genéricos del conducto establece:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Para un gas ideal, se cumple:

$$\rho = \frac{P}{R T}$$

$$V = M c = M \sqrt{\gamma R T}$$



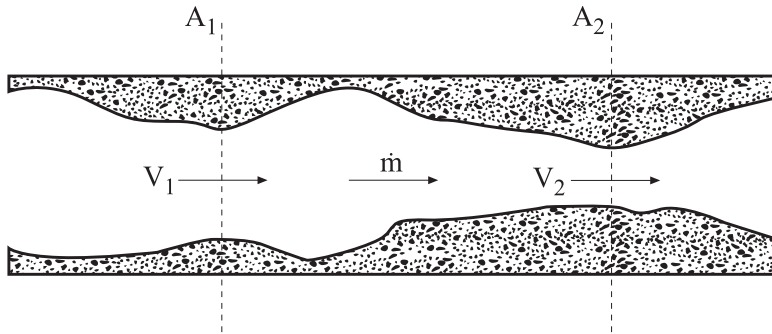


Fig. T 13.5  
Esquema de un  
conducto de  
sección variable

Sustituyendo en la ecuación de continuidad:

$$P_1 M_1 A_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{1}{\sqrt{T_1}} = P_2 M_2 A_2 \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \frac{1}{\sqrt{T_2}}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \frac{P_1}{P_2} \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones determinadas con anterioridad para fluido isentrópico, entre la relación de temperaturas y los números de Mach para dos puntos genéricos, y la relación entre presiones y los números de Mach, se obtiene:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \left\{ \frac{1 + [(\gamma-1)/2] M_2^2}{1 + [(\gamma-1)/2] M_1^2} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Ecuación que relaciona las dos secciones genéricas con los números de Mach en un conducto de sección variable.

Si una de estas dos secciones fuese la sección crítica, implicaría que en dicha sección el número de Mach ha de ser la unidad, de donde:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + [(\gamma-1)/2] M^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Representando gráficamente la relación de áreas en función del número de Mach y para un valor de  $\gamma$  dado, se observa que la función pasa por un mínimo para  $M = 1$ , lo cual implica que, para un conducto de sección variable, el número de Mach puede llegar a ser la unidad, únicamente en el punto donde la sección sea mínima.



### 13.9.1 Concepto de caudal de bloqueo

La determinación del caudal másico que fluye por un conducto de sección variable, se define cuando se conocen la densidad, velocidad y sección en un punto dado:

$$\dot{m} = \rho V A$$

$$\text{Si el fluido es un gas ideal: } \rho = \frac{P}{R T} ; \quad V = M \cdot c = M \sqrt{\gamma R T}$$

$$\text{de donde } \dot{m} = P \cdot A \cdot M \left( \frac{\gamma}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} ;$$

Las relaciones entre las presiones y temperaturas estáticas y de estancamiento con el número de Mach eran:

$$P = P_0 \cdot \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\left( \frac{\gamma}{\gamma-1} \right)} ; \quad T = T_0 \cdot \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación del caudal másico, se obtiene:

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \left( \frac{P_0 A}{\sqrt{R T_0}} \right) M \left[ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right]^{-\left( \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right)}$$

En el punto donde el área sea el área crítica, se cumplirá  $A = A^*$ ; y  $M = 1$ , de donde:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A^*}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Siendo este el caudal másico que fluye a través de la sección mínima de paso.

La ecuación del caudal másico se puede dar en forma adimensional, y se obtiene:

$$\frac{\dot{m} \cdot \sqrt{R T_0}}{P_0 A} = \sqrt{\gamma} M \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\left( \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right)} ;$$

El término de la izquierda de esta ecuación muestra la función adimensional del caudal másico; se observa que es únicamente función del número de Mach y del índice de politropía.

Si se representa esta ecuación para diferentes valores del índice de politropía, se observa que todas las funciones tienen un máximo y este máximo siempre aparece para Mach igual a la unidad. Puesto que el valor máximo del número de Mach en la garganta es la unidad, esto implica que el valor de la función adimensionalizada de caudal másico será también máxima en dicha sección.



### 13.9.2 Evolución del flujo en una tobera convergente

Sea un tanque de grandes dimensiones del cual se extrae gas a través de una tobera convergente hacia una región de presión variable. Dicha presión se puede variar a voluntad. Se supone que no existe fricción en las paredes ni transferencia de calor o trabajo. El flujo se considera isentrópico e isoenergético.

En función de lo explicado hasta el momento, se conoce:

Puesto que la tobera es convergente, el caudal másico estará bloqueado al llegar a  $M = 1$  en la sección mínima. El flujo en la entrada de la tobera será subsónico; por tanto, toda la tobera estará sometida a flujo subsónico, con la posible excepción del extremo de la misma. Como el flujo no puede ser supersónico, no pueden existir ondas de choque. Existe un caudal másico máximo, que se determinará en función de las constantes del gas ( $\gamma$  y  $R$ ), los valores de las propiedades en el tanque y el área de salida. Recuérdese que, para flujo isentrópico, las propiedades  $P_0$  y  $T_0$  se mantienen constantes en todo punto.

En la figura que se reproduce a continuación, se ha graficado el caudal másico adimensional

sional  $\frac{\dot{m} \sqrt{R T_0}}{P_0 A_{sal}}$  en función del gradiente de presiones; asimismo, se detalla la caída de presión a lo largo de la tobera, así como la presión adimensional en la sección mínima de paso en función del gradiente de presiones entre depósitos. El gradiente de presiones se modificará, al ir disminuyendo la presión en el depósito receptor, el de la derecha.

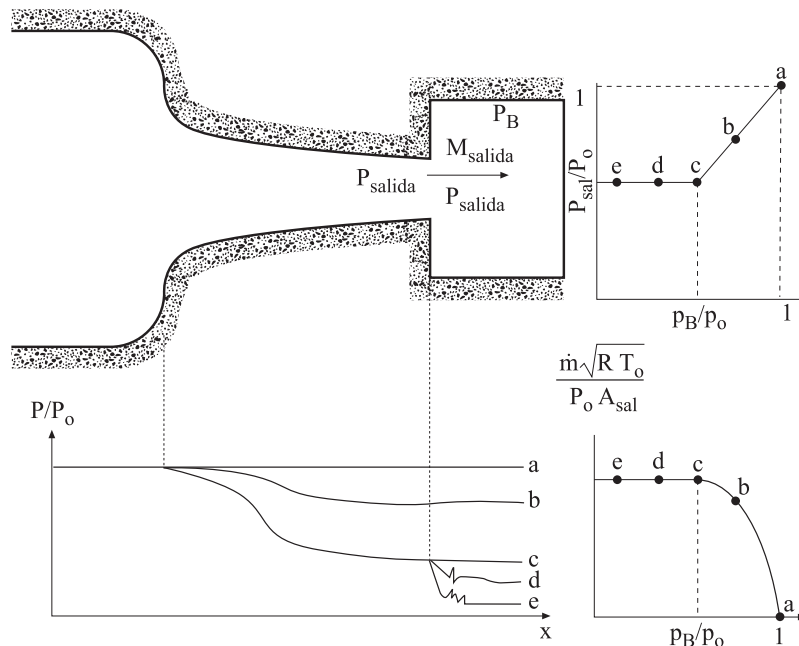


Fig. T 13.6  
Distribución de presiones y caudal másico circulante en una tobera convergente  
Fuente: Gerhard P, Gross R, Hochstein J. Mecánica de Fluidos 1995



Véase que la curva *a* es la que caracteriza un flujo nulo; en la *b* el flujo es pequeño, siendo asimismo pequeño el gradiente de presiones a lo largo de la tobera. Para estas curvas, el flujo es subsónico en todo punto. La curva *c* caracteriza el flujo sónico en la garganta de la tobera; a partir de este punto, el flujo estará bloqueado, el caudal másico no podrá aumentar y el número de Mach en la garganta será la unidad. Las curvas *d* y *e* se caracterizan por tener la misma distribución de presiones y caudal másico que la curva *c*. El fluido saliente de la garganta ha de realizar una adaptación brusca de su presión con la presión que posee el depósito receptor; esta adaptación se realiza mediante una expansión del fluido.

Para las curvas *b* y *c*; se cumple que:

$$\frac{P_{\text{sal}}}{P_0} = \frac{P_B}{P_0}$$

El flujo bloqueado aparece puesto que, una vez el flujo de salida se hace sónico, las ondas de presión de la región de salida no se pueden propagar corriente arriba en la tobera con el fin de causar algún ajuste del flujo.

### 13.9.3 Evolución del flujo en una tobera convergente divergente

Sea la tobera convergente divergente que se expone en la figura siguiente. Al igual que en el caso precedente, la presión en la cámara aguas abajo se puede variar mediante la válvula de control. Se supone que no existe fricción y que no hay transferencia de calor o trabajo.

Como observaciones preliminares, se puede establecer:

El flujo podrá superar el número de Mach sónico en la zona divergente de la tobera, con lo cual, en esta región el flujo podrá llegar a ser supersónico y, en consecuencia, podría haber ondas de choque en el flujo. Si las hay, el flujo no se podrá considerar completamente isentrópico aunque sí isoenergético.

El caudal másico máximo posible en la tobera está determinado por las constantes del gas, las propiedades del gas en el tanque y el área mínima, la cual se presenta en la garganta.

Los valores máximos del número de Mach aparecen en la sección divergente de la tobera y son debidos a la aceleración del fluido en un proceso isentrópico. El número de Mach máximo forzosamente ha de aparecer en la salida de la tobera, al final de la zona divergente.

Comparando las mismas variables que en el caso precedente, se obtiene el siguiente diagrama:

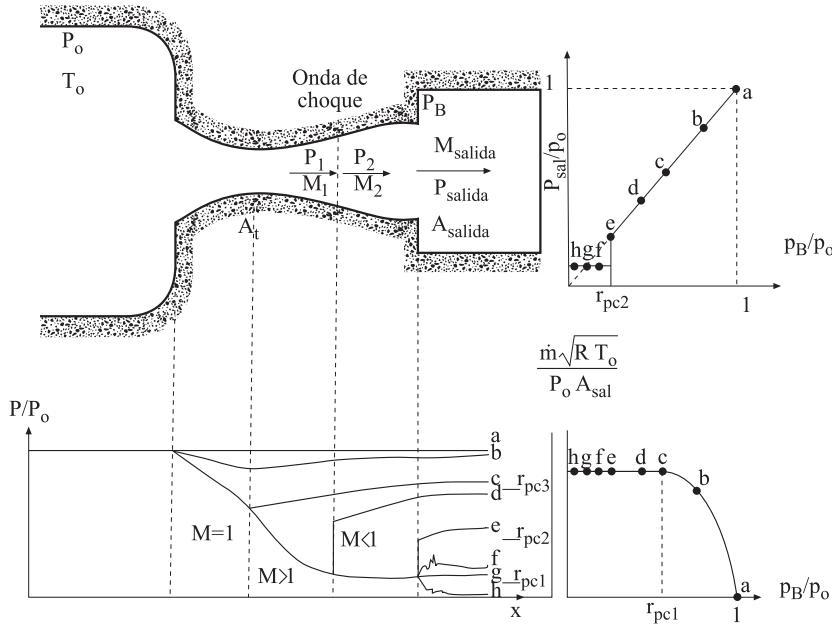


Fig. T 13.7  
Distribución de  
presiones y caudal  
máscico circulante  
en una tobera  
convergente-  
divergente.  
Fuente:  
Gerhard P,  
Gross R,  
Hochstein J.  
Mecánica de  
Fluidos 1995

En la curva *a* no hay flujo; la curva *b* caracteriza un flujo subsónico, tanto en la zona convergente como en la divergente. En la parte convergente de la tobera, el gas se acelera y la presión decrece,  $M_{garganta} \ll 1$ , en la parte divergente de la tobera el flujo se desacelera y la presión aumenta. Se tiene flujo subsónico, no hay ondas de choque.

El caudal máscico circulante se puede calcular mediante la ecuación:

$$\frac{\dot{m} \cdot \sqrt{R T_0}}{P_0 A} = \sqrt{\gamma} M \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\left( \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \right)}$$

Con las ecuaciones:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A^*}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}; \quad \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left\{ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \left[ (\gamma-1)/2 \right] M^2 \right) \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

se podría calcular un valor de  $A^*$  en el plano de salida, entendiendo que la  $A^*$  sería menor que la  $A_t$ .

Recuérdese que, en general, el área  $A^*$  es el área necesaria para acelerar o desacelerar un flujo hasta llegar a condiciones sónicas. Dicha sección no tiene por qué ser un área real del conducto.

En la curva *c*, el flujo es tal que el número de Mach en la garganta es igual a 1; el flujo está bloqueado; la presión y la sección en la garganta se definen como  $P^*$  y  $A^*$ . Corriente abajo de la garganta, la presión aumenta; ahora el fluido se expande; la contra-



presión a la cual la tobera se bloquea es mayor que  $P^*/P_0$ ; la relación de presiones que causa que el bloqueo ocurra en primera instancia se denomina *primera relación de presión crítica*  $r_{pc1}$ , y se puede calcular, hallando la relación de presiones correspondiente a la región subsónica de  $\frac{A}{A^*}$ .

En la curva  $d$ , se observa que, en la porción convergente de la tobera, el flujo se acelera, alcanza la velocidad sónica en la garganta y se sigue acelerando en la zona divergente inmediatamente después de la garganta, alcanzando en esta zona una velocidad supersónica. En un punto genérico en la zona divergente de la tobera, aparece una onda de choque, lo cual modifica sustancialmente las condiciones de presión después de la onda, aumenta la presión y el flujo pasa a ser subsónico; la presión a partir de este punto irá aumentando hasta llegar a ser la presión del depósito de salida. La posición exacta de la onda de choque depende de la contrapresión.

La curva  $e$  sigue un proceso similar al seguido por la curva  $d$ , aunque ahora la onda de choque se crea en la sección de salida de la tobera, es decir, la relación de presiones entrada-salida es tal que en toda la zona divergente de la tobera el flujo es supersónico, y la onda de choque se produce en el punto más alejado de la garganta posible. A partir de este punto, se verá que, aunque disminuya la presión en el depósito de salida, la onda de choque se producirá en el mismo punto. El caudal másico circulante, por otro lado, sigue siendo el mismo que para las curvas  $c$  y  $d$ .

Una ulterior disminución de la presión en el depósito de salida da lugar a las mismas características de flujo que en el caso anterior, lo que sucede ahora, curva  $f$ , es que la presión que aparece a la salida de la onda de choque es menor que la que hay en el depósito de salida; así, el flujo experimentará una pequeña compresión en el depósito hasta acomodarse a la presión del mismo. En realidad, la onda de choque se convierte ahora en multidimensional, el gas saldrá de la tobera con velocidad supersónica y con un número de Mach saliente que corresponde a la relación de áreas entre la garganta y la salida de la tobera.

Puesto que el flujo en toda la tobera se considera isentrópico, la presión de estancamiento se mantendrá constante en toda la tobera.

La curva  $g$  da lugar a las mismas características que la curva  $f$ , con la salvedad de que ahora la presión a la salida de la onda de choque coincide con la presión del depósito, así que no es necesario ajuste alguno de presión.

Por último, se observa que en la curva  $h$  la presión a la salida de la onda de choque es mayor que la que existe en el depósito de salida, con lo cual la adaptación de presión se realizará mediante una expansión del gas.

Como conclusión, se puede establecer que, en una tobera convergente divergente, aparecen cuatro regímenes de flujo, delimitados por las curvas  $c$ ,  $e$ , y  $g$ . En las curvas anteriores a la  $c$ , el régimen de flujo es simplemente el de un tubo de venturi, el flujo es subsónico e isentrópico en todo punto. En la porción convergente, el flujo se acelera y,



en la divergente, se desacelera. El número de Mach máximo y la presión mínima ocurren en la garganta.

Entre las curvas  $c$  y  $e$ , el flujo es sónico en la garganta y parcialmente supersónico en la porción divergente de la tobera. La aceleración del fluido termina en una onda de choque; que se mantiene en la porción divergente en una localización determinada por el valor exacto de la contrapresión. El flujo experimenta una desaceleración subsónica desde la onda de choque hasta la salida. El flujo está bloqueado.

El estado existente entre las curvas  $e$  y  $g$  se denomina *régimen sobreexpandido*. El flujo se acelera a lo largo de toda la tobera. En la garganta, el flujo es sónico y, a la salida de la tobera, es supersónico. Al salir de la tobera, la presión del gas aumenta hasta llegar a tener la presión del fluido aguas abajo, depósito de salida.

Por último, la curva  $h$  obedece al flujo en *régimen subexpandido*. Este caso es similar al régimen sobreexpandido, con la excepción de que los ajustes de presión externos son expansivos en lugar de compresivos.

Las relaciones de la contrapresión con respecto a la presión de suministro que corresponden a estos casos se denominan:

- Primera relación de presión crítica ( $r_{pc1}$ ); (curva  $c$ )
- Segunda relación de presión crítica ( $r_{pc2}$ ); (curva  $e$ )
- Tercera relación de presión crítica ( $r_{pc3}$ ); (curva  $g$ )

Estas relaciones se calculan:

$$a) \quad r_{pc1} = \frac{P}{P_0} \frac{A}{A^*}; \quad \frac{A}{A^*} = \frac{A_{sal}}{A_{garganta}}, \quad M < 1$$

Mediante la relación de áreas, se determina la relación  $\frac{P_{estática}}{P_0}$  buscando en la zona subsónica de las tablas.

$$b) \quad r_{pc2} = \frac{P_2}{P_1}(M_{sal}) \cdot \frac{P_1}{P_{01}}(M_{sal})$$

Puesto que existe una onda de choque a la salida de la tobera, la segunda relación de presión crítica se calcula determinando la relación entre las presiones estática corriente abajo y de estancamiento corriente arriba, donde:

$\frac{P_2}{P_1}(M_{sal})$  es la función de la relación de presiones estáticas de la onda de choque.

$\frac{P_1}{P_{01}}(M_{sal})$  es la relación de presiones estática, estancamiento a la entrada de la onda de choque.



El número de Mach a la salida se determina mediante la relación de secciones:

$$M_{\text{sal}} = M \left( \left( \frac{A}{A^*} \right) = \left( \frac{A_{\text{sal}}}{A_{\text{garganta}}} \right) \right);$$

c) 
$$r_{\text{pc3}} = \frac{P}{P_0} \frac{A}{A^*}; \quad \frac{A}{A^*} = \left( \frac{A_{\text{sal}}}{A_{\text{garganta}}} \right), \quad M > 1$$

Para la relación de secciones de la tobera, la relación  $\frac{P_{\text{estática}}}{P_0}$  se halla buscando en la zona supersónica de tablas.

### 13.10 Flujo compresible unidimensional estacionario en conductos de sección constante

En un conducto de sección constante por el que circula fluido incompresible, la velocidad media, el caudal másico, la cantidad de movimiento y la energía cinética se mantienen constantes.

En un conducto de sección constante por el que circula fluido compresible, al variar la densidad variará también la velocidad media con el fin de que se cumpla la ecuación de continuidad. La variación de velocidad implica que la energía cinética y la cantidad de movimiento también varíen; la caída de presión en el sistema dependerá de los esfuerzos cortantes y de los cambios de cantidad de movimiento.

La fricción existente entre el fluido y el conducto no puede ser interpretada en términos de caída de presión estática. Para flujo compresible, el término de fricción aparecerá en la ecuación de cantidad de movimiento. En consecuencia, es necesario solucionar simultáneamente las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, para determinar los efectos de la fricción sobre el fluido.

Aparecen cuatro tipos de problemas:

- Flujo adiabático sin transferencia de calor y con fricción. Flujo de Fanno.
- Flujo isotérmico. Se transfiere el calor necesario para mantener la temperatura.
- Flujo con transferencia de calor y sin fricción. Flujo de Rayleigh.
- Flujo con fricción y transferencia de calor simultáneas.

A continuación, se va a realizar un breve resumen de varios de estos flujos.





### 13.10.1 Flujo adiabático sin transferencia de calor y con fricción, flujo de Fanno

Hipótesis de trabajo:

- Régimen permanente
- Gas ideal
- No hay transferencia de calor
- El conducto es horizontal y de sección constante
- Existen esfuerzos cortantes entre el fluido y la pared

La figura siguiente representa un conducto de sección constante por donde circula fluido compresible. Se define un volumen de control donde se aplicarán las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos.

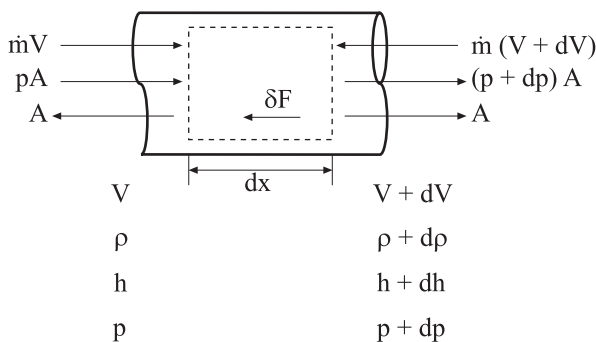


Fig. T 13.8  
Elemento diferencial de volumen en un conducto de área constante, con fricción y sin transferencia de calor

Aplicando la ecuación integral de continuidad al volumen de control de la figura anterior, y para régimen permanente se tiene:

$$\rho v A = (\rho + d\rho)(v + dv) A$$

Esta ecuación se puede dar como  $\frac{\dot{m}}{A} = G = \text{cte.}$

Despreciando los diferenciales de segundo orden, se obtiene:

$$\rho dv + v d\rho = 0$$

Dividiendo por  $\rho V$ :

$$\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

Tomando la ecuación de estado para gases ideales,  $P = R T \rho$ , y, diferenciándola, se tiene:

$$dP = R (\rho dT + T d\rho)$$

Dividiendo por  $R T \rho$  se obtiene:  $\frac{dP}{R T \rho} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}$ ,



que también se puede dar como  $\frac{dP}{P} = \frac{dT}{T} + \frac{d\rho}{\rho}$ , o bien  $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{P} - \frac{dT}{T}$

La velocidad del fluido se puede dar como  $v = M c = M \sqrt{\gamma R T}$

Aplicando logaritmos y diferenciando, se tiene, (diferenciando logarítmicamente):

$$\ln(v) = \ln(M) + \frac{1}{2} \ln(\gamma R T)$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{\gamma R dT}{2 \gamma R T}; \quad \frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}$$

Sustituyendo las ecuaciones que definen  $\frac{dv}{v}$  y  $\frac{d\rho}{\rho}$  en la ecuación de continuidad, se obtiene la expresión resultante de la ecuación de continuidad:

$$\frac{dM}{M} + \frac{dP}{P} - \frac{1}{2} \left( \frac{dT}{T} \right) = 0 \quad (A)$$

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control definido en la figura inicial de este apartado, se tiene:

$$\sum dF_x = \rho v A [(v + dv) - v]$$

Las fuerzas correspondientes a la distribución de presiones y el esfuerzo cortante son:

$$\sum dF_x = p A - (p + dp) A - \tau_w P_{\text{perímetro}} dx$$

Igualando estas dos ecuaciones, se tiene:

$$\rho v A dv = -A dp - \tau_w P_{\text{perímetro}} dx$$

Dividiendo por  $\rho v^2 A$ , se llega a:

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{\rho v^2} + \frac{\tau_w}{\rho v^2} \left( \frac{P_{\text{perímetro}}}{A} \right) dx = 0$$

Recordando que

$$M^2 = \frac{v^2}{\gamma R T} = \frac{\rho v^2}{\gamma p}; \quad D_h = \frac{4 A_{\text{área mojada}}}{P_{\text{perímetro mojado}}}; \quad C_f = \frac{f}{4} = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho v^2}$$

Y, sustituyendo estas relaciones en la ecuación diferencial anterior, se llega a:

$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{\gamma M^2} \left( \frac{dP}{P} \right) + \frac{1}{2} 4 C_f \frac{dx}{D_h} = 0$$



Recuérdese que la ecuación de continuidad establecía  $\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}$

Sustituyendo la ecuación de continuidad en la de cantidad de movimiento y multiplicando por  $\gamma M^2$ , se obtiene:

$$\gamma M dM + \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dP}{P} + \frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} = 0 \quad (B)$$

De la aplicación de la ecuación de la energía al mismo volumen de control que para las ecuaciones precedentes, se obtiene:

$$dq - dw = \left[ (h + dh) + \frac{1}{2} (v + dv)^2 \right] - \left[ h + \frac{v^2}{2} \right]$$

Si el flujo se considera adiabático y no hay transferencia de trabajo, despreciando además los diferenciales de segundo orden con respecto a los de primer orden, se obtiene:

$$dh + v dv = 0$$

Puesto que el gas se considera ideal, se puede decir que:

$$C_p dT + v dv = 0$$

ecuación que se puede dar como:

$$C_p \left[ dT + d \left( \frac{v^2}{2C_p} \right) \right] = C_p dT_0 = 0 ; \text{ siendo } T_0 = \text{temperatura de estancamiento}$$

De esta ecuación se deduce que la temperatura de estancamiento a lo largo de todo el conducto se mantiene constante y, en consecuencia la entalpía de estancamiento deberá ser asimismo constante a lo largo de todo el conducto. Esta ecuación se denomina *ecuación de la línea de Fanno*.

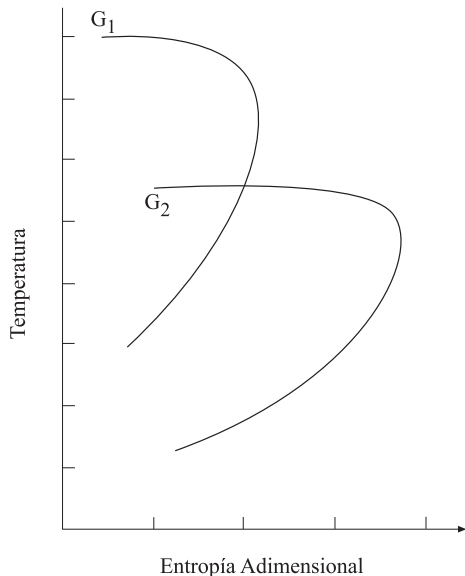
En la figura siguiente, se representan tres líneas de Fanno en un diagrama temperatura - entropía, líneas de entalpía de estancamiento constante. Dichas líneas se caracterizan

por tener un caudal másico  $G = \frac{\dot{m}}{A}$  constante y unas mismas condiciones estáticas

iniciales. Obsérvese que, independientemente del estado inicial, la evolución del fluido en el interior del conducto es hacia el punto de máxima entropía, donde el número de Mach será la unidad. Este diagrama ha de entenderse de modo que, en un conducto dado, pueden pasar diferentes caudales másicos. Para cada caudal másico existe una longitud de conducto para la cual el flujo en el extremo del conducto es sónico y la entropía es máxima.



Fig. T 13.9  
Representación de  
la línea de Fanno



Recuérdese que la ecuación de continuidad se podía dar como:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T}; \quad dv = v \left( \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T} \right)$$

Puesto que  $\frac{c_p}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1}$  y que  $M^2 = \frac{\rho V^2}{\gamma P} = \frac{V^2}{\gamma R T}$ ,

el término  $\frac{v^2}{C_p T}$  se puede dar como  $\frac{v^2}{C_p T} = \frac{\gamma R}{C_p} \frac{v^2}{\gamma R T} = (\gamma-1)M^2$

La ecuación de la energía para gas ideal  $C_p dT + v dv = 0$  se podrá transformar en:

$$C_p dT + v^2 \left( \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T} \right) = 0$$

Dividiendo por  $C_p T$ , se llega a:

$$\frac{dT}{T} + \frac{v^2}{C_p T} \left( \frac{dM}{M} + \frac{dT}{2T} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} \left( 1 + \frac{v^2}{C_p T^2} \right) + \frac{v^2}{C_p T} \frac{dM}{M} = 0$$

de donde, en función del número de Mach, se tiene:

$$\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{dT}{T} + (\gamma-1) M dM = 0 \quad (C)$$



siendo esta la ecuación de la energía resultante. Véase que relaciona el cambio de temperatura con el cambio del número de Mach entre dos puntos genéricos de un conducto.

Las ecuaciones resultantes de continuidad, cantidad de movimiento y energía contienen cuatro diferenciales adimensionales:  $\frac{dp}{p}$ ;  $\frac{dT}{T}$ ;  $\frac{dx}{D_h}$ ;  $dM$ . Puesto que se dispone de tres ecuaciones, se podrán expresar tres de las diferenciales en función de la diferencial independiente. Esta será  $\frac{dx}{D_h}$ , puesto que caracteriza la longitud del conducto.

La ecuación de la energía (C) se puede dar de la forma:

$$\frac{dT}{T} = (-) \frac{(\gamma-1)M}{1 + \left[ \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right]} dM \quad (D)$$

Sustituyendo esta ecuación en la de continuidad (A), se obtiene:

$$\frac{dP}{P} = - \left\{ \frac{1}{M} + \frac{\left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M}{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2} \right\} dM \quad (E)$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación de cantidad de movimiento (B), y después de simplificar, se llega a:

$$dM = \frac{M \left\{ 1 + \left[ \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M^2 \right] \right\}}{(1-M^2)} \frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} \quad (F)$$

Sustituyendo ahora la ecuación acabada de hallar en las dos ecuaciones precedentes, se obtendrá la variación de temperaturas y presiones en función del número de Mach, del índice de politropía y de las características del conducto.

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(\gamma-1)M^2}{(1-M^2)} \frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} \quad (G)$$

$$\frac{dP}{P} = - \frac{1 + (\gamma-1)M^2}{(1-M^2)} \frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} \quad (H)$$

Las ecuaciones (F), (G) y (H) determinan cómo varían la temperatura, la presión y el número de Mach a medida que el flujo se desplaza a lo largo de la tubería.



Obsérvese que, dependiendo del término  $(1 - M^2)$ , los cambios de presión, temperatura y número de Mach pueden ser positivos o negativos. Así, se puede decir que para flujo subsónico, la fricción provoca que el número de Mach aumente y la presión y temperatura disminuyan a medida que se avanza por el conducto, el flujo se acelera. En cambio para flujo supersónico, la fricción provoca que el número de Mach disminuya mientras que la presión y temperatura aumentan.

El punto en donde  $M = 1$  sólo puede ocurrir cuando  $4C_f \frac{dx}{D_h} = 0$ , y esto únicamente puede suceder cuando  $C_f = 0$  ó  $dx = 0$ . Si  $C_f = 0$ , implica que no existe fricción. Este sería el caso del estudio de un flujo isentrópico. Si  $dx = 0$ , significa que el fluido no puede seguir corriente abajo; es decir, para flujo adiabático con fricción, el número de Mach sólo puede ser 1 al final del conducto.

El flujo adiabático con fricción en un conducto de área constante y el flujo isentrópico en una tobera convergente se parecen en que, en ambos, el número de Mach se dirige hacia el valor 1 y en que el número de Mach solo puede valer 1 al final del conducto.

A continuación, se estudiará cómo actúa el efecto de fricción sobre las propiedades de estancamiento. Para flujo adiabático, se ha demostrado mediante la ecuación de la energía que la temperatura de estancamiento se mantiene constante,  $dT_0 = 0$ .

La relación entre la de presión de estancamiento, la presión estática y el número de Mach venía dada por:

$$P_0 = P \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Sacando logaritmos y luego diferenciando (diferenciando logarítmicamente), se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln P_0 &= \ln P + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \\ \frac{dP_0}{P_0} &= \frac{dP}{P} + \left\{ \frac{\gamma M}{1 + \left[ \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]} \right\} dM ; \end{aligned} \quad (I)$$

Sustituyendo las ecuaciones en (F) y (H) en la ecuación acabada de determinar y simplificando, se llega a:

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} 4C_f \frac{dx}{D_h} ;$$



Esta ecuación indica que la presión de estancamiento en un conducto de sección constante y con fricción, siempre decrece a lo largo del conducto. El valor mínimo de la presión de estancamiento ha de encontrarse al final del conducto.

El caudal másico adimensional venía dado por la ecuación  $\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0 A}$ . Esta ecuación encontrará su máximo al final del conducto, puesto que  $R$ ,  $A$  y  $T_0$  son constantes a lo largo del conducto, y  $P_0$  tiene su mínimo al final del conducto.

Si se integran las ecuaciones (F), (G) y (H), se obtienen la variación del número de Mach, la presión y la temperatura a lo largo del conducto.

Integrando la ecuación (F) entre una sección genérica del conducto y una sección en donde se cumple que el número de Mach vale la unidad, se obtiene:

$$\int_x^{x+L^*} 4C_f \frac{dx}{D_h} = \int_M^1 \frac{2(1-M^2)}{\gamma M^3 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right\}} dM$$

Procediendo a la integración, se obtiene:

$$4C_f \frac{L^*}{D_h} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left( \frac{(\gamma+1)M^2}{2 \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right\}} \right)$$

La longitud  $L^*$  se denomina *longitud crítica*, es decir, longitud para la cual en el extremo del conducto se tienen condiciones críticas, valor del número de Mach igual a la unidad. El número de Mach que aparece en la ecuación precedente es el número de Mach del fluido en el extremo entrante del conducto de longitud  $L^*$ .

Entre dos puntos genéricos del conducto, y basándose en la ecuación obtenida, se puede establecer:

$$4C_f \frac{\Delta x}{D_h} = 4C_f \frac{L^*}{D_h}(M_1) - 4C_f \frac{L^*}{D_h}(M_2)$$

Obsérvese que esta ecuación relaciona la longitud entre dos puntos genéricos de un conducto con la longitud de cada uno de estos puntos con la sección donde  $M = 1$ .

La relación entre la presión estática y la temperatura estática con el número de Mach se obtiene de integrar las ecuaciones (D) y (E).

De la integración de la ecuación (E) entre un punto genérico y un punto donde el número de Mach valga la unidad, se obtiene:



$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Operando de manera homóloga para la ecuación (D), se obtendrá:

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

Para obtener la relación de presiones de estancamiento, se combinan las ecuaciones (E) e (I) y, después de proceder a la integración, se llega a:

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{1}{M} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Estas funciones se encuentran tabuladas para diferentes valores de  $\gamma$ .

Es interesante recordar que, entre dos puntos de un conducto, se pueden establecer las siguientes relaciones, cuyo numerador y denominador han sido definidos por las ecuaciones precedentes.

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{P}{P^*}(M_2)}{\frac{P}{P^*}(M_1)}; \quad \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{\frac{P_0}{P_0^*}(M_2)}{\frac{P_0}{P_0^*}(M_1)}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{T}{T^*}(M_2)}{\frac{T}{T^*}(M_1)};$$

### 13.10.2 Flujo compresible isotérmico con fricción en una conducción larga de sección constante

Este es el caso de un fluido compresible que fluye a lo largo de una tubería larga donde se considera la fricción y existe además una transferencia de calor suficiente para que la temperatura del gas se mantenga constante.

Para flujo isotérmico, la viscosidad del gas se mantendrá constante a lo largo de la tubería, puesto que la temperatura se mantiene constante y las variaciones de viscosidad con la presión son pequeñas.

Las ecuaciones gobernantes obtenidas al aplicar las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos a un volumen diferencial de fluido situado en el interior de un conducto de sección constante son:





Ecuación de continuidad:  $G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho v = \text{cte.}$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{2}{\rho} \frac{dP}{v^2} + \frac{2}{v} \frac{dv}{dx} + \frac{4C_f}{D_h} = 0, \text{ o bien } \frac{dP}{\rho} + v dv + \frac{v^2}{2} \frac{4C_f}{D_h} dx = 0$$

Ecuación de la energía:  $\delta Q = d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dh_0 = C_p dT_0$

Extrayendo logaritmos y luego diferenciando la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = -\frac{dv}{v}$$

Considerando el fluido como un gas ideal, se tiene que se han de cumplir cualquiera de las siguientes relaciones:

$$\frac{P}{\rho} = p v = RT = \text{cte.}, \text{ o también: } \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2}; \text{ ó } P_1 v_1 = P_2 v_2$$

De la diferenciación logarítmica de la ecuación de estado, se tiene:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{dv}{v} = -\frac{dv}{v}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de cantidad de movimiento, se llega a:

$$\frac{2}{P} \frac{P dP}{\rho v^2} - \frac{2}{P} \frac{dP}{P} + \frac{4C_f}{D_h} dx = 0$$

Para flujo isotérmico, el término  $\frac{2}{P \rho v^2}$  se puede dar como

$$\frac{2}{P \rho v^2} = \frac{2 v^2}{v^2 P v} = \frac{2}{G^2 RT} = \text{cte.}$$

con lo que, si se definen estos parámetros en un punto dado, se puede proceder como si se tratase de una constante. Combinando las dos ecuaciones precedentes, se tiene:

$$\frac{2}{P_1 \rho_1 v_1^2} \int_1^2 P dP - 2 \int_1^2 \frac{dP}{P} + \frac{4C_f}{D_h} \int_0^L dx = 0$$

Integrando entre dos puntos genéricos, se llega a:

$$\frac{4C_f L}{D_h} = \frac{(P_1^2 - P_2^2)}{P_1 \rho_1 v_1^2} + \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2$$



$$\text{Puesto que } c_1^2 = \gamma R T_1 = \frac{\gamma P_1}{\rho_1} = \gamma P_1 v_1; \quad M_1^2 = \frac{v_1^2}{c_1^2}$$

se concluye:

$$\frac{4C_f L}{D_h} = \frac{\gamma P_1}{\gamma P_1} \frac{v_1 (P_1^2 - P_2^2)}{P_1 v_1^2} + \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 = \frac{1}{\gamma M_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2 \right] + \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^2$$

ecuación que relaciona el factor de fricción con la caída de presión en la tubería y el número de Mach a la entrada.

Recordando que la ecuación que determina la relación entre la temperatura estática y, de estancamiento en un punto dado era  $T_{01} = T_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$ , y dado que, para el presente caso, la temperatura estática se mantiene constante, se obtiene:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}$$

Utilizando ahora la ecuación que determina la relación entre la presión estática y la de estancamiento para una sección de conducto genérica, y comparando dicha ecuación entre dos puntos del conducto, se obtiene:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

La función impulso se define como la cantidad de movimiento asociada al fluido en una sección determinada,  $F = PA + m v$ . En función del número de Mach, esta relación puede darse como  $F = PA (1 + \gamma M^2)$ , con lo que la relación de funciones impulso entre dos puntos del conducto será:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{(1 + \gamma M_2^2)}{(1 + \gamma M_1^2)}$$

Obsérvese que estas dos últimas ecuaciones, al igual que la ecuación que relaciona el factor de fricción con la caída de presión en la tubería y el número de Mach a la entrada, dependen de la relación de presiones estáticas, con lo que sería interesante relacionar las presiones estáticas de dos puntos genéricos con el número de Mach en dichos puntos.



### 13.10.2.1 Concepto de condición límite en flujo isotérmico con fricción

A medida que el gas fluye a lo largo del conducto, la presión estática disminuye. La condición límite se alcanzará cuando el conducto no pueda alargarse sin que se alteren las condiciones aguas arriba; esta condición es la de flujo bloqueado. En dicho punto,

se debe cumplir que  $\frac{dx}{dP} = 0$

Recordando que la ecuación de cantidad de movimiento hallada previamente era:

$$\frac{2 P dP}{P \rho v^2} - \frac{2 dP}{P} + \frac{4 C_f dx}{D_h} = 0$$

dividiendo por  $dP$ , reordenando y teniendo en cuenta la condición límite definida previamente, se tiene:

$$\frac{dx}{dP} = \frac{2 D_h}{4 C_f} \left( -\frac{1}{\rho v^2} + \frac{1}{P} \right) = 0$$

Esta condición da lugar a que la velocidad límite sea:

$$v_L = \sqrt{\frac{P_L}{\rho_L}} = \sqrt{P_L v_L} = \sqrt{R T_L} = \sqrt{R T_1} = \frac{c_1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{c_L}{\sqrt{\gamma}}$$

con lo que el número de Mach límite será  $M_L = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ , y se encontrará al final del conducto.

Obsérvese que, para este tipo de flujo, el número de Mach límite que establece las condiciones de bloqueo de flujo es menor que la unidad.

Según la ecuación de estado para gases ideales, se establece:

$$\frac{P_L}{P_1} = \frac{\rho_L}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_L} = \frac{v_1}{v_L} = \frac{v_1 \sqrt{\gamma}}{c_1} = M_1 \sqrt{\gamma}; \quad M_1^2 \gamma = \left( \frac{P_L}{P_1} \right)^2;$$

Una forma de la ecuación de cantidad de movimiento hallada para flujo isotérmico era:

$$\frac{4 C_f L}{D_h} = \frac{1}{\gamma M_1^2} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2 \right] + \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^2;$$

Recordando que, cuando  $L = L_{\max}$ ,  $P_2 = P_L$ , y utilizando la relación acabada de hallar, se obtiene:



$$\frac{4C_f L_{\max}}{D_h} = \left(\frac{p_1}{p_L}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{p_L}{p_1}\right)^2\right] + \ln\left(\frac{p_L}{p_1}\right)^2;$$

$$\frac{4C_f L_{\max}}{D_h} = \left[\left(\frac{p_1}{p_L}\right)^2 - 1\right] - \ln\left(\frac{p_1}{p_L}\right)^2;$$

$$\frac{4C_f L_{\max}}{D_h} = \left[\frac{1 - \gamma M_1^2}{\gamma M_1^2}\right] + \ln(\gamma M_1^2);$$

ecuación que relaciona el coeficiente de fricción, diámetro y longitud máxima del conducto en función del número de Mach en un punto genérico del conducto. Esta ecuación se encuentra tabulada.

Operando de manera similar con las ecuaciones que relacionaban las presiones de estancamiento, las temperaturas de estancamiento y la función impulso entre dos puntos genéricos del conducto, y sustituyendo los parámetros en el punto 2 por los parámetros límite, se obtiene:

$$\frac{p_0}{p_{0L}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma} M} \left[ \frac{2\gamma}{3\gamma-1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{T_0}{T_{0L}} = \left( \frac{2\gamma}{3\gamma-1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

$$\frac{F}{F_L} = \frac{(1 + \gamma M^2)}{(2\sqrt{\gamma} M)}$$

Las relaciones que muestran las ecuaciones acabadas de presentar se pueden encontrar, asimismo, en forma de tablas.

### 13.10.3 Flujo compresible estacionario con transferencia de calor y sin fricción. Flujo de Rayleigh

La línea de Fanno caracterizaba el flujo de fluido cuando  $dA = dW = dQ = dz = 0$ , donde el potencial conductor era la fricción  $d\tau$ , siendo  $\tau$  = esfuerzos de fricción fluido-conducto.

En muchas aplicaciones industriales, sin embargo, se cumple que

$$dA = dW = d\tau = dz = 0, \text{ pero } dQ \neq 0.$$

El calor puede ser dado o transferido al fluido, en consecuencia, la entalpía de estancamiento  $h_0$  no se mantendrá constante.



Las hipótesis de partida para el análisis a realizar en este apartado son: el flujo es unidimensional, estacionario, sin fricción; el conducto es de sección constante, y se considera la transferencia de calor; no se considera la existencia de trabajo externo, ni de fuerzas másicas.

### 13.10.3.1 Ecuaciones gobernantes

De nuevo, se van a aplicar al volumen de control diferencial definido en la figura siguiente, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía.

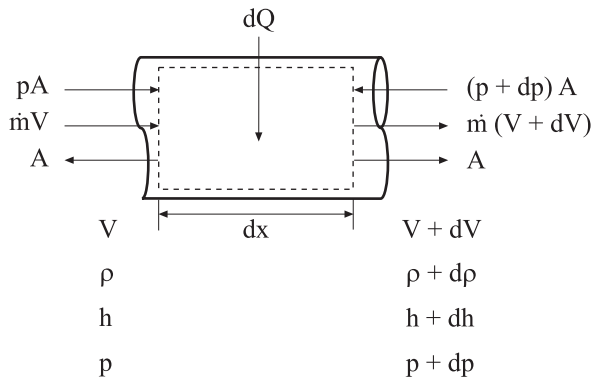


Fig. T 13.10  
Volumen de control  
elemental para flujo  
de Rayleigh

De la aplicación de la ecuación de la energía, se obtiene:

$$\delta Q = dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dh_0$$

De la ecuación de la cantidad de movimiento, cuando no se consideran los efectos de fricción, se obtiene:

$$dP + \rho v dv = 0$$

Al igual que en los dos casos precedentes, la ecuación de continuidad da lugar a:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho v = \frac{v}{v} = \text{cte.}$$

Combinando las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad se obtiene:

$$dP + G dv = 0$$

Integrando esta ecuación entre dos puntos genéricos 1 y 2, se obtiene:

$$P_2 + G v_2 = P_1 + G v_1 = \text{cte}$$



Recordando que se denominaba *empuje de corriente* o *función impulso* a  $F = PA + \rho Av^2$ , la ecuación anterior puede darse como:

$\frac{F}{A} = P + Gv = \text{cte.}$ , es decir, para este tipo de flujo, la función impulso se mantendrá constante.

De la ecuación de la función impulso, se obtiene:  $P_2 - P_1 = G(v_1 - v_2)$ , y recordando que  $V = \frac{G}{\rho} = Gv$ , se obtiene  $P_2 + G^2 v_2 = P_1 + G^2 v_1 = \text{cte.}$

Ecuación que recibe el nombre de *ecuación de la línea de Rayleigh*, de donde, dadas las condiciones iniciales  $p_1, v_1$ , para cada valor de  $G$ , se obtiene una línea de Rayleigh diferente.

La ecuación de la línea de Rayleigh, se puede expresar como  $-G^2 = \frac{P_2 - P_1}{v_2 - v_1}$ ;

Esta ecuación describe una línea recta en el plano  $p, v$ , que obedecería a la línea de Rayleigh en dicho plano  $p, v$ . Dicha línea recta tiene una pendiente  $-G^2$ ; denominando  $\alpha$  el ángulo formado por la recta de Rayleigh con el eje de abscisas, se tiene que  $\text{tg } \alpha = -G^2$ . Cada valor del flujo másico  $G$  dará lugar a una recta diferente.

La velocidad del fluido correspondiente a una línea de Rayleigh específica en el plano  $p, v$ , según la ecuación de continuidad, es:

$$V = vG = v \left( \frac{P_2 - P_1}{v_1 - v_2} \right)^{\frac{1}{2}} = v(-\text{tg } \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

La figura que se encuentra a continuación muestra dos líneas de Rayleigh y tres líneas de entalpía específica constante, en el plano  $P, v$ .

Se observa que, si  $G$  se mantiene constante, un aumento de entalpía del fluido desde  $h_1$  a  $h_2$ , al adicionar calor, provocará que la presión estática del fluido decaiga, y se incrementará el volumen específico.

Si, por el contrario, el fluido se enfríase, la entalpía específica disminuiría de  $h_2$  a  $h_1$ , y se produciría un incremento de la presión estática y un decremento del volumen específico. Se observa que, para un mismo incremento de entalpía específica  $\Delta h = h_2 - h_1$ , incrementando el flujo másico desde un valor genérico  $G$  a un valor  $2G$ , se cuadruplica la pendiente de la línea de Rayleigh, y se incrementa notoriamente la diferencia de presión  $P_1 - P_2$ .

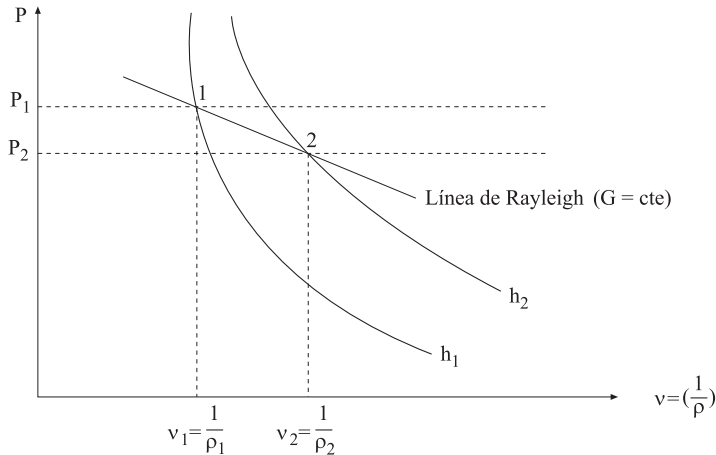


Fig. T 13.11  
Líneas de Rayleigh  
para un conducto  
de área constante,  
representadas en el  
plano  $p-v$ .

Si se graficasen en un mismo plano, volumen específico-presión ( $v, P$ ), líneas de entalpía,  $h = \text{cte}$ ., líneas de entropía,  $s = \text{cte}$ ., y una línea de Rayleigh, se observaría que existe una línea de entalpía constante y otra de entropía constante que son tangentes a la línea de Rayleigh, aunque los puntos de tangencia son diferentes. Ello implica que los estados de máxima entalpía y máxima entropía en una misma línea de Rayleigh son diferentes.

Si se representa la curva de Rayleigh en un plano entalpía-entropía, ( $h, s$ ), (v. figura T 13.12), se ve claramente que estos dos puntos no coinciden.

Obsérvese, además, en esta misma figura, que si a la entrada del conducto el flujo es subsónico, la adición de calor al fluido dará lugar a que este progrese hacia un estado sónico; asimismo es necesaria la adición de calor al fluido para que, teniendo condiciones supersónicas a la entrada de un conducto, experimente una evolución hacia condiciones sónicas.

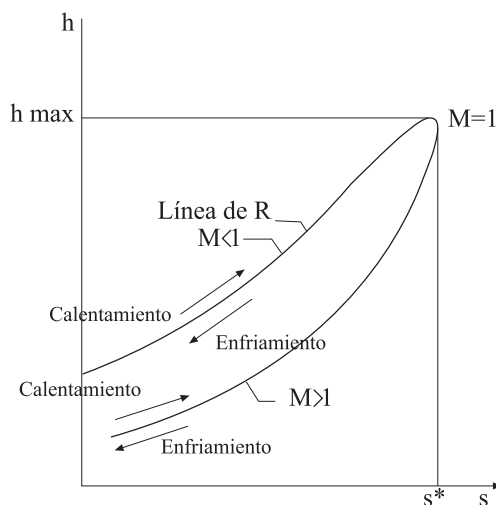


Fig. T 13.12  
Línea de Rayleigh  
en el plano  $h-s$ ,  
(conducto de área  
constante)



La rama superior de la línea de Rayleigh (v. figura T 13.12), es el lugar geométrico de los estados termodinámicos que se pueden conseguir al calentar un fluido compresible subsónico  $M < 1$ , partiendo de un estado inicial “1” genérico.

La rama inferior corresponde a los estados termodinámicos alcanzables para flujo supersónico  $M > 1$ , partiendo del punto “2”, asimismo genérico. Se observa asimismo que, para flujo subsónico, la adición de calor tiende a acelerar el fluido, hasta llegar a  $M = 1$ . Por otro lado, si el flujo es supersónico, la adición de calor da lugar a una deceleración del fluido, hasta llegar a  $M = 1$ .

### 13.10.3.2 Características del fluido para condiciones de máxima entalpía y máxima entropía

Cuando el fluido se encuentra en el estado de máxima entalpía, cualquier adición de calor causa un incremento de la energía cinética del fluido, siendo la ratio incremental igual a la ratio de calor añadido.

Si la velocidad del fluido (energía cinética) aumenta con una ratio mayor que la adición de calor suministrada, el fluido experimentará una disminución de la entalpía, puesto que la energía necesaria para aumentar la energía cinética proviene del propio fluido. Desde el punto de  $h_{\max}$  de la figura anterior, el desplazamiento se realizará hacia la derecha de la curva, hacia puntos de mayor entropía.

Recuérdese que la pendiente de la línea de Rayleigh venía dada por la ecuación:

$$-G^2 = \frac{P_2 - P_1}{v_2 - v_1} \text{ con lo cual: } \operatorname{tg} \alpha = \left( \frac{dp}{dv} \right)_R = -G^2 = -\frac{v^2}{v^2}$$

La pendiente de una línea de entalpía constante sería de la forma:

$$\operatorname{tg} \delta = \left( \frac{dp}{dv} \right)_h$$

En el punto donde las pendientes de las líneas  $h = \text{cte.}$  y  $R = \text{cte.}$  coincidan, se cumplirá la condición:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v^2}{v^2}$$

Por otro lado, la pendiente de una línea de entropía constante se define como:

$$\operatorname{tg} \phi = \left( \frac{dp}{dv} \right)_s = -\frac{1}{v^2} \left( \frac{dp}{dp} \right)_s = -\frac{c^2}{v^2}; \text{ recuérdese que } \left( \frac{dp}{dp} \right)_s = c^2$$

En el punto donde la entropía sea máxima, se cumplirá la relación  $\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \alpha$ .



con lo cual  $\frac{v^2}{v^2} = \frac{c^2}{v^2}$ ;  $v = c$

Así, se concluye que, en el punto de máxima entropía, la velocidad del fluido ha de ser igual a la velocidad del sonido,  $v = c^*$ . Esta condición se denomina *condición de bloqueo térmico*. Si se siguiese añadiendo calor al sistema, no causaría ningún cambio de estado del fluido (respecto a las condiciones de bloqueo), aunque produciría un cambio en las condiciones aguas arriba.

Se concluye que las pendientes de las líneas de Rayleigh, entalpía constante y entropía constante, en el plano  $p.v$ , definidas anteriormente, vienen dadas por las ecuaciones:

Pendiente de Rayleigh constante:  $\tan \alpha = -\frac{V^2}{v^2} = -\frac{\gamma \cdot P \cdot V^2}{\gamma \cdot P \cdot v^2} = -\gamma \cdot \frac{P}{v} M^2$

Pendiente de entalpía constante:  $\tan \delta = \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_h = \left[ \frac{\partial (R \cdot T / v)}{\partial v} \right]_h = -\frac{R \cdot T}{v^2}$

Pendiente de entropía constante:  $\tan \phi = \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_s = -\rho^2 \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = -\frac{c^2}{v^2}$

con lo que las relaciones:  $\frac{\tan \alpha}{\tan \phi} = M^2 = 1$ ;

de donde se obtiene que, cuando las pendientes de la línea de Rayleigh y la curva de entropía constante son iguales, el número de Mach ha de valer 1, siendo este el punto de máxima entropía.

Relacionando las pendientes de las líneas de entalpía y Rayleigh constantes, se llega a:

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \delta} = \gamma \cdot M^2 = 1,$$

lo cual demuestra que, en el punto de máxima entalpía, que es el punto donde las pendientes de la curva de Rayleigh y de las curvas de entalpía constante son iguales, el valor del número de Mach ha de ser  $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ .

### 13.10.3.3 Intersección entre las líneas de Fanno y Rayleigh

Si, para un mismo flujo másico  $G$ , se dibujan las líneas de Fanno y Rayleigh en un diagrama entalpía-entropía, estas se intersecan en dos puntos.

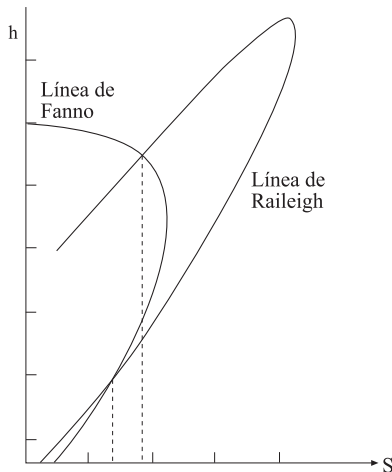


Puesto que toda línea de Fanno tiene la misma entalpía de estancamiento  $h_0$  y toda línea de Rayleigh tiene el mismo valor del empuje de flujo  $\frac{F}{A}$ , los puntos 1 y 2, que se muestran en la figura T 13.13, tendrán el mismo valor de  $G$ ,  $h_0$  y  $\frac{F}{A}$ .

Es necesario destacar que el flujo a través de una onda de choque satisface las ecuaciones de energía y continuidad de la línea de Fanno, y las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para la línea de Rayleigh. Así, los cambios espontáneos del estado 1 al 2 (v. figura T 13.13), irán acompañados de una onda de choque.

Si la evolución del proceso es de 1 a 2, se tiene que la onda de choque creada es de compresión, puesto que  $p_2 > p_1$  (la presión y la entropía del fluido aumentan, y disminuye su velocidad de régimen supersónico a subsónico). El proceso de 2 a 1 es imposible, puesto que implicaría una disminución de entropía, y ello vulnera el segundo principio de la termodinámica.

Fig. T 13.13  
Determinación de  
una onda de  
choque normal de  
compresión en un  
conducto de  
sección constante



#### 13.10.3.4 Propiedades termodinámicas de flujo estacionario unidimensional con adición de calor

Hasta este punto, únicamente se ha hallado la ecuación característica de la línea de Rayleigh, así como sus principales características. A partir de este momento se determinarán las ecuaciones algebraicas que permiten relacionar propiedades del fluido en dos puntos diferentes del conducto.

Recuérdese que la ecuación de la energía para el caso en estudio se reducía a

$$\delta Q = dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dh_0$$



Si, entre los puntos 1 y 2 genéricos de un conducto se adiciona un calor  $Q_2$ , la ecuación representativa será:

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2} = h_1 + \frac{v_1^2}{2} + Q_2$$

Como  $G = \frac{v}{v}$ ;  $h_2 + \frac{G^2 v_2^2}{2} = h_1 + \frac{G^2 v_1^2}{2} + Q_2$

de la definición de la entalpía de estancamiento  $h_0 = h + \frac{v^2}{2}$ , se puede establecer:

$$\delta Q = \delta h_0, \text{ o bien } h_{02} = h_{01} + Q_2$$

Esta ecuación relaciona el potencial conductor (calor transferido) y las propiedades del fluido entre dos puntos genéricos del conducto.

La característica de la línea de Rayleigh establecía que el empuje de flujo por unidad de área es constante:

$$\frac{F}{A} = \text{cte.} = P + \rho \cdot v^2 = P \left(1 + \frac{\rho \cdot v^2}{P}\right) = P(1 + \gamma M^2) = P_2(1 + \gamma M_2^2) = P_1(1 + \gamma M_1^2)$$

Recuérdese que  $M^2 = \frac{v^2}{\gamma R T} = \frac{v^2 \rho}{\gamma p}$

De la ecuación anterior, se tiene que entre dos puntos de la línea de Rayleigh se cumplirá:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

La ecuación de continuidad para un gas ideal y un conducto de área constante se puede dar como:

$$\frac{P_2 \cdot M_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{P_1 \cdot M_1}{\sqrt{T_1}}$$

Combinando estas dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2^2 M_2^2}{P_1^2 M_1^2} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2$$

Para un gas ideal, la ecuación de estado se enuncia:

$$\frac{P_2 \cdot v_2}{T_2} = \frac{P_1 \cdot v_1}{T_1}$$



Sustituyendo, en la ecuación anterior, la relación de presiones y temperaturas en función del número de Mach y recordando que  $G = \rho v = \text{cte.}$ , se tiene:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{P_2 \cdot T_1}{P_1 \cdot T_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} \cdot \left( \frac{1 + \gamma \cdot M_2^2}{1 + \gamma \cdot M_1^2} \right)$$

El cambio de entropía para un gas perfecto se ha definido como:

$$\Delta s = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{P_2}{P_1}, \text{ ecuación que se puede expresar como:}$$

$$\frac{\Delta s}{R} = \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \right]$$

Sustituyendo los términos  $\frac{P_1}{P_2}$  y  $\frac{T_2}{T_1}$  por las relaciones en función del número de Mach deducidas previamente, se tiene:

$$\frac{\Delta s}{R} = \ln \left[ \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \cdot \left( \frac{1 + \gamma \cdot M_1^2}{1 + \gamma \cdot M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]$$

ecuación que relaciona la variación de entropía en función de los números de Mach en dos puntos genéricos.

La relación entre la presión estática y la presión de estancamiento con el número de

$$\text{Mach para una sección dada era } P_0 = P \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}};$$

Entre dos puntos genéricos del conducto, se puede establecer:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \left( \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \cdot \left[ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right) = \left( \left( \frac{1 + \gamma \cdot M_1^2}{1 + \gamma \cdot M_2^2} \right) \cdot \left[ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_1^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right);$$

De la definición de la temperatura de estancamiento para una sección dada, se tiene

$$T_0 = T \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$



La ratio de temperaturas de estancamiento  $\frac{T_{02}}{T_{01}}$  puede ser expresada en términos del número de Mach en los puntos 1 y 2 genéricos:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)}{T_1 \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)}$$

Puesto que la relación entre temperaturas estáticas en función del número de Mach ya ha sido hallada anteriormente, sustituyendo dicha relación en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \frac{\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)}{\left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)}$$

Obsérvese que, para el flujo de Rayleigh, se han obtenido sendas ecuaciones que relacionaban las propiedades entre dos puntos genéricos del conducto en función de los números de Mach en dichos dos puntos. Si las condiciones del fluido en uno de estos puntos obedecen a las condiciones críticas,  $M = 1$ , la relación entre las propiedades en un punto genérico del conducto y el punto donde aparece la condición sónica quedarán definidas por las ecuaciones siguientes. Ecuaciones que se encuentran tabuladas.

$$\frac{P}{P^*} = \frac{\gamma+1}{1+\gamma M^2} \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{v^*}{v} = \frac{V^*}{V} = \frac{1+\gamma M^2}{(\gamma+1)M^2} \quad \frac{T}{T^*} = \frac{(\gamma+1)^2 M^2}{(1+\gamma M^2)^2}$$

$$\frac{P_0}{P_0^*} = \frac{(\gamma+1)}{1+\gamma M^2} \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma+1)M^2}{(1+\gamma M^2)^2} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$



## Problema 75

### Enunciado

Sea un tanque de grandes dimensiones donde está almacenado un gas. Al tanque se le ha realizado un pequeño agujero de sección (A) por donde fluye el gas almacenado hacia el exterior.

1. Considerando el flujo al fluir a través del agujero como isentrópico, se pide determinar la velocidad del gas ( $C_2$ ) al pasar por dicho agujero, el número de Mach y el caudal circulante. Considérese el gas como ideal.

2. Supóngase ahora que el tanque es una cabina espacial presurizada y supóngase que la sección del agujero por donde se fuga el fluido (aire) es suficientemente pequeña para considerar que existirá flujo sónico en dicha sección.

Suponiendo conocidos el volumen de la cabina espacial, su presión y temperatura iniciales y la sección del agujero, determínese: la variación de la presión en el interior de la cabina en función del tiempo. Supóngase el aire como fluido ideal y el proceso como isentrópico.

### Resolución

1. La ecuación de la energía para flujo isentrópico, dada en función de la entalpía, toma la forma:

$$h_1 + \frac{C_1^2}{2} + g z_1 = h_2 + \frac{C_2^2}{2} + g z_2 \quad (1)$$

ecuación que se puede representar como:

$$h + \frac{C^2}{2} + g z = \text{cte.} \quad (2)$$

Esta ecuación se puede representar de forma diferencial como:

$$dh + C dC + g dz = 0 \quad (3)$$

Considerando el fluido como ideal, la ecuación de los gases ideales establece:

$$P v = RT \quad (4)$$

Diferenciando logarítmicamente esta ecuación, se obtiene:

$$\ln P + \ln v = \ln R + \ln T \quad (5)$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \quad (6)$$

La ecuación de los gases ideales dada en función de la densidad en lugar de en función del volumen específico se enuncia:

$$\frac{P}{\rho} = RT \quad (7)$$

Su diferenciación logarítmica da lugar a:

$$\ln P - \ln \rho = \ln R + \ln T \quad (8)$$

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (9)$$

Para flujo isentrópico, se cumple:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \quad (10)$$

Ecuación que resulta de integrar la ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (11)$$

La relación entre la variación de la energía interna y la variación de la temperatura se define:

$$u_2 - u_1 = C_V (T_2 - T_1) \quad (12)$$

En forma diferencial, esta ecuación se puede dar como:

$$du = C_V dT \quad (13)$$

La ecuación diferencial que relaciona la variación de la entalpía con la temperatura toma la forma:

$$dh = C_P dT \quad (14)$$

$$\text{o bien: } h_2 - h_1 = C_P (T_2 - T_1) \quad (15)$$

Otras relaciones termodinámicas que cabe recordar son:

$$R = C_P - C_V; \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}; \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}; \quad C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad (16)$$



Combinando las ecuaciones (3) y (14), se tiene:

$$C_p dT + C dC + g dz = 0 \quad (17)$$

Sustituyendo en esta ecuación la ecuación (9), se tiene:

$$C_p T \left( \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + C dC + g dz = 0 \quad (18)$$

Sustituyendo la ecuación (16) en la (18), se tiene:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} R T \left( \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + C dC + g dz = 0 \quad (19)$$

Recordando la ecuación de los gases ideales:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \left( \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) + C dC + g dz = 0 \quad (20)$$

ecuación que se puede dar como:

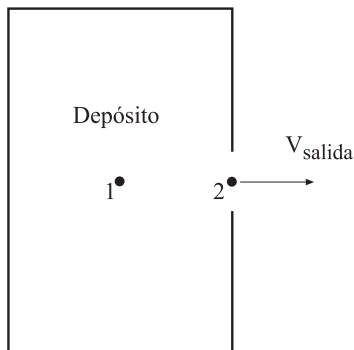
$$\frac{\gamma}{\gamma-1} d \left( \frac{P}{\rho} \right) + C dC + g dz = 0 \quad (21)$$

Esta es la denominada *ecuación diferencial de Bernoulli para flujo compresible, ideal e isentrópico*.

Su integración entre un punto inicial (1) y un punto final (2) (v. figura adjunta), da lugar a:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) + \frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (22)$$

Fig. 75.1  
Tanque donde  
se almacena el  
fluido  
compresible







Considerando que los puntos están en la misma posición espacial y que la velocidad del fluido en el interior del tanque es, aproximadamente, igual a cero, se tiene:

$$C_2 = \sqrt{-\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2} \right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)} \quad (23)$$

Considerando la expansión del fluido como adiabático isentrópica, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{P_2}{\rho_2^\gamma} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (24)$$

Sustituyendo la ecuación (24) en la (23), se tiene:

$$C_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left( 1 - \frac{P_2}{P_1} \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \quad (25)$$

ecuación que caracteriza la velocidad del fluido en la sección de salida del agujero, y en función del gradiente de presiones entre el interior y el exterior del tanque, así como del índice de politropia.

El número de Mach del fluido en la sección de salida, se obtendrá:

$$M = \frac{C}{\sqrt{\gamma R T_2}} = \frac{C}{\sqrt{\gamma \frac{P_2}{\rho_2}}} = \frac{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}}{\sqrt{\gamma \frac{P_2}{\rho_2}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \frac{\rho_2}{P_2} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \quad (26)$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \frac{P_1}{P_2} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \quad (27)$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left( \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right)} \quad (28)$$

El caudal másico circulante para un gradiente de presiones dado se define:

$$\dot{m} = A_2 C_2 \rho_2 = A_2 \rho_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left( 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \quad (29)$$



$$\dot{m} = A_2 C_2 \rho_2 = A_2 \rho_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \quad (30)$$

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (31)$$

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} P_1 \rho_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)} \quad (32)$$

$$\dot{m} = A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} P_1 \rho_1 \left( \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right)} \quad (33)$$

2. Para este segundo apartado, el tanque es una cabina espacial presurizada a la presión atmosférica. La presión en el exterior se puede considerar nula y el agujero tiene una sección de paso suficientemente pequeña para poder considerar que el flujo en esta sección es sónico. Al igual que en el primer apartado del problema, se considerara fluido ideal y el proceso como isentrópico.

Para hallar la ecuación que caracteriza la variación temporal de la caída de presión en el interior de la cabina espacial, se empieza determinando el flujo másico de fluido a través del agujero.

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\Gamma A_2 P_{02}}{(\gamma R T_{02})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} A_2 P_{02}}{(\gamma R T_{02})^{\frac{1}{2}}} \quad (34)$$

$P_{02}$  y  $T_{02}$  son la presión y la temperatura de estancamiento en la sección de salida del fluido  $A_2$ . (Los puntos 1 y 2 se han definido en el apartado anterior, figura 75.1).

Entendiendo que el proceso de descompresión es isentrópico, la relación entre presiones y temperaturas de estancamiento en el punto 2 se establece:

$$\frac{T_{02}}{T_{i02}} = \left(\frac{P_{02}}{P_{i02}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (35)$$



Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} A_2 P_{02} \left( \frac{P_{i02}}{P_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{(\gamma R T_{i02})^{\frac{1}{2}}} \quad (36)$$

El subíndice (i) indica las condiciones iniciales de las variables.

La masa de fluido que en un momento dado se encuentra en el interior de la cabina espacial se puede dar como:

$$P_i \forall = m_c R T_i \quad (37)$$

$$m_c = \frac{P_i \forall}{R T_i} \quad (38)$$

La masa de fluido en función de la presión y la temperatura de estancamiento en la cabina se define:

$$m_c = \frac{P_{01} \forall}{R T_{01}} \quad (39)$$

Asimismo, se puede establecer en la cabina la relación:

$$\frac{T_{01}}{T_{i01}} = \left( \frac{P_{01}}{P_{i01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (40)$$

Sustituyendo la ecuación (40) en la (39), se tiene:

$$m_c = \frac{P_{01} \forall}{R T_{i01}} \left( \frac{P_{i01}}{P_{01}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\forall (P_{i01})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{R T_{i01}} (P_{01})^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}+1} = \frac{\forall (P_{i01})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{R T_{i01}} (P_{01})^{\frac{1}{\gamma}} \quad (41)$$

Diferenciando la ecuación (41) con respecto al tiempo, se tiene (recuérdese que únicamente  $P_{01}$  depende del tiempo):

$$\frac{dm_c}{dt} = \frac{\forall}{R T_{i01}} (P_{i01})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} P_{01}^{\frac{1}{\gamma}-1} \left( \frac{dP_{01}}{dt} \right) \quad (42)$$

Se observa que la disminución de la masa del fluido en la cabina ha de ser igual al flujo másico saliente, con lo cual:

$$-\frac{dm_c}{dt} = \dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (43)$$



Sustituyendo ecuaciones (33) y (42) en la (43), se tiene:

$$-\frac{\forall}{RT_{i01}}(P_{i01})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} P_{01}^{\frac{1}{\gamma}} \left( \frac{dP_{01}}{dt} \right) = \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} A_2 P_{02} \left( \frac{P_{i02}}{P_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{(\gamma R T_{i02})^{\frac{1}{2}}} \quad (44)$$

Dado que el proceso se ha considerado isentrópico, las temperaturas y presiones de estancamiento, tanto en la cabina como en la sección del agujero de salida, son en todo momento las mismas,  $P_{i01} = P_{i02}$ ;  $P_{01} = P_{02}$ ;  $T_{i01} = T_{i02}$ ; así, la ecuación (44) se puede dar como:

$$-\frac{\forall}{RT_{i0}}(P_{i0})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\gamma} P_0^{\frac{1}{\gamma}} \left( \frac{dP_0}{dt} \right) = \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} A_2 P_0 \left( \frac{P_{i0}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}{(\gamma R T_{i0})^{\frac{1}{2}}} \quad (45)$$

Reagrupando términos, esta ecuación queda:

Obsérvese que para el tiempo inicial,  $t = 0$ , la presión es  $P_{i0}$  y, para un tiempo genérico  $t$ , la presión será  $P_0$ .

$$\int_{P_{i0}}^{P_0} -P_0^{\frac{1-3\gamma}{2\gamma}} dP_0 = \int_0^t \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} A_2 (\gamma R T_{i0})^{\frac{1}{2}}}{\forall} P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} dt \quad (46)$$

El resultado de la integración da lugar a:

$$-\frac{P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}}{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \frac{P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}}}{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = \gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} \frac{A_2}{\forall} (\gamma R T_{i0})^{\frac{1}{2}} P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} t \quad (47)$$

$$-P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = -P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} + \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} \frac{A_2}{\forall} (\gamma R T_{i0})^{\frac{1}{2}} P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} t}{\frac{2\gamma}{1-\gamma}} \quad (48)$$

$$P_0^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} = P_{i0}^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}} \left[ 1 + \frac{\gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} \frac{A_2}{\forall} (\gamma R T_{i0})^{\frac{1}{2}} t}{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right] \quad (49)$$



$$\frac{P_0}{P_{i0}} = \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) \gamma \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}} \frac{A_2}{\nabla} (\gamma R T_{i0})^{\frac{1}{2}} t \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} \quad (50)$$

ecuación que caracteriza la variación temporal (decremento) de la presión en el depósito.

## Problema 76

### Enunciado

Con el fin de suministrar vapor recalentado a un colectivo de máquinas de una industria textil, se instala una caldera de vapor, encontrándose a la salida de la misma un tanque de almacenamiento, (v. figura 76.1). Las condiciones del fluido a la entrada de la caldera son:  $P_{1c} = 1$  bar (abs);  $T_{1c} = 100$  °C;  $h_{1c} = 2.676$  KJ/Kg, siendo la velocidad del fluido a la entrada de 5m/s. En la caldera, el vapor se calienta hasta adquirir una temperatura de  $T_{2c} = 350$ °C y una presión de  $P_{2c} = 5 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup> (abs).

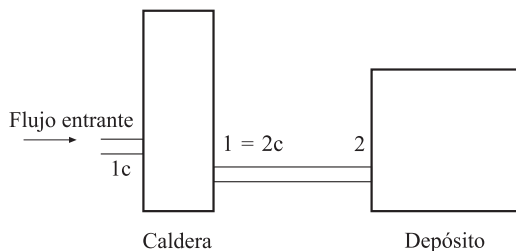
Considérese:  $R = 287$  J/Kg K;  $\gamma = 1,4$ ;  $\mu_{\text{vapor}} = 1,086 \cdot 10^{-5}$  N. s /m<sup>2</sup>;  $C_p = 1,8641$  KJ/Kg K. Como primera aproximación, considerar el gas como ideal.

Halle:

1. El número de Mach a la salida de la caldera  $M_{2c}$ , sabiendo que el calor comunicado al fluido es de 500 KJ/Kg.
2. Si el tubo que une los dos depósitos tiene un diámetro de 0,02 m y su coeficiente de fricción medio es de  $4 C_f = f = 0,02$ ; halle la longitud del conducto para que a la entrada del segundo tanque el número de Mach sea de 0,9. Indique las hipótesis realizadas.
3. El flujo másico circulante entre los dos depósitos.
4. La presión a la entrada del segundo depósito.
5. El número de Mach a la salida del conducto para que la presión estática en el extremo de éste sea de 250.000 Pa.
6. Si se decide unir los dos depósitos mediante una tubería de 5 m de longitud, y se quiere que las presiones absolutas de estancamiento en los depósitos sean:  $P_{01} = 5 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>;  $P_{02} = 0,5 \cdot 10^5$  N/m<sup>2</sup>, con el caudal másico máximo a transferir de 1 Kg/s y la rugosidad del tubo  $\epsilon = 0,01$  mm halle el diámetro del conducto. Considérese que la temperatura de estancamiento en la caldera es la misma que en los apartados anteriores.



Fig. 76.1  
Esquema de la  
instalación



Datos:

$$P_{1c} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$T_{1c} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$h_{1c} = 2.676 \text{ KJ/Kg} = 2.676 \cdot 10^6 \text{ J/Kg}$$

$$\gamma = 1,4$$

$$v_{e1c} = 5 \text{ m/s}$$

$$C_p = 1,8641 \text{ KJ/KgK} = 1.864,1 \text{ J/KgK}$$

$$Q_{caldera} = 500 \text{ KJ/Kg}$$

$$T_{2c} = 350 \text{ }^\circ\text{C} = 623 \text{ K}$$

$$P_{2c} = 5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

## Resolución

1. Número de Mach a la salida de la caldera

Se calculará inicialmente la temperatura y la entalpía de estancamiento a la entrada de la caldera.

$$T_{01c} = T_{1c} + \frac{v^2}{2 \cdot C_p} = (100 + 273) + \frac{5^2}{2 \cdot 1.864,1} = 373,006 \text{ K}$$

$$h_{01} = h_1 + \frac{v^2}{2} = 2.676.000 + \frac{5^2}{2} = 2.676.012,5 \text{ J/Kg}$$

Según la ecuación de la energía, se conoce:

$$q + h_{01} = h_{02}$$

donde la entalpía de estancamiento a la salida de la caldera será:

$$h_{02} = 500.000 + 2.676.012,5 = 3.176.012,5 \text{ J/Kg}$$

Para un gas ideal, se cumple:

$$\int_{h_{01}}^{h_{02}} dh = \int_{T_{01}}^{T_{02}} C_p \cdot dT$$



de donde el valor de  $T_{02}$  se obtiene:

$$q = h_{02} - h_{01} = C_p(T_{02} - T_{01})$$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{q}{C_p} = 373,006 + \frac{500}{1,8641} = 641,21 \text{ K}$$

El siguiente paso será calcular la velocidad del fluido a la salida de la caldera y la velocidad del fluido en este mismo punto.

$$T_{02} = T_2 + \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$$

$$T_{02} - T_2 = \frac{v^2}{2 \cdot C_p}$$

$$v^2 = (T_{02} - T_2) \cdot 2 \cdot C_p$$

$$v = \sqrt{(T_{02} - T_2) \cdot 2 \cdot C_p}$$

$$v = \sqrt{(641,21 - (350 + 273)) \cdot 2 \cdot 1864,1} = 260,5 \text{ m/s}$$

$$C_2 = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T_2} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 623} = 500,32$$

$$M_2 = \frac{v}{C_2} = \frac{260,5}{500,32} = 0,5206$$

El número de Mach a la salida de la caldera es  $M_{2c} = 0,5206$

2. Si el conducto es de diámetro ( $\Phi = 0,02 \text{ m}$ ) y  $f = 4 \cdot C_f = 0,02$ , la longitud del conducto, para que  $M = 0,9$  en su extremo, será:

Suponiendo flujo de Fanno,

de tablas se tiene:

$$M_1 = 0,52 \longrightarrow \frac{4 \cdot C_f \cdot L_1^*}{D} = 0,9174$$

$$M_2 = 0,9 \longrightarrow \frac{4 \cdot C_f \cdot L_2^*}{D} = 0,014$$

$$M_1 = M_{2c} = 0,5206 \qquad M_2 = 0,9$$

$$\frac{4 \cdot C_f \cdot \Delta L}{D} = \frac{4 \cdot C_f \cdot L_1^*}{D} - \frac{4 \cdot C_f \cdot L_2^*}{D} = 0,9174 - 0,014 = 0,903$$

$$\Delta L = \frac{0,903 \cdot D}{4 \cdot C_f} = \frac{0,903 \cdot 0,02}{0,02} = 0,903 \text{ m}$$



La longitud del conducto ha de ser de 0,903 m

3. El flujo másico se puede determinar:

$$\dot{m} = \rho \cdot s \cdot v = \frac{P}{R \cdot T} \cdot \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 260,5 = \frac{5 \cdot 10^5}{287 \cdot (350 + 273)} \cdot \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} \cdot 260,5 = 0,228 \text{ Kg/s}$$

flujo másico circulante entre los depósitos es de 0,228 Kg/s

4. Dado que la presión en el extremo del conducto será la misma que a la entrada del segundo depósito:

Para  $M_2 = 0,9$ , (Fanno):

$$\frac{P_2}{P^*} = 1,129$$

$$\frac{P_{02}}{P_0^*} = 1,0089$$

Para  $M_1 = M_{20} = 0,52$  (Fanno):

$$\frac{P_1}{P^*} = 2,0519$$

$$\frac{P_{01}}{P_0^*} = 1,3034$$

Para  $M_2 = 0,9$  (tabla de flujo isentrópico):

$$\frac{P_2}{P_{02}} = 0,59126$$

Con lo cual se puede establecer:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}}{\frac{P_2}{P^*}} = \frac{2,0519}{1,129} = 1,817$$

$$P_2 = \frac{P_1}{1,817} = \frac{5 \cdot 10^5}{1,817} = 275.178,8 \text{ N/m}^2$$

$$P_{02} = \frac{P_2}{0,59126} = 465.410,9 \text{ N/m}^2$$

La presión a la entrada del segundo depósito será de 275.178,8 N/m<sup>2</sup>

5. Si la presión a la salida del conducto se quiere que sea de 250.000 Pa, halle el número de Mach en este punto:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{500.000}{250.000} = 2$$





$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{P^*}(M_1)}{\frac{P_2}{P^*}(M_2)};$$

A la entrada del conducto, se ha visto que:

$$M_1 = 0,52, \text{ (Fanno): } \frac{P_1}{P^*} = 2,0519$$

$$\frac{P_2}{P^*}(M_2) = \frac{\frac{P_1}{P^*}(M_1)}{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{2,0519}{2} = 1,02595$$

Entrando en las tablas de Fanno para  $\frac{P_2}{P^*}(M_2) = 1,02595 \rightarrow M_2 \cong 0,98$ ,

se obtiene que el número de Mach a la salida del conducto es de 0,98.

6. Datos en los puntos de entrada (1) y salida (2) del conducto:

$$P_{01} = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_{02} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\dot{m} = 1 \text{ Kg/s}$$

$$\varepsilon = 0,01 \text{ mm}$$

$$T_{01} = 641 \text{ K}$$

Se va a considerar que para estas condiciones se tiene flujo bloqueado.

Se calcula el número de Reynolds en función del diámetro:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{Q}{S} \frac{D \cdot \rho}{\mu} = \frac{\dot{m} D}{S \cdot \mu} = \frac{\dot{m} D}{\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \mu} = 4 \cdot \frac{\dot{m}}{\pi \cdot \mu \cdot D}$$

$$Re = 4 \cdot \frac{\dot{m}}{\pi \cdot \mu \cdot D} = 4 \cdot \frac{1}{\pi \cdot (1,086 \cdot 10^{-5}) \cdot D} = \frac{117.241,2}{D}$$

El cálculo del diámetro se realizará aplicando la ecuación para régimen sónico.

$$\dot{m} = \sqrt{\gamma} \cdot \frac{P_{01} \cdot A}{\sqrt{R \cdot T_{01}}} \cdot M_1 \left[ 1 + \left( \frac{\gamma - 1}{2} \right) M_1^2 \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \text{ siendo } A = \frac{\pi \cdot D^2}{4},$$

Despejando el diámetro:



$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m} \sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{M_1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Puesto que

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

con lo cual se obtiene:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\dot{m} \sqrt{R \cdot T_{01}}}{P_{01} \cdot \sqrt{\gamma}} \cdot \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot \frac{A}{A^*} (M_1)$$

Sustituyendo valores:

$$D^2 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{287 \cdot 641}}{5 \cdot 10^5 \sqrt{1,4}} \cdot \left( \frac{1,4+1}{2} \right)^{\frac{1,4+1}{2(1,4-1)}} \cdot \frac{A}{A^*} (M_1)$$

$$D = 0,0399 \sqrt{\frac{A}{A^*}} (M_1)$$

Se conoce, además, que para este apartado:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{0,5 \cdot 10^5}{5 \cdot 10^5} = 0,1$$

Hipótesis:

Suponiendo que  $M_1 = 0,5$ , de tablas de flujo isentrópico se obtiene:  $\frac{A_1}{A^*} = 1,34$

$$D = 0,0399 \sqrt{1,34} = 0,04618 \text{ m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = \frac{117.241,2}{0,04618} = 2.538.370,2 \\ \frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,01 \cdot 10^{-3}}{0,04618} = 2,1 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Por el diagrama de Moody}$$

$$f = 0,0145 = 4 \cdot C_f$$

$$4 \cdot C_f \cdot \frac{L^*}{D} = 0,0145 \cdot \frac{5}{0,04618} = 1,5699, \text{ de las tablas para flujo de Fanno se obtiene}$$

$$M_1 = 0,45.$$



$$M_1 = 0,45 \begin{cases} \rightarrow \text{Fanno} & \frac{P_1}{P^*} = 2,3865 \\ \rightarrow \text{Flujo isentrópico} & \frac{P_1}{P_{01}} = 0,87027 \end{cases}$$

$$\frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_2^*}{P_{01}} = \frac{\frac{P_1}{P_{01}}}{\frac{P_1}{P^*}} = \frac{0,87027}{2,3865} = 0,36568 > 0,1 \quad \text{Se concluye que el flujo está bloqueado.}$$

Es necesario realizar una segunda iteración.

Realizando una media aritmética de  $M_1$  (obtenida y supuesta):

$$M_1' = \frac{0,5 + 0,45}{2} = 0,475 \text{ de las tablas para flujo isentrópico; se obtiene } \frac{A}{A^*} = 1,39$$

$$D = 0,0399 \sqrt{1,39} = 0,04704 \text{ m}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = 2.492.297,9 \\ \frac{\varepsilon}{D} = 2,12 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Por el diagrama de Moody} \\ f = 0,0145 \end{array}$$

$$4 \cdot C_f \cdot \frac{L^*}{D} = 0,0145 \cdot \frac{5}{0,04704} = 1,541$$

De las tablas para flujo de Fanno, se determina:  $M_1 = 0,451$ .

Llegado a este punto, no hace falta seguir, puesto que obtendríamos los mismos valores que en la iteración anterior.

El diámetro del tubo será de  $D = 0,047 \text{ m}$ ; el flujo está bloqueado.



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
0,00	0,00000	0,10000+1	0,10000+1	0,10000+1	$\infty$
0,01	0,01095	0,99998+0	0,99993+0	0,99995+0	0,57874+2
0,02	0,02191	0,99992+0	0,99997+0	0,99980+0	0,28942+2
0,03	0,03286	0,99982+0	0,99937+0	0,99955+0	0,19301+2
0,04	0,04381	0,99968+0	0,99888+0	0,99920+0	0,14481+2
0,05	0,05476	0,99950+0	0,99825+0	0,99875+0	0,11591+2
0,06	0,06570	0,99928+0	0,99748+0	0,99820+0	0,96659+1
0,07	0,07664	0,99902+0	0,99658+0	0,99755+0	0,82915+1
0,08	0,08758	0,99872+0	0,99653+0	0,99681+0	0,72616+1
0,09	0,09851	0,99838+0	0,99435+0	0,99596+0	0,64613+1
0,10	0,10944	0,99800+0	0,99303+0	0,99502+0	0,58218+1
0,11	0,12035	0,99759+0	0,99158+0	0,99398+0	0,52992+1
0,12	0,13126	0,99713+0	0,98998+0	0,99284+0	0,48643+1
0,13	0,14217	0,99663+0	0,98826+0	0,99160+0	0,44969+1
0,14	0,15306	0,99610+0	0,98640+0	0,99027+0	0,41824+1
0,15	0,16395	0,99552+0	0,98441+0	0,98884+0	0,39103+1
0,16	0,17482	0,99491+0	0,98228+0	0,98731+0	0,36727+1
0,17	0,18569	0,99425+0	0,98003+0	0,98569+0	0,34635+1
0,18	0,19654	0,99356+0	0,97765+0	0,98398+0	0,32779+1
0,19	0,20739	0,99283+0	0,97514+0	0,98218+0	0,31123+1
0,20	0,21822	0,99206+0	0,97250+0	0,98028+0	0,29635+1
0,21	0,22904	0,99126+0	0,96973+0	0,97829+0	0,28293+1
0,22	0,23984	0,99041+0	0,96685+0	0,97620+0	0,27076+1
0,23	0,25063	0,98953+0	0,96383+0	0,97403+0	0,25968+1
0,24	0,26141	0,98861+0	0,96070+0	0,97177+0	0,24956+1
0,25	0,27217	0,98765+0	0,95745+0	0,96942+0	0,24027+1
0,26	0,28291	0,98666+0	0,95408+0	0,96698+0	0,23173+1
0,27	0,29364	0,98563+0	0,95060+0	0,96446+0	0,22385+1
0,28	0,30435	0,98456+0	0,94700+0	0,96185+0	0,21565+1
0,29	0,31504	0,98346+0	0,94329+0	0,95916+0	0,20979+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
0,30	0,32572	0,98232+0	0,93947+0	0,95638+0	0,20351+1
0,31	0,33637	0,98114+0	0,93554+0	0,95352+0	0,19765+1
0,32	0,34701	0,97993+0	0,93150+0	0,95058+0	0,19219+1
0,33	0,35762	0,97868+0	0,92735+0	0,94756+0	0,18707+1
0,34	0,36822	0,97740+0	0,92312+0	0,94446+0	0,18229+1
0,35	0,37879	0,97609+0	0,91877+0	0,94128+0	0,17780+1
0,36	0,38935	0,97473+0	0,91433+0	0,93803+0	0,17358+1
0,37	0,39938	0,97335+0	0,90979+0	0,93470+0	0,16961+1
0,38	0,41039	0,97193+0	0,90516+0	0,93130+0	0,16587+1
0,39	0,42087	0,97048+0	0,90043+0	0,92782+0	0,16234+1
0,40	0,43133	0,96899+0	0,89561+0	0,92427+0	0,15901+1
0,41	0,44177	0,96747+0	0,89071+0	0,92066+0	0,15587+1
0,42	0,45218	0,96592+0	0,88572+0	0,91647+0	0,15289+1
0,43	0,46257	0,96434+0	0,88056+0	0,91322+0	0,15007+1
0,44	0,47293	0,96272+0	0,87550+0	0,90940+0	0,14740+1
0,45	0,48326	0,96108+0	0,87027+0	0,90551+0	0,14487+1
0,46	0,49357	0,95940+0	0,86496+0	0,90157+0	0,14246+1
0,47	0,50385	0,95769+0	0,85958+0	0,89756+0	0,14018+1
0,48	0,51410	0,95595+0	0,85413+0	0,89349+0	0,13801+1
0,49	0,52433	0,95418+0	0,84861+0	0,88936+0	0,13595+1
0,50	0,53452	0,95238+0	0,84302+0	0,88517+0	0,13398+1
0,51	0,54469	0,95055+0	0,83737+0	0,88093+0	0,13212+1
0,52	0,55483	0,94869+0	0,83165+0	0,87663+0	0,13034+1
0,53	0,56493	0,94681+0	0,82588+0	0,87228+0	0,12865+1
0,54	0,57501	0,94489+0	0,82005+0	0,86788+0	0,12703+1
0,55	0,58506	0,94295+0	0,81417+0	0,86342+0	0,12549+1
0,56	0,59507	0,94098+0	0,80823+0	0,85892+0	0,12403+1
0,57	0,60505	0,93898+0	0,80824+0	0,85437+0	0,12263+1
0,58	0,61501	0,93696+0	0,79621+0	0,84978+0	0,12130+1
0,59	0,62492	0,93491+0	0,79013+0	0,84514+0	0,12003+1



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / T <sub>o</sub>	p / P <sub>o</sub>	$\rho$ / $\rho_o$	A / A*
0,60	0,63491	0,93284+0	0,78400+0	0,84045+0	0,11882+1
0,61	0,64466	0,93073+0	0,77784+0	0,83573+0	0,11767+1
0,62	0,65448	0,92861+0	0,77164+0	0,83096+0	0,11656+1
0,63	0,66427	0,92646+0	0,76540+0	0,82616+0	0,11552+1
0,64	0,67402	0,92428+0	0,75913+0	0,82132+0	0,11451+1
0,65	0,68374	0,92208+0	0,75283+0	0,81644+0	0,11356+1
0,66	0,69342	0,91986+0	0,74650+0	0,81153+0	0,11256+1
0,67	0,70307	0,91762+0	0,74014+0	0,80659+0	0,11179+1
0,68	0,71268	0,91535+0	0,73376+0	0,80162+0	0,11097+1
0,69	0,72225	0,91305+0	0,72735+0	0,79661+0	0,11018+1
0,70	0,73179	0,91075+0	0,72093+0	0,79158+0	0,10944+1
0,71	0,74129	0,90841+0	0,71448+0	0,78652+0	0,10873+1
0,72	0,75076	0,90606+0	0,70803+0	0,78143+0	0,10806+1
0,73	0,76019	0,90369+0	0,70155+0	0,77632+0	0,10742+1
0,74	0,76958	0,90129+0	0,69507+0	0,77119+0	0,10681+1
0,75	0,77894	0,89888+0	0,68859+0	0,76604+0	0,10624+1
0,76	0,78825	0,89644+0	0,68207+0	0,76086+0	0,10570+1
0,77	0,79753	0,89399+0	0,67556+0	0,75567+0	0,10519+1
0,78	0,80677	0,89152+0	0,66905+0	0,75046+0	0,10471+1
0,79	0,81597	0,88903+0	0,66254+0	0,74523+0	0,10425+1
0,80	0,82514	0,88652+0	0,65602+0	0,73999+0	0,10382+1
0,81	0,83426	0,88400+0	0,64951+0	0,73474+0	0,10342+1
0,82	0,84335	0,88146+0	0,64300+0	0,72947+0	0,10305+1
0,83	0,85239	0,87898+0	0,63650+0	0,72419+0	0,10270+1
0,84	0,86140	0,87633+0	0,63000+0	0,71891+0	0,10237+1
0,85	0,87037	0,87374+0	0,62351+0	0,71361+0	0,10207+1
0,86	0,87929	0,87114+0	0,61703+0	0,70831+0	0,10179+1
0,87	0,88818	0,85852+0	0,61057+0	0,70300+0	0,10153+1
0,88	0,89703	0,86589+0	0,60412+0	0,69768+0	0,10129+1
0,89	0,90583	0,86324+0	0,59768+0	0,69236+0	0,10108+1



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
0,90	0,91460	0,86059+0	0,59126+0	0,68704+0	0,10089+1
0,91	0,92333	0,85791+0	0,58486+0	0,68172+0	0,10071+1
0,92	0,93201	0,85523+0	0,57848+0	0,67640+0	0,10056+1
0,93	0,94065	0,85253+0	0,57211+0	0,67108+0	0,10043+1
0,94	0,94925	0,84982+0	0,56578+0	0,66576+0	0,10031+1
0,95	0,95781	0,84710+0	0,55946+0	0,66044+0	0,10021+1
0,96	0,96633	0,84437+0	0,55317+0	0,65513+0	0,10014+1
0,97	0,97481	0,84162+0	0,54691+0	0,64982+0	0,10008+1
0,98	0,98325	0,83887+0	0,54067+0	0,64452+0	0,10003+1
0,99	0,99165	0,83611+0	0,53446+0	0,63923+0	0,10001+1
1,00	1,00000	0,83333+0	0,52828+0	0,63394+0	0,10000+1
1,01	1,00831	0,83055+0	0,52213+0	0,62866+0	0,10001+1
1,02	1,01658	0,82776+0	0,51602+0	0,62339+0	0,10003+1
1,03	1,02481	0,82496+0	0,50994+0	0,61813+0	0,10007+1
1,04	1,03300	0,82215+0	0,50389+0	0,61289+0	0,10013+1
1,05	1,04114	0,81934+0	0,49787+0	0,60775+0	0,10020+1
1,06	1,04925	0,81651+0	0,49189+0	0,60243+0	0,10029+1
1,07	1,05731	0,81368+0	0,48595+0	0,59722+0	0,10039+1
1,08	1,06533	0,81085+0	0,48005+0	0,59203+0	0,10059+1
1,09	1,07331	0,80800+0	0,47418+0	0,58686+0	0,10064+1
1,10	1,08124	0,80515+0	0,46835+0	0,58170+0	0,10079+1
1,11	1,08913	0,80230+0	0,46257+0	0,57655+0	0,10095+1
1,12	1,09699	0,79944+0	0,45682+0	0,57143+0	0,10113+1
1,13	1,10479	0,79657+0	0,45111+0	0,56632+0	0,10132+1
1,14	1,11256	0,79370+0	0,44545+0	0,56123+0	0,10153+1
1,15	1,12029	0,79083+0	0,43983+0	0,55616+0	0,10175+1
1,16	1,12797	0,78795+0	0,43425+0	0,55112+0	0,10189+1
1,17	1,13561	0,78506+0	0,42872+0	0,54609+0	0,10222+1
1,18	1,14321	0,78218+0	0,42322+0	0,54108+0	0,10248+1
1,19	1,15077	0,77929+0	0,41778+0	0,53610+0	0,10276+1



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
1,20	1,15828	0,77640+0	0,41238+0	0,53114+0	0,10304+1
1,21	1,15575	0,77350+0	0,40702+0	0,52620+0	0,10334+1
1,22	1,17319	0,77061+0	0,40171+0	0,52129+0	0,10366+1
1,23	1,18057	0,76771+0	0,39645+0	0,51640+0	0,10398+1
1,24	1,18792	0,76481+0	0,39123+0	0,51154+0	0,10432+1
1,25	1,19523	0,76190+0	0,38606+0	0,50670+0	0,10468+1
1,26	1,20249	0,75900+0	0,38093+0	0,50189+0	0,10504+1
1,27	1,20972	0,75610+0	0,37586+0	0,49710+0	0,10542+1
1,28	1,21690	0,75319+0	0,37083+0	0,49234+0	0,10581+1
1,29	1,22404	0,75029+0	0,36585+0	0,48761+0	0,10621+1
1,30	1,23114	0,74738+0	0,36091+0	0,48290+0	0,10663+1
1,31	1,23819	0,74448+0	0,35603+0	0,47822+0	0,10706+1
1,32	1,24521	0,74158+0	0,35119+0	0,47357+0	0,10750+1
1,33	1,25218	0,73867+0	0,34640+0	0,46895+0	0,10796+1
1,34	1,25912	0,73577+0	0,34166+0	0,46436+0	0,10842+1
1,35	1,26601	0,73287+0	0,33697+0	0,45980+0	0,10890+1
1,36	1,27286	0,72997+0	0,33233+0	0,45526+0	0,10940+1
1,37	1,27968	0,72707+0	0,32773+0	0,45076+0	0,10990+1
1,38	1,28645	0,72418+0	0,32319+0	0,44628+0	0,11042+1
1,39	1,29318	0,72128+0	0,31869+0	0,44184+0	0,11095+1
1,40	1,29987	0,71839+0	0,31424+0	0,43742+0	0,11149+1
1,41	1,30652	0,71550+0	0,30984+0	0,43304+0	0,11205+1
1,42	1,31313	0,71262+0	0,30549+0	0,42869+0	0,11262+1
1,43	1,31970	0,70973+0	0,30118+0	0,42436+0	0,11320+1
1,44	1,32623	0,70685+0	0,29693+0	0,42007+0	0,11379+1
1,45	1,33272	0,70398+0	0,29272+0	0,41581+0	0,11440+1
1,46	1,33917	0,70110+0	0,28856+0	0,41158+0	0,11501+1
1,47	1,34558	0,69824+0	0,28445+0	0,40739+0	0,11565+1
1,48	1,35195	0,69537+0	0,28039+0	0,40322+0	0,11629+1
1,49	1,35828	0,69251+0	0,27637+0	0,39909+0	0,11695+1



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
1,50	1,36458	0,68966+0	0,27240+0	0,39948+0	0,11762+1
1,51	1,37083	0,68680+0	0,26848+0	0,39091+0	0,11830+1
1,52	1,37705	0,68396+0	0,26491+0	0,38688+0	0,11899+1
1,53	1,38322	0,68111+0	0,26078+0	0,38287+0	0,11977+1
1,54	1,38936	0,67828+0	0,25700+0	0,37890+0	0,12042+1
1,55	1,39546	0,67545+0	0,25326+0	0,37495+0	0,12116+1
1,56	1,40152	0,67262+0	0,24957+0	0,37105+0	0,12190+1
1,57	1,40755	0,66980+0	0,24593+0	0,36717+0	0,12266+1
1,58	1,41353	0,66699+0	0,24233+0	0,36332+0	0,12344+1
1,59	1,41948	0,66418+0	0,23878+0	0,35951+0	0,12422+1
1,60	1,42539	0,66138+0	0,23527+0	0,35573+0	0,12502+1
1,61	1,43127	0,65858+0	0,23181+0	0,35198+0	0,12584+1
1,62	1,43710	0,65579+0	0,22839+0	0,34827+0	0,12666+1
1,63	1,44290	0,65301+0	0,22501+0	0,34458+0	0,12750+1
1,64	1,44866	0,65023+0	0,22168+0	0,34093+0	0,12836+1
1,65	1,45439	0,64746+0	0,21839+0	0,33731+0	0,12922+1
1,66	1,46008	0,64470+0	0,21515+0	0,33372+0	0,13010+1
1,67	1,46573	0,64194+0	0,21195+0	0,33017+0	0,13100+1
1,68	1,47135	0,63919+0	0,20879+0	0,32664+0	0,13190+1
1,69	1,47693	0,63645+0	0,20567+0	0,32315+0	0,13283+1
1,70	1,48247	0,63371+0	0,20259+0	0,31969+0	0,13376+1
1,71	1,48798	0,63099+0	0,19956+0	0,31626+0	0,13471+1
1,72	1,49345	0,62827+0	0,19656+0	0,31287+0	0,13567+1
1,73	1,49889	0,62556+0	0,19361+0	0,30950+0	0,13665+1
1,74	1,50429	0,62285+0	0,19070+0	0,30617+0	0,13764+1
1,75	1,50966	0,62016+0	0,18782+0	0,30287+0	0,13865+1
1,76	1,51499	0,61747+0	0,18499+0	0,29959+0	0,13967+1
1,77	1,52029	0,61479+0	0,18219+0	0,29635+0	0,14070+1
1,78	1,52555	0,61211+0	0,17944+0	0,29315+0	0,14176+1
1,79	1,53078	0,60945+0	0,17672+0	0,28997+0	0,14281+1



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
1,80	1,53598	0,60680+0	0,17404+0	0,28682+0	0,14390+1
1,81	1,54114	0,60415+0	0,17140+0	0,28370+0	0,14499+1
1,82	1,54626	0,60151+0	0,16879+0	0,28061+0	0,14610+1
1,83	1,55136	0,59888+0	0,16622+0	0,27756+0	0,14723+1
1,84	1,55642	0,59626+0	0,16369+0	0,27453+0	0,14836+1
1,85	1,56145	0,59365+0	0,16119+0	0,27153+0	0,14952+1
1,86	1,56640	0,59104+0	0,15873+0	0,26857+0	0,15069+1
1,87	1,57140	0,58845+0	0,15631+0	0,26563+0	0,15187+1
1,88	1,57639	0,58586+0	0,15392+0	0,26272+0	0,15308+1
1,89	1,58123	0,58329+0	0,15156+0	0,25984+0	0,15429+1
1,90	1,58609	0,58072+0	0,14924+0	0,25699+0	0,15553+1
1,91	1,59092	0,57816+0	0,14695+0	0,25417+0	0,15677+1
1,92	1,59572	0,57561+0	0,14470+0	0,25138+0	0,15804+1
1,93	1,60049	0,57307+0	0,14247+0	0,24861+0	0,15932+1
1,94	1,60523	0,57054+0	0,14028+0	0,24588+0	0,16062+1
1,95	1,60993	0,56802+0	0,13813+0	0,24317+0	0,16193+1
1,96	1,6146	0,56551+0	0,13600+0	0,24049+0	0,16326+1
1,97	1,61925	0,56301+0	0,13390+0	0,23784+0	0,16461+1
1,98	1,62385	0,56051+0	0,13184+0	0,23521+0	0,16597+1
1,99	1,62844	0,55803+0	0,12981+0	0,23265+0	0,16735+1
2,00	1,63299	0,55556+0	0,12780+0	0,23005+0	0,16875+1
2,02	1,64201	0,55064+0	0,12389+0	0,22499+0	0,17160+1
2,04	1,65090	0,54576+0	0,12009+0	0,22004+0	0,17451+1
2,06	1,65967	0,54091+0	0,11640+0	0,21519+0	0,17750+1
2,08	1,66833	0,53611+0	0,11282+0	0,21045+0	0,18056+1
2,10	1,67687	0,53135+0	0,10935+0	0,20580+0	0,18369+1
2,12	1,68530	0,52663+0	0,10599+0	0,20126+0	0,18690+1
2,14	1,69392	0,52194+0	0,10273+0	0,19681+0	0,19018+1
2,16	1,70183	0,51730+0	0,99562 -1	0,19247+0	0,19354+1
2,18	1,70992	0,51269+0	0,96495 -1	0,18821+0	0,19698+1

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
2,20	1,71791	0,50813+0	0,93622 -1	0,18405+0	0,20050+1
2,22	1,72579	0,50361+0	0,90640 -1	0,17998+0	0,20409+1
2,24	1,73357	0,49912+0	0,87846 -1	0,17600+0	0,20777+1
2,26	1,74125	0,49468+0	0,85139 -1	0,17211+0	0,21153+1
2,28	1,74882	0,49027+0	0,82515 -1	0,16830+0	0,21538+1
2,30	1,75629	0,48591+0	0,79973 -1	0,16458+0	0,21931+1
2,32	1,76366	0,48158+0	0,77509 -1	0,16095+0	0,22333+1
2,34	1,77093	0,47730+0	0,75122 -1	0,15739+0	0,22744+1
2,36	1,77811	0,47305+0	0,72810 -1	0,15391+0	0,23164+1
2,38	1,78519	0,46885+0	0,70570 -1	0,15052+0	0,23593+1
2,40	1,79218	0,46468+0	0,68399 -1	0,14720+0	0,24031+1
2,42	1,79907	0,46056+0	0,66297 -1	0,14395+0	0,24479+1
2,44	1,80587	0,45647+0	0,64261 -1	0,14078+0	0,24936+1
2,46	1,81256	0,45242+0	0,62288 -1	0,13768+0	0,25403+1
2,48	1,81921	0,44841+0	0,60378 -1	0,13465+0	0,25880+1
2,50	1,82574	0,44444+0	0,58528 -1	0,13169+0	0,25637+1
2,52	1,83219	0,44051+0	0,56736 -1	0,12879+0	0,26865+1
2,54	1,83585	0,43662+0	0,55000 -1	0,12597+0	0,27372+1
2,56	1,84483	0,43277+0	0,53319 -1	0,12321+0	0,27891+1
2,58	1,85103	0,42895+0	0,51692 -1	0,12051+0	0,28420+1
2,60	1,85714	0,42517+0	0,50115 -1	0,11787+0	0,28960+1
2,62	1,86318	0,42143+0	0,48598 -1	0,11530+0	0,29511+1
2,64	1,86913	0,41772+0	0,47110 -1	0,11278+0	0,30073+1
2,66	1,87501	0,41406+0	0,45679 -1	0,11032+0	0,30647+1
2,68	1,88081	0,41043+0	0,44282 -1	0,10792+0	0,31233+1
2,70	1,88653	0,40683+0	0,42950 -1	0,10557+0	0,31830+1
2,72	1,89218	0,40328+0	0,41650 -1	0,10328+0	0,32440+1
2,74	1,89775	0,39976+0	0,40391 -1	0,10104+0	0,32061+1
2,76	1,90325	0,39627+0	0,39172 -1	0,98851 -1	0,33695+1
2,78	1,90868	0,39282+0	0,37992 -1	0,96714 -1	0,34342+1



Tabla para flujo isoentrópico $\gamma=1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
2,80	1,91404	0,38941+0	0,36848 -1	0,94626 -1	0,35001+1
2,82	1,91933	0,38603+0	0,35741 -1	0,92587 -1	0,35674+1
2,84	1,92455	0,38268+0	0,34669 -1	0,90594 -1	0,36359+1
2,86	1,92970	0,37937+0	0,33631 -1	0,88648 -1	0,37058+1
2,88	1,93479	0,37610+0	0,32625 -1	0,86747 -1	0,37771+1
2,90	1,93981	0,37286+0	0,31651 -1	0,84886 -1	0,38498+1
2,92	1,94477	0,36965+0	0,30708 -1	0,83075 -1	0,39238+1
2,94	1,94966	0,36647+0	0,29795 -1	0,81302 -1	0,39993+1
2,96	1,95449	0,36333+0	0,28910 -1	0,79571 -1	0,40763+1
2,98	1,95925	0,36022+0	0,28054 -1	0,77879 -1	0,41547+1
3,00	1,96396	0,35714+0	0,27224 -1	0,76226 -1	0,42346+1
3,10	1,98661	0,34223+0	0,23449 -1	0,68517 -1	0,46573+1
3,20	2,00786	0,32808+0	0,20228 -1	0,61654 -1	0,51210+1
3,30	2,02781	0,31466+0	0,17477 -1	0,55541 -1	0,56286+1
3,40	2,04656	0,30193+0	0,15125 -1	0,50093 -1	0,61837+1
3,50	2,06419	0,28986+0	0,13111 -1	0,45233 -1	0,67896+1
3,60	2,08077	0,27840+0	0,11385 -1	0,40894 -1	0,74501+1
3,70	2,09639	0,26752+0	0,99029 -2	0,37017 -1	0,81691+1
3,80	2,11111	0,25720+0	0,86290 -2	0,33549 -1	0,89506+1
3,90	2,12499	0,24740+0	0,75320 -2	0,30445 -1	0,97990+1
4,00	2,13809	0,23810+0	0,65861 -2	0,27662 -1	0,10719+2
4,10	2,15046	0,22925+0	0,57690 -2	0,25164 -1	0,11715+2
4,20	2,16215	0,22085+0	0,50621 -2	0,22921 -1	0,12792+2
4,30	2,17321	0,21286+0	0,44494 -2	0,20903 -1	0,13955+2
4,40	2,18368	0,20525+0	0,39176 -2	0,19087 -1	0,15210+2
4,50	2,19360	0,19802+0	0,34553 -2	0,17449 -1	0,16562+2
4,60	2,20300	0,19113+0	0,30526 -2	0,15971 -1	0,18018+2
4,70	2,21192	0,18457+0	0,27012 -2	0,14635 -1	0,19583+2
4,80	2,22038	0,17832+0	0,23943 -2	0,13427 -1	0,21264+2
4,90	2,22842	0,17235+0	0,21256 -2	0,12333 -1	0,23067+2

Tabla para flujo isoentrópico $\gamma = 1,4$					
M	M*	t / To	p / Po	$\rho / \rho_o$	A / A*
5,00	2,23607	0,16667+0	0,18900 -2	0,11340 -1	0,25000+2
5,10	2,24334	0,16124+0	0,16832 -2	0,10439 -1	0,27070+2
5,20	2,25026	0,15605+0	0,15013 -2	0,96204 -2	0,29283+2
5,30	2,26685	0,15110+0	0,13411 -2	0,88753 -2	0,31649+2
5,40	2,26313	0,14637+0	0,11997 -2	0,81965 -2	0,34175+2
5,50	2,26913	0,14184+0	0,10748 -2	0,75775 -2	0,36869+2
5,60	2,27487	0,13751+0	0,96430 -3	0,70124 -2	0,39740+2
5,70	2,28030	0,13337+0	0,86635 -3	0,64959 -2	0,42797+2
5,80	2,28552	0,12940+0	0,77941 -3	0,60233 -2	0,46050+2
5,90	2,29051	0,12650+0	0,70214 -3	0,55904 -2	0,49507+2
6,00	2,29528	0,12195+0	0,63336 -3	0,51936 -2	0,53180+2
6,50	2,31626	0,10582+0	0,38547 -3	0,36427 -2	0,75134+2
7,00	2,33333	0,92593 -1	0,24156 -3	0,26088 -2	0,10414+3
7,50	2,34738	0,81633 -1	0,15549 -3	0,19040 -2	0,14184+3
8,00	2,35907	0,72464 -1	0,10243 -3	0,14135 -2	0,19011+3
8,50	2,36899	0,64725 -1	0,68984 -4	0,10658 -2	0,25109+3
9,00	2,37722	0,58140 -1	0,47386 -4	0,81504 -3	0,32719+3
9,50	2,38433	0,52493 -1	0,33141 -4	0,63134 -3	0,42113+3
10,00	2,39046	0,47619 -1	0,23563 -4	0,49483 -3	0,53594+3
11,00	2,40040	0,39683 -1	0,12448 -4	0,31369 -3	0,84191+3
12,00	2,40804	0,33557 -1	0,69222 -5	0,20628 -3	0,12762+4
13,00	2,41404	0,28736 -1	0,40223 -5	0,13998 -3	0,18761+4
14,00	2,41883	0,24876 -1	0,24278 -5	0,97597 -4	0,26854+4
15,00	2,42272	0,21739 -1	0,15148 -5	0,69680 -4	0,37552+4
16,00	2,42591	0,19157 -1	0,97309 -6	0,50795 -4	0,51446+4
17,00	2,42857	0,17007 -1	0,64147 -6	0,37719 -4	0,69205+4
18,00	2,43081	0,15198 -1	0,43272 -6	0,28473 -4	0,91593+4
19,00	2,4327	0,13661 -1	0,29800 -6	0,21813 -4	0,11946+5
20,00	2,43432	0,12346 -1	0,20908 -6	0,16935 -4	0,15377+5
$\infty$	2,44949	0	0	0	$\infty$



Tabla para flujo de Fanno $\gamma=1,4$ (Flujo adiabático)					
M	$M^*=\rho^*/\rho_0$	$t/t^*$	$p/p^*$	$P/P^*$	$(4fL^*)/D$
0,00	0,00000	0,12000+1	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0,01	0,01095	0,12000+1	0,10954+3	0,57874+2	0,71344+4
0,02	0,02191	0,11999+1	0,54770+2	0,28942+2	0,17784+4
0,03	0,03286	0,11998+1	0,36512+2	0,19301+2	0,78708+3
0,04	0,04381	0,11996+1	0,27382+2	0,14481+2	0,44035+3
0,05	0,05476	0,11994+1	0,21903+2	0,11591+2	0,28002+3
0,06	0,06570	0,11991+1	0,18251+2	0,96659+1	0,19303+3
0,07	0,07664	0,11988+1	0,15642+2	0,82915+1	0,14066+3
0,08	0,08758	0,11985+1	0,13684+2	0,72616+1	0,10672+3
0,09	0,09851	0,11981+1	0,12162+2	0,64613+1	0,83496+2
0,10	0,10944	0,11976+1	0,10944+2	0,58218+1	0,66922+2
0,11	0,12035	0,11971+1	0,99466+1	0,52992+1	0,54688+2
0,12	0,13126	0,11966+1	0,91156+1	0,48643+1	0,54408+2
0,13	0,14217	0,11960+1	0,84123+1	0,44969+1	0,38207+2
0,14	0,15306	0,11953+1	0,78093+1	0,41824+1	0,32511+2
0,15	0,16395	0,11946+1	0,72866+1	0,39103+1	0,27932+2
0,16	0,17482	0,11939+1	0,68291+1	0,36727+1	0,24198+2
0,17	0,18569	0,11931+1	0,64253+1	0,34635+1	0,21115+2
0,18	0,19654	0,11923+1	0,60662+1	0,32779+1	0,18543+2
0,19	0,20739	0,11914+1	0,57448+1	0,31123+1	0,16375+2
0,20	0,21822	0,11905+1	0,54554+1	0,29635+1	0,14533+2
0,21	0,22904	0,11895+1	0,51936+1	0,28293+1	0,12956+2
0,22	0,23984	0,11885+1	0,49554+1	0,27076+1	0,11596+2
0,23	0,25063	0,11874+1	0,47378+1	0,25968+1	0,10416+2
0,24	0,26141	0,11863+1	0,45383+1	0,24956+1	0,93865+1
0,25	0,27217	0,11852+1	0,43546+1	0,24027+1	0,84834+1
0,26	0,28291	0,11840+1	0,41851+1	0,23173+1	0,76876+1
0,27	0,29364	0,11828+1	0,40279+1	0,22385+1	0,69832+1
0,28	0,30435	0,11815+1	0,38819+1	0,21656+1	0,63572+1



Tabla para flujo de Fanno $\gamma = 1,4$ (Flujo adiabático)					
M	$M^* = \rho^* / \rho_0$	$t / t^*$	$p / p^*$	$P / P^*$	$(4fL^*)/D$
0,29	0,31504	0,11801+1	0,37459+1	0,20979+1	0,57989+1
0,30	0,32572	0,11788+1	0,36191+1	0,20351+1	0,52993+1
0,31	0,33637	0,11774+1	0,35002+1	0,19765+1	0,48507+1
0,32	0,34701	0,11759+1	0,33887+1	0,19219+1	0,44467+1
0,33	0,35762	0,11744+1	0,32839+1	0,18707+1	0,40821+1
0,34	0,32822	0,11729+1	0,31853+1	0,18229+1	0,37519+1
0,35	0,37879	0,11713+1	0,30922+1	0,17779+1	0,34525+1
0,36	0,38935	0,11697+1	0,30042+1	0,17358+1	0,31801+1
0,37	0,39988	0,11680+1	0,29209+1	0,16961+1	0,29319+1
0,38	0,41039	0,11663+1	0,28419+1	0,16587+1	0,27054+1
0,39	0,42087	0,11646+1	0,27671+1	0,16234+1	0,24983+1
0,40	0,43133	0,11628+1	0,26958+1	0,15901+1	0,23085+1
0,41	0,44177	0,11610+1	0,26279+1	0,15587+1	0,21344+1
0,42	0,45218	0,11591+1	0,25634+1	0,15289+1	0,19744+1
0,43	0,46257	0,11572+1	0,25017+1	0,15007+1	0,18272+1
0,44	0,47293	0,11553+1	0,24428+1	0,14739+1	0,16915+1
0,45	0,48326	0,11533+1	0,23865+1	0,14487+1	0,15664+1
0,46	0,49357	0,11513+1	0,23326+1	0,14246+1	0,14509+1
0,47	0,50385	0,11492+1	0,22809+1	0,14018+1	0,13441+1
0,48	0,51410	0,11471+1	0,22313+1	0,13801+1	0,12353+1
0,49	0,52433	0,11450+1	0,21838+1	0,13595+1	0,11539+1
0,50	0,53452	0,11429+1	0,21381+1	0,13398+1	0,10691+1
0,52	0,55483	0,11384+1	0,20519+1	0,13034+1	0,91742+0
0,54	0,57501	0,11339+1	0,19719+1	0,12703+1	0,78663+0
0,56	0,59507	0,11292+1	0,18975+1	0,12403+1	0,67357+0
0,58	0,61501	0,11244+1	0,18282+1	0,12129+1	0,57568+0
0,60	0,63481	0,11194+1	0,17634+1	0,11882+1	0,49082+0
0,62	0,65448	0,11143+1	0,17026+1	0,11656+1	0,41719+0
0,64	0,67402	0,11091+1	0,16456+1	0,11451+1	0,3533+0
0,66	0,69342	0,11038+1	0,15919+1	0,11256+1	0,29785+0



Tabla para flujo de Fanno $\gamma=1,4$ (Flujo adiabático)					
M	$M^*=\rho^*/\rho_0$	$t/t^*$	$p/p^*$	$P/P^*$	$(4fL^*)/D$
0,68	0,71268	0,10984+1	0,15913+1	0,11097+1	0,24978+0
0,70	0,73179	0,10929+1	0,14935+1	0,10944+1	0,20814+0
0,72	0,75076	0,10873+1	0,14482+1	0,10806+1	0,17215+0
0,74	0,76958	0,10815+1	0,14054+1	0,10681+1	0,14112+0
0,76	0,78825	0,10757+1	0,13647+1	0,10569+1	0,11447+0
0,78	0,80677	0,10698+1	0,13261+1	0,10147+1	0,91675 -1
0,80	0,82514	0,10638+1	0,12893+1	0,10382+1	0,72289 -1
0,82	0,84335	0,10578+1	0,12542+1	0,10305+1	0,55932 -1
0,84	0,86140	0,10516+1	0,12208+1	0,10237+1	0,42256 -1
0,86	0,87929	0,10454+1	0,11989+1	0,10179+1	0,30965 -1
0,88	0,89703	0,10391+1	0,11583+1	0,10129+1	0,21795 -1
0,90	0,91460	0,10327+1	0,11251+1	0,10089+1	0,14512 -1
0,92	0,93201	0,10263+1	0,11011+1	0,10056+1	0,89133 -2
0,94	0,94925	0,10198+1	0,10743+1	0,10031+1	0,48154 -2
0,96	0,96633	0,10132+1	0,10485+1	0,10014+1	0,20571 -2
0,98	0,98325	0,10066+1	0,10238+1	0,10003+1	0,49469 -3
1,00	1,00000	0,10000+1	0,10000+1	0,10000+1	0,0
1,02	1,01658	0,99331+0	0,97711+0	0,10003+1	0,45869 -3
1,04	1,03300	0,98658+0	0,95507+0	0,10013+1	0,17685 -2
1,06	1,04925	0,97982+0	0,93383+0	0,10029+1	0,38379 -2
1,08	1,06533	0,97302+0	0,91335+0	0,10051+1	0,65846 -2
1,10	1,08124	0,96618+0	0,89359+0	0,10079+1	0,99349 -2
1,12	1,09699	0,95932+0	0,87451+0	0,10113+1	0,13823 -1
1,14	1,11256	0,95244+0	0,85608+0	0,10153+1	0,18188 -1
1,16	1,12797	0,94554+0	0,83826+0	0,10198+1	0,22977 -1
1,18	1,14321	0,93861+0	0,82103+0	0,10248+1	0,28142 -1
1,20	1,15828	0,93168+0	0,80436+0	0,10304+1	0,33638 -1
1,22	1,17319	0,92473+0	0,78822+0	0,10366+1	0,39426 -1
1,24	1,18792	0,91777+0	0,77258+0	0,10432+1	0,45471 -1
1,26	1,20249	0,91080+0	0,75743+0	0,10504+1	0,51739 -1





Tabla para flujo de Fanno $\gamma=1,4$ (Flujo adiabático)					
M	$M^*=\rho^*/\rho_0$	$t/t^*$	$p/p^*$	$P/P^*$	$(4fL^*)/D$
1,28	1,21690	0,90383+0	0,74274+0	0,10581+1	0,58201 -1
1,30	1,23114	0,89686+0	0,72848+0	0,10663+1	0,64832 -1
1,32	1,24521	0,88989+0	0,71465+0	0,10749+1	0,71607 -1
1,34	1,25912	0,88292+0	0,70122+0	0,10842+1	0,78504 -1
1,36	1,27286	0,87596+0	0,68818+0	0,10939+1	0,85503 -1
1,38	1,28645	0,86901+0	0,67751+0	0,11042+1	0,92586 -1
1,40	1,29987	0,86207+0	0,666319+0	0,11149+1	0,99738 -1
1,42	1,31313	0,85514+0	0,65122+0	0,11262+1	0,10694+0
1,44	1,32623	0,84822+0	0,63958+0	0,11379+1	0,11419+0
1,46	1,33917	0,84133+0	0,62825+0	0,11501+1	0,12146+0
1,48	1,35195	0,83445+0	0,61722+0	0,11629+1	0,12875+0
1,50	1,36458	0,82759+0	0,60648+0	0,11762+1	0,13605+0
1,55	1,39546	0,81054+0	0,58084+0	0,12116+1	0,15427+0
1,60	1,42539	0,79365+0	0,55679+0	0,12502+1	0,17236+0
1,65	1,45439	0,77695+0	0,53421+0	0,12922+1	0,19023+0
1,70	1,48247	0,76046+0	0,51297+0	0,13376+1	0,20779+0
1,75	1,50966	0,74419+0	0,49295+0	0,13865+1	0,22504+0
1,80	1,53598	0,72816+0	0,47407+0	0,14389+1	0,24189+0
1,85	1,55145	0,71838+0	0,45623+0	0,14952+1	0,25832+0
1,90	1,58609	0,69686+0	0,43936+0	0,15553+1	0,27433+0
1,95	1,60993	0,68162+0	0,42339+0	0,16193+1	0,28989+0
2,00	1,63299	0,66667+0	0,40825+0	0,16875+1	0,30500+0
2,10	1,67687	0,63762+0	0,38024+0	0,18369+1	0,33785+0
2,20	1,71791	0,60979+6	0,35494+0	0,20049+1	0,36091+0
2,30	1,75629	0,68309+0	0,33200+0	0,21931+1	0,38623+0
2,40	1,79218	0,55762+0	0,31114+0	0,24031+1	0,40989+0
2,50	1,82574	0,53333+0	0,29212+0	0,26367+1	0,43198+0
2,60	1,85714	0,51020+0	0,27473+0	0,28959+1	0,45259+0
2,70	1,88653	0,48820+0	0,25878+0	0,31829+1	0,47182+0
2,80	1,91404	0,46729+0	0,24414+0	0,35001+1	0,48976+0



Tabla para flujo de Fanno $\gamma=1,4$ (Flujo adiabático)					
M	$M^*=\rho^*/\rho_0$	$t/t^*$	$p/p^*$	$P/P^*$	$(4fL^*)/D$
2,90	1,93981	0,44743+0	0,23066+0	0,38498+1	0,50652+0
3,00	1,96396	0,42857+0	0,21822+0	0,42346+1	0,52216+0
3,10	1,98661	0,41068+0	0,20672+0	0,46573+1	0,53678+0
3,20	2,00786	0,39370+0	0,19608+0	0,51209+1	0,55044+0
3,30	2,02781	0,37760+0	0,18621+0	0,56286+1	0,56323+0
3,40	2,04656	0,36232+0	0,17704+0	0,61837+1	0,57521+0
3,50	2,06419	0,34783+0	0,16851+0	0,67896+1	0,58643+0
3,60	2,08077	0,33408+0	0,16055+0	0,74701+1	0,59695+0
3,70	2,09639	0,32103+0	0,15313+0	0,81691+1	0,60684+0
3,80	2,11111	0,30864+0	0,14620+0	0,89506+1	0,61612+0
3,90	2,12499	0,29688+0	0,13971+0	0,97989+1	0,62485+0
4,00	2,13809	0,28571+0	0,13363+0	0,10719+2	0,63306+0
4,50	2,19359	0,23762+0	0,10833+0	0,16562+2	0,66763+0
5,00	2,23607	0,20000+0	0,89443 -1	0,25000+2	0,69379+0
5,50	2,26913	0,17021+0	0,75012 -1	0,36869+2	0,71700+0
6,00	2,29528	0,14634+0	0,63758 -1	0,53180+2	0,72988+0
6,50	2,31626	0,12698+0	0,54823 -1	0,75134+2	0,74254+0
7,00	2,33333	0,11111+0	0,47619 -1	0,10414+3	0,75279+0
7,50	2,34738	0,97959 -1	0,41731 -1	0,14184+3	0,76121+0
8,00	2,35907	0,86957 -1	0,36860 -1	0,19011+3	0,76819+0
8,50	2,36889	0,77670 -1	0,32787 -1	0,25109+3	0,77404+0
9,00	2,37722	0,69767 -1	0,29348 -1	0,32719+3	0,77899+0
9,50	2,38433	0,62992 -1	0,26419 -1	0,42113+3	0,78319+0
10,00	2,39046	0,57143 -1	0,23905 -1	0,53594+3	0,78683+0
11,00	2,40039	0,47619 -1	0,19838 -1	0,84191+3	0,79270+0
12,00	2,40804	0,40268 -1	0,16723 -1	0,12762+4	0,79721+0
13,00	2,41404	0,34483 -1	0,14284 -1	0,18761+4	0,80074+0
14,00	2,41883	0,29851 -1	0,12341 -1	0,26854+4	0,80356+0
15,00	2,42272	0,26087 -1	0,10768 -1	0,37552+4	0,80584+0
$\infty$	2,44949	0,0	0,0	$\infty$	0,82151+0

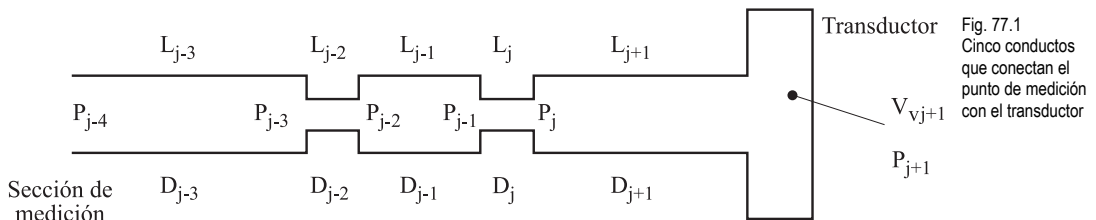


## Problema 77

### Enunciado

Supóngase que se quiere medir la presión y/o velocidad de una corriente de fluido al pasar alrededor de un cuerpo. En general, lo que se hace es realizar un colectivo de pequeños agujeros en la zona donde se quiere realizar la medición. Dichos agujeros son conectados individualmente a sendos sensores de presión mediante un pequeño conducto. Si las mediciones son estáticas, el sistema no conlleva ningún problema, pero si existen fluctuaciones de presión, por ejemplo para el caso en que se quiera medir flujo turbulento, entonces, la longitud de la línea de transmisión (conducto) puede hacer que en la zona donde se encuentra el transductor de presión, la amplitud y la fase de la perturbación no sean las mismas que las que existen en el fluido situado en el otro extremo del conducto, es decir, no se mide lo que en realidad sucede. Con el fin de evitar, en la medida de lo posible esta variación de amplitud y desfase de la onda de presión, se sitúan muchas veces pequeñas restricciones dentro del conducto que une la sonda de medición (agujero) y el transductor de presión. La aplicación del método de Bergh-Tijdemann al conducto de transmisión de la perturbación, permite determinar, para un conjunto conducto con un número de restricciones genérico, cuál es la variación de amplitud y desfase que la perturbación de presión experimenta cuando se propaga a lo largo del conducto de medición, y en función de la frecuencia de la perturbación.

Sea, pues, el caso de un colectivo de conductos en serie que unen la sección de medición situada sobre un cuerpo genérico y el transductor de presión (v. figura 77.1). Se pide describir, inicialmente, el conjunto de ecuaciones que caracterizan el método de Bergh-Tijdemann, comentando las hipótesis de trabajo y los campos de aplicación, y aplicar el método a un conjunto de cinco tubos en serie, con diferentes secciones y longitudes, que unen el punto de medición y el transductor. Los datos del problema son:



Los diferentes parámetros que caracterizan el fluido y la instalación toman los siguientes valores:

- Fluido utilizado, aire, el punto de medición esta a condiciones atmosféricas normales.
- Temperatura = 20 °C
- Presión = 102000 Pa



En la sección de conexión entre un conducto y el siguiente, el método considera la posible existencia de un volumen de fluido, (v. figura 77.2); para el caso de la figura 77.1, estos volúmenes tienen el valor de:

$$V_{Vj+1} = 100 \text{ mm}^3, \quad V_{Vj} = 0 \text{ mm}^3, \quad V_{Vj-1} = 0 \text{ mm}^3; \quad V_{Vj-2} = 0 \text{ mm}^3; \\ V_{Vj-3} = 0 \text{ mm}^3$$

$$L_{j+1} = 16 \text{ mm.} \quad L_j = 30 \text{ mm.} \quad L_{j-1} = 50 \text{ mm.} \quad L_{j-2} = 30 \text{ mm.} \quad L_{j-3} = 374 \text{ mm.}$$

$$D_{j+1} = 1,5 \text{ mm.} \quad D_j = 0,4 \text{ mm.} \quad D_{j-1} = 1,5 \text{ mm.} \quad D_{j-2} = 0,4 \text{ mm.} \quad D_{j-3} = 1,5 \text{ mm.}$$

$$V_{tj+1} = \pi \frac{D_{j+1}^2}{4} L_{j+1}; \quad V_{tj} = \pi \frac{D_j^2}{4} L_j; \quad V_{tj-1} = \pi \frac{D_{j-1}^2}{4} L_{j-1}; \quad V_{tj-2} = \pi \frac{D_{j-2}^2}{4} L_{j-2}$$

$$V_{tj-3} = \pi \frac{D_{j-3}^2}{4} L_{j-3}$$

$$\sigma_j = 0,01$$

$$K_j = 1,4$$

$$\gamma = 1,4$$

$$\mu_{j+1} = \mu_j = \mu_{j-1} = \mu_{j-2} = \mu_{j-3} = 18,21 \cdot 10^{-6} \text{ Kg / (ms)};$$

$$\rho_{sj+1} = \rho_{sj} = \rho_{sj-1} = \rho_{sj-2} = \rho_{sj-3} = 1,2129 \text{ Kg / m}^3;$$

Valor del número de Prandtl:  $Pr = 0,713$

## Resolución

1. Descripción del método de Bergh-Tijdemann.

El método de Bergh-Tijdemann se basa en las siguientes hipótesis:

Las perturbaciones a medir son sinusoidales y tienen una amplitud muy pequeña.

El radio interno del tubo o tubos es muy pequeño, comparado con su longitud.

El flujo es considerado laminar a lo largo de todo el conducto de transmisión.



El conducto genérico al que se aplica el método se puede representar como:

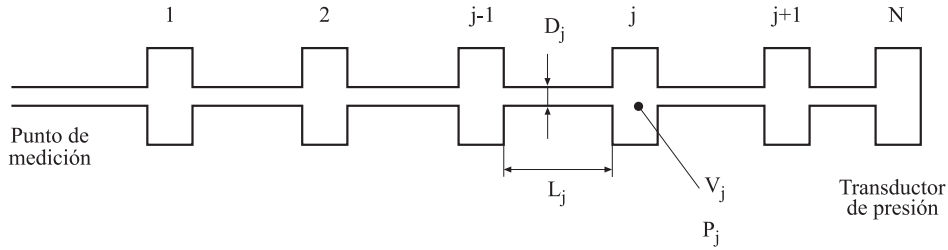


Fig. 77.2  
Conducto de  
transmisión  
genérico.  
Obsérvese que al  
final de cada  
conducto puede  
existir un volumen  
que separe dicho  
conducto del  
siguiente.

El método se basa en una fórmula recursiva, la cual evalúa la diferencia de amplitud de presión dinámica entre los extremos opuestos de un conducto de una sección y una longitud dadas.

Dicha formula recursiva se expresa como:

$$\frac{P_j}{P_{j-1}} = \left[ \frac{\cosh(\phi_j L_j) + \frac{V_{vj}}{V_{tj}} \left( \sigma_j + \frac{1}{K_j} \right) n_j \phi_j L_j \sinh(\phi_j L_j)}{+ \frac{V_{tj+1} \phi_{j+1} L_j J_0(\alpha_j) J_2(\alpha_{j+1}) \sinh(\phi_j L_j)}{V_{tj} \phi_j L_{j+1} J_0(\alpha_{j+1}) J_2(\alpha_j) \sinh(\phi_{j+1} L_{j+1})} \left[ \cosh(\phi_{j+1} L_{j+1}) - \frac{P_{j+1}}{P_j} \right]} \right]^{-1} \quad (1)$$

Teniendo para cada uno de los conductos considerados:

$$\phi_j = \frac{2 \pi f}{a_{0j}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_j)}{J_2(\alpha_j)}} \sqrt{\frac{\gamma}{n_j}} \quad (2)$$

$$\alpha_j = i^{1.5} \frac{D_j}{2} \sqrt{\frac{\rho_{sj} 2 \pi f}{\mu_j}} \quad (3)$$

$$n_j = \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{J_2(\alpha_j \sqrt{Pr})}{J_2(\alpha_j \sqrt{Pr})} \right]^{-1} \quad (4)$$

Obsérvese que, para calcular la ecuación (3), la densidad y viscosidad del fluido han de ser determinadas en cada uno de los conductos.

Los términos  $J_0(\alpha_j)$ ,  $J_0(\alpha_{j+1})$ ,  $J_2(\alpha_j)$ ,  $J_2(\alpha_{j+1})$  representan las funciones de Bessel de primera especie y de orden cero (0) o de orden dos (2), definidas para el parámetro ( $\alpha$ ), bien de la tubería (j), bien de la tubería (j+1).

El ratio de amplitud de la onda de presión entre los extremos de un colectivo de conductos unidos en serie, se puede definir como:



$$\frac{P_N}{P_0} = \frac{P_N}{P_{j+1}} \frac{P_{j+1}}{P_j} \frac{P_j}{P_{j-1}} \frac{P_{j-1}}{P_{j-2}} \dots \frac{P_{j-n}}{P_0} \quad (5)$$

Es necesario remarcar que la ecuación recursiva (1) da como resultado un número complejo, cuya parte real, debe ser introducida en la ecuación (5) con el fin de poder determinar la función de transferencia de la onda de presión entre los extremos del colectivo de conductos. La parte imaginaria dará el ángulo de desfase entre la señal real a la entrada del conducto y la señal que medirá el transductor. Dichas señales tienen, supuestamente, una forma sinusoidal.

$$\frac{P_j}{P_{j-1}} = x + y_i = c e^{i\varphi}; \quad (6)$$

$$\text{donde } c = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \text{arg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (7)$$

Aunque no se utiliza cuando los parámetros físicos del fluido a medir tienen régimen permanente, es necesario remarcar que, para calcular la presión ( $P_i$ ) en un punto genérico del circuito, se deberá utilizar la siguiente ecuación:

$$P_i = P_0 + c e^{i\varphi} \quad (8)$$

donde  $P_0$  es la presión a la entrada del conducto y los parámetros  $c$  y  $\varphi$  han sido ya definidos en la ecuación (7).

Cabe recordar que todos los parámetros utilizados en las diferentes ecuaciones presentadas, están definidos en unidades del sistema internacional.

De acuerdo con los resultados presentados por Bergh y Tijdemann en 1965, y también por Holmes y Lewis en 1987, se puede afirmar que el material utilizado en la línea de transmisión juega un papel insignificante en lo referente al efecto causado sobre la amplitud y el ángulo de fase de la onda de presión.

2. Aplicación del método para el caso especificado en el presente problema: cinco conductos conectados en serie, figura 77.1.

Si se observan detenidamente los parámetros referentes a las longitudes y los diámetros de los cinco conductos, se ve que el conducto de transmisión tiene un diámetro de 1,5 mm y que dentro del mismo están insertadas dos restricciones de diámetro 0,4 mm. Estas restricciones juegan un papel importantísimo en lo que hace referencia a poder mantener constante la amplitud de oscilación de la onda de presión a lo largo del conducto de transmisión.

Las ecuaciones definidas en el método de Bergh y Tijdemann toman, para el caso en estudio, la siguiente forma, (v. la figura 77.1).



Conducto de la izquierda:

$$\frac{P_{j+1}}{P_j} = \left[ \cosh(\phi_{j+1} L_{j+1}) + \frac{V_{vj+1}}{V_{tj+1}} \left( \sigma_{j+1} + \frac{1}{K_{j+1}} \right) n_{j+1} \phi_{j+1} L_{j+1} \sinh(\phi_{j+1} L_{j+1}) \right]^{-1} \quad (9)$$

Restricción de la izquierda:

$$\frac{P_j}{P_{j-1}} = \left[ \cosh(\phi_j L_j) + \frac{V_{vj}}{V_{tj}} \left( \sigma_j + \frac{1}{K_j} \right) n_j \phi_j L_j \sinh(\phi_j L_j) + \frac{V_{tj+1} \phi_{j+1} L_j J_0(\alpha_j) J_2(\alpha_{j+1}) \sinh(\phi_j L_j)}{V_{tj} \phi_j L_{j+1} J_0(\alpha_{j+1}) J_2(\alpha_j) \sinh(\phi_{j+1} L_{j+1})} \left[ \cosh(\phi_{j+1} L_{j+1}) - \frac{P_{j+1}}{P_j} \right] \right]^{-1} \quad (10)$$

Conducto central:

$$\frac{P_{j-1}}{P_{j-2}} = \left[ \cosh(\phi_{j-1} L_{j-1}) + \frac{V_{vj-1}}{V_{tj-1}} \left( \sigma_{j-1} + \frac{1}{K_{j-1}} \right) n_{j-1} \phi_{j-1} L_{j-1} \sinh(\phi_{j-1} L_{j-1}) + \frac{V_{tj} \phi_j L_{j-1} J_0(\alpha_{j-1}) J_2(\alpha_j) \sinh(\phi_{j-1} L_{j-1})}{V_{tj-1} \phi_{j-1} L_j J_0(\alpha_j) J_2(\alpha_{j-1}) \sinh(\phi_j L_j)} \left[ \cosh(\phi_j L_j) - \frac{P_j}{P_{j-1}} \right] \right]^{-1} \quad (11)$$

Restricción de la derecha:

$$\frac{P_{j-2}}{P_{j-3}} = \left[ \cosh(\phi_{j-2} L_{j-2}) + \frac{V_{vj-2}}{V_{tj-2}} \left( \sigma_{j-2} + \frac{1}{K_{j-2}} \right) n_{j-2} \phi_{j-2} L_{j-2} \sinh(\phi_{j-2} L_{j-2}) + \frac{V_{tj-1} \phi_{j-1} L_{j-2} J_0(\alpha_{j-2}) J_2(\alpha_{j-1}) \sinh(\phi_{j-2} L_{j-2})}{V_{tj-2} \phi_{j-2} L_{j-1} J_0(\alpha_{j-1}) J_2(\alpha_{j-2}) \sinh(\phi_{j-1} L_{j-1})} \left[ \cosh(\phi_{j-1} L_{j-1}) - \frac{P_{j-1}}{P_{j-2}} \right] \right]^{-1} \quad (12)$$

Conducto de la derecha:

$$\frac{P_{j-3}}{P_{j-4}} = \left[ \cosh(\phi_{j-3} L_{j-3}) + \frac{V_{vj-3}}{V_{tj-3}} \left( \sigma_{j-3} + \frac{1}{K_{j-3}} \right) n_{j-3} \phi_{j-3} L_{j-3} \sinh(\phi_{j-3} L_{j-3}) + \frac{V_{tj-2} \phi_{j-2} L_{j-3} J_0(\alpha_{j-3}) J_2(\alpha_{j-2}) \sinh(\phi_{j-3} L_{j-3})}{V_{tj-3} \phi_{j-3} L_{j-2} J_0(\alpha_{j-2}) J_2(\alpha_{j-3}) \sinh(\phi_{j-2} L_{j-2})} \left[ \cosh(\phi_{j-2} L_{j-2}) - \frac{P_{j-2}}{P_{j-3}} \right] \right]^{-1} \quad (13)$$



Como conclusión, la ratio de amplitud de la onda de presión entre los extremos de la instalación se determinará:

$$\frac{P_{j+1}}{P_{j-4}} = \frac{P_{j+1}}{P_j} \frac{P_j}{P_{j-1}} \frac{P_{j-1}}{P_{j-2}} \frac{P_{j-2}}{P_{j-3}} \frac{P_{j-3}}{P_{j-4}} \quad (14)$$

A la hora de utilizar las ecuaciones (9-13), se ha de tener presente que, para el caso objeto de estudio, los volúmenes  $V_{Vj}$ ,  $V_{Vj-1}$ ,  $V_{Vj-2}$ ,  $V_{Vj-3}$  tienen un valor nulo, con lo que los términos de las ecuaciones donde aparecen dichos volúmenes serán cero. Además, hay que tener presente que el proceso de cálculo empieza calculando inicialmente la ecuación (9).

Cabe recordar, asimismo, que las ecuaciones (2), (3) y (4) han de ser calculadas para cada uno de los cinco conductos de que consta el circuito. Para el presente caso, dichas ecuaciones tomarán la forma:

$$\phi_{j+1} = \frac{2 \pi f}{a_{0j+1}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j+1})}{J_2(\alpha_{j+1})}} \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j+1}}} \quad (15)$$

$$\phi_j = \frac{2 \pi f}{a_{0j}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_j)}{J_2(\alpha_j)}} \sqrt{\frac{\gamma}{n_j}} \quad (16)$$

$$\phi_{j-1} = \frac{2 \pi f}{a_{0j-1}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j-1})}{J_2(\alpha_{j-1})}} \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j-1}}} \quad (17)$$

$$\phi_{j-2} = \frac{2 \pi f}{a_{0j-2}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j-2})}{J_2(\alpha_{j-2})}} \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j-2}}} \quad (18)$$

$$\phi_{j-3} = \frac{2 \pi f}{a_{0j-3}} \sqrt{\frac{J_0(\alpha_{j-3})}{J_2(\alpha_{j-3})}} \sqrt{\frac{\gamma}{n_{j-3}}} \quad (19)$$

$$\alpha_{j+1} = i^{1,5} \frac{D_{j+1}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj+1} 2 \pi f}{\mu_{j+1}}} \quad (20)$$

$$\alpha_j = i^{1,5} \frac{D_j}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj} 2 \pi f}{\mu_j}} \quad (21)$$

$$\alpha_{j-1} = i^{1,5} \frac{D_{j-1}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj-1} 2 \pi f}{\mu_{j-1}}} \quad (22)$$

$$\alpha_{j-2} = i^{1,5} \frac{D_{j-2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj-2} 2 \pi f}{\mu_{j-2}}} \quad (23)$$





$$\alpha_{j-3} = i^{1.5} \frac{D_{j-3}}{2} \sqrt{\frac{\rho_{Sj-3} 2 \pi f}{\mu_{j-3}}} \quad (24)$$

$$n_{j+1} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{J_2(\alpha_{j+1} \sqrt{\text{Pr}})}{J_2(\alpha_{j+1} \sqrt{\text{Pr}})} \right]^{-1} \quad (25)$$

$$n_j = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{J_2(\alpha_j \sqrt{\text{Pr}})}{J_2(\alpha_j \sqrt{\text{Pr}})} \right]^{-1} \quad (26)$$

$$n_{j-1} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{J_2(\alpha_{j-1} \sqrt{\text{Pr}})}{J_2(\alpha_{j-1} \sqrt{\text{Pr}})} \right]^{-1} \quad (27)$$

$$n_{j-2} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{J_2(\alpha_{j-2} \sqrt{\text{Pr}})}{J_2(\alpha_{j-2} \sqrt{\text{Pr}})} \right]^{-1} \quad (28)$$

$$n_{j-3} = \left[ 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{J_2(\alpha_{j-3} \sqrt{\text{Pr}})}{J_2(\alpha_{j-3} \sqrt{\text{Pr}})} \right]^{-1} \quad (29)$$

Por último, cabe señalar que, la consideración de que para cada conducto existe una densidad y una viscosidad medias aplicables a todo punto dentro de dicho conducto es, perfectamente válida para la gran mayoría de aplicaciones reales. Para el caso en estudio, se consideran constantes e iguales, las densidades y viscosidades del fluido en todos los conductos.

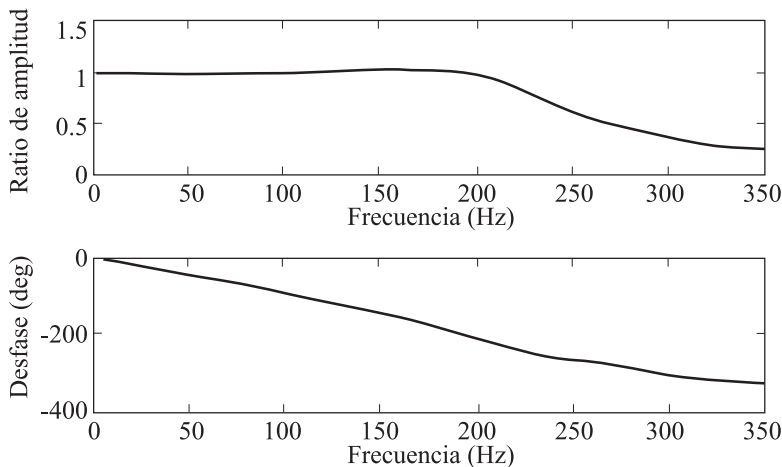


Fig. 77.3  
Variación de  
amplitud y cambio  
de fase para el  
sistema consistente  
en cinco conductos  
conectados en  
serie. Sistema  
definido en la figura  
77.1



Un pequeño programa utilizando el software MATLAB ha sido realizado con el fin de visualizar, para el caso considerado, la variación de amplitud y ángulo de fase que una onda de presión experimentaría al evolucionar por el sistema objeto de estudio. Obsérvese que, para la configuración elegida, figura 77.3, prácticamente no existe cambio de amplitud de la perturbación hasta una frecuencia de unos 200 Hz.

## Problema 78

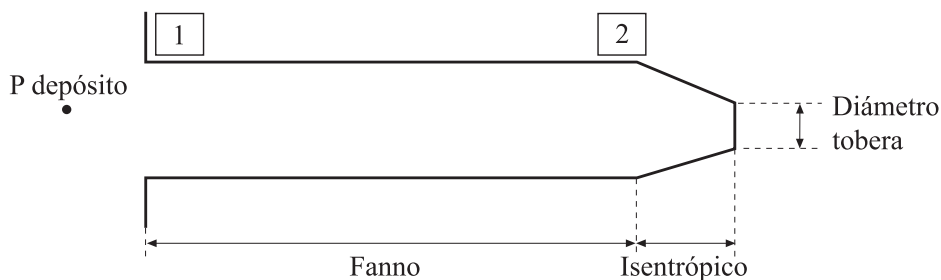
### Enunciado

Sea un sistema de extinción de incendios destinado a buques, que consta de dos rociadores con un diámetro de 36 mm cada uno, ambos rociadores están conectados por un conducto de 14 m de longitud en cuyo extremo opuesto están situados los tanques de agente extintor. Si se quiere que el caudal másico total que circula por los rociadores sea de 7 Kg/s y la presión de estancamiento en los tanques de 17 bar, que se considerará constante durante el tiempo en que actúen los rociadores, determine el diámetro del conducto necesario.

Considérese en primera aproximación:

- Que el fluido circulante tiene las mismas propiedades que el aire
- Que en el extremo del conducto existe un sólo rociador cuya sección es la suma de secciones de los rociadores iniciales
- Que en el conducto se tiene flujo de Fanno con  $C_f=0,005$
- Que la unión entre la sección resultante de los rociadores y el conducto se realiza mediante una tobera convergente donde el flujo se considera isentrópico

Fig. 78.1



Datos:

$\varnothing$ tobera	L longitud del conducto (m)
P depósito	f factor de fricción =0,005
T temperatura del aire	$\dot{m}$ caudal másico circulante requerido

La sección de salida de la tobera será igual a la sección de la suma de agujeros de la tobera o toberas instaladas.

$$R_{\text{AIRE}} = 287,04 \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$$

## Resolución

1. Determinación de la presión de estancamiento en la tobera de salida

Datos de partida:

$A^*$  = área de salida de la tobera ( $\text{m}^2$ )

$\dot{m}$  = caudal másico circulante ( $\text{Kg/s}$ )

$\gamma = 1,4$  (índice de adiabaticidad)

$T_0$  = temperatura de estancamiento (K)

$$T_0 = T + \frac{v^2}{2c_p} = T \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

Suponiendo que en la tobera el flujo estará bloqueado, se tomará como temperatura de estancamiento  $T_0 \cong 1,2 T$ : un valor 20% mayor que la temperatura estática del fluido circulante, considerando ésta de  $25^\circ\text{C}$ .

El caudal másico circulante en condiciones de flujo bloqueado y para una tobera convergente vendrá dado por:

$$\dot{m} = \frac{P_0 \cdot A^*}{\sqrt{R \cdot T_0}} \sqrt{\gamma} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = 0,6847 \cdot \frac{P_0 \cdot A_{\text{SALIDA}}}{\sqrt{R \cdot T_0}};$$

$$P_0 = \frac{\dot{m} \sqrt{R \cdot T_0}}{0,6847 \cdot A_{\text{SALIDA}}}$$

El diámetro equivalente de las dos toberas se obtendrá:

$$\frac{\pi 0,036^2}{4} 2 = A_{\text{SALIDA}} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D_{\text{Tobera}} = 0,0509 \text{ m}$$



Para:

$$\dot{m} = 7 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]; \quad T_0 = 30[\text{k}] \equiv 303[\text{k}]; \quad A_{\text{SALIDA}} = \frac{\pi}{4} (\text{diámetro de la tobera})^2$$

$$= \frac{\pi}{4} (0,0509)^2 [\text{m}^2] \quad R = 287,04 \left[ \frac{\text{J}}{\text{Kg K}} \right]$$

y se obtendrá:  $P_0 = 1.481.035 [\text{Pa}] \equiv 14,8 [\text{bar}]$

Esta sería la presión de estancamiento en la tobera convergente para que a la salida de la tobera se tenga flujo bloqueado.

2. Determinación de las condiciones estáticas y de estancamiento a la entrada de la tobera y, por ende, determinación del diámetro del conducto:

En la tobera convergente se cumple:  $P_0 = \text{cte}$ ;  $T_0 = \text{cte}$

El proceso de cálculo empleado es iterativo. Se supondrá inicialmente un diámetro del conducto, hallándose la presión de estancamiento necesaria en los depósitos de alimentación, si ésta es superior a la presión existente, se deberá aumentar el diámetro del conducto.

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{\frac{R \cdot D_C}{4}}{\frac{R \cdot D_T}{4}} = \left( \frac{D_C}{D_T} \right)^2$$

Si  $\varnothing$  conducto  $\equiv 3'' \equiv 76,2 \text{ mm}$ ;

$$\frac{A}{A^*} = \left( \frac{D_C}{D_T} \right)^2 = \left( \frac{76,2}{50,8} \right)^2 = 2,25$$

El numero de Mach a la entrada de la tobera será:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T} = \frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

De esta ecuación, para un valor dado de  $\frac{A}{A^*}$  hay que despejar M: (que será el número de Mach a la entrada de la tobera).

De la tabla de flujo isoentrópico para  $\frac{A}{A^*} = 2,25 \xrightarrow{\text{SE OBTIENE}} M_2 = 0,27$

Nota. El valor de  $M_2$  ha de ser siempre inferior a la unidad.



En la sección de entrada de la tobera, donde se tiene  $M_2=0,27$ , se cumple:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right); \quad \text{relación de las temperaturas de estancamiento y estática a la entrada de la tobera}$$

$$\frac{P_{02}}{P_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \text{relación presión estancamiento y presión estática a la entrada de la tobera}$$

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \text{relación de densidades}$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores el valor de  $M_2=0,27$ , se halla:

$$\frac{T_{02}}{T_2} = 0,98563 \quad \frac{P_{02}}{P_2} = 0,95060 \quad \frac{\rho_{02}}{\rho_2} = 0,96446$$

de donde:

$$P_2 = 0,95060 * 1.481.035 = 1.407.871,9 \text{ Pa}$$

3. La presión a la entrada del conducto,  $P_{\text{depósito}}$  se obtiene:

Puesto que el flujo en el conducto es de Fanno, se cumplirá:

$$\frac{4Cf l^*}{D} \Big|_1 = \frac{4Cf l^*}{D} \Big|_2 + 4Cf \frac{\Delta x}{D}$$

donde:

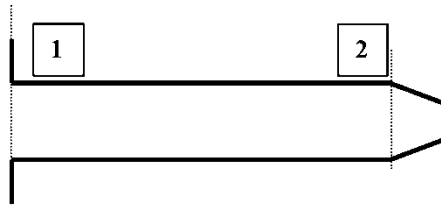
$$\frac{4\overline{Cf} l^*}{D} = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \text{Ln} \left\{ M^2 \left[ \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \right]^{-1} \right\} \quad (\text{A})$$

Para  $M_2=0,27$ ; de la tabla para flujo de Fanno  $\xrightarrow{\text{SE OBTIENE}}$   $\frac{4f l^*}{D} \Big|_2 = 6,9832$

Por otro lado:

$$4Cf \frac{\Delta x}{D_{\text{estimado del tubo}}} = 4 * 0,005 * \frac{14}{0,0762} = 3,6745$$

Fig. 78.2





con lo cual:

$$\left. \frac{4C_f l^*}{D} \right|_1 = 6,9832 + 3,6745 = 10,6577$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo de Fanno, o bien sustituyendo  $M$  en la ecuación (A), se obtiene el valor de Mach en el punto 1.

Así:  $M_1 = 0,229$

Este valor siempre tiene que ser menor que  $M_2$ .

Las presiones estática y de estancamiento a la entrada del conducto se determinan (de la tabla de flujo de Fanno).

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\left. \frac{P}{P^*} \right|_{M_1}}{\left. \frac{P}{P^*} \right|_{M_2}} = \frac{4,7378}{4,0279} \xrightarrow{\text{SE OBTIENE}} P_1 = 1.407.871,9 \frac{4,7378}{4,0279} = 1.656.003,2 \text{ (Pa)}$$

La relación entre la presión estática y la de estancamiento, para un número de Mach dado, se puede obtener aplicando asimismo la ecuación:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \left[ \left( \frac{2}{\gamma+1} \right) \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-1/2}$$

La presión de estancamiento en el punto 1 se obtendrá:

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \xrightarrow{\text{DE DONDE}} P_{01} = \frac{P_1}{0,964141} = 1.717.594,4 \text{ (Pa)}$$

O bien de la tabla de flujo isentrópico para  $M_1 = 0,299$ :  $\left. \frac{P_1}{P_{01}} \right|_{M_1} = 0,964132$

Si esta presión es superior a la presión de estancamiento de las botellas de alimentación que se ha considerado como constante e igual a 17 bar, será necesario aumentar la

relación  $\frac{A}{A^*} = \frac{A_C}{A_T}$ , es decir, aumentar la sección del conducto. En realidad, puesto que

la presión de estancamiento obtenida en 1 es ligeramente superior a 17 bar, se debería repetir el problema para un diámetro de conducto ligeramente superior.

## Problema 79

### Enunciado

Se tienen dos depósitos unidos por un conducto de diámetro 0,2 m y una longitud de 2 m, en cuyos extremos se encuentran sendas toberas. En el primero de los depósitos, las características termodinámicas del fluido de trabajo son:  $P_o = 50$  bar  $T_o = 700$  K mientras que en el depósito de salida se puede considerar que la presión es la atmosférica.

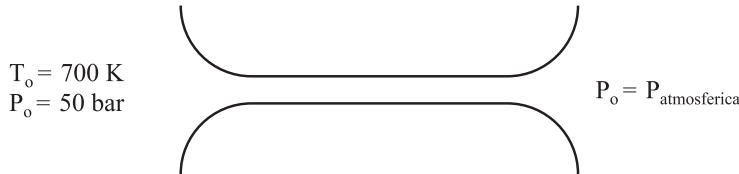


Fig. 79.1

Determine:

1. Si el fluido de trabajo es aire, el conducto es rugoso, con una rugosidad absoluta de  $\epsilon = 0,00003$  m determine las características de presión y temperatura a la entrada y a la salida del conducto. Halle asimismo el caudal másico circulante. Considere el índice de adiabaticidad  $\gamma = 1,4$  en todo el problema.
2. ¿Cuál sería el caudal másico circulante si se considerase la tubería como lisa y el flujo a lo largo de la misma como isentrópico?
3. Si el fluido de trabajo es vapor recalentado y se desea que el caudal circulante sea el 75 % del caudal hallado en el primer apartado, determine: el calor que hay que suministrar al conducto con el fin de que se tenga flujo bloqueado. Considere el conducto sin rugosidad. Considere, además, para este apartado que la presión y la temperatura del depósito inicial se pueden tomar en primera aproximación como estáticas. R vapor de agua = 461,52 J/(kg K).

### Resolución

1. A priori, se supone que el flujo está bloqueado, con lo que el valor del número de Mach a la salida del conducto, punto 2, será la unidad.

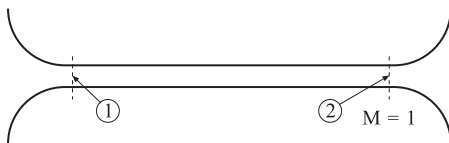


Fig. 79.2

Según Fanno, entre los puntos 1 y 2 se ha de cumplir: 
$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f L_2^*}{D} + \frac{4C_f \Delta L^*}{D}$$



Puesto que, según la hipótesis en el punto 2 el número de Mach es la unidad, se tiene:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L^*}{D}$$

El factor de fricción se puede determinar partiendo de:  $\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,00003}{0,2} = 0,00015$

Suponiendo flujo turbulento desarrollado, del diagrama de Moody se obtiene  $f = 0,013$   
 $= 4 C_f$ , con lo que:

$$\frac{4C_f L_1^*}{D} = \frac{4C_f \Delta L^*}{D} = \frac{0,013}{0,2} \cdot 2 = 0,13$$

Entrando con este valor en las tablas de flujo de Fanno, se obtiene:

$$M_1 = 0,746; \quad \frac{P}{P^*} = 1,413; \quad \frac{P_0}{P_0^*} = 1,064; \quad \frac{T}{T^*} = 1,079; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = 0,773;$$

Para  $M_1 = 0,746$  de las tablas de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,8995; \quad \frac{P}{P_0} = 0,692; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,7685;$$

Puesto que  $P_0$  y  $T_0$  son conocidas y se mantienen a lo largo de la tobera de entrada, se tiene que:

$$P_1 = 0,692 \cdot 5.000.000 = 3.460.000 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 0,8995 \cdot 700 = 629,65 \text{ K}$$

La presión y temperatura estática a la salida del conducto, donde  $M = 1$  (hipótesis)

$$P_2^* = \frac{P_1}{1,413} = \frac{3.460.000}{1,413} = 2.448.690,72 \text{ Pa}$$

$$P_{02}^* = \frac{P_{01}}{1,064} = \frac{5.000.000}{1,064} = 4.699.248,1 \text{ Pa}$$

$$T^* = \frac{T_1}{1,079} = \frac{629,65}{1,079} = 583,54 \text{ K}$$



Para  $M = 1$  de la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,83333 \quad T_{02} = \frac{T_2}{0,83333} = \frac{583,54}{0,83333} = 700 \text{ K}$$

Obsérvese que la temperatura de estancamiento se mantiene; ésta es una característica del flujo de Fanno.

Se comprueba, por otro lado, que la diferencia de presiones que en realidad existe entre los dos depósitos es mucho mayor que la diferencia de presiones necesaria para que exista flujo bloqueado; por tanto, se concluye que la hipótesis realizada al principio de este problema es acertada: el flujo está bloqueado.

El caudal másico se determinará mediante la expresión:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0A} = \sqrt{\gamma} \cdot M \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Para  $M = 1$  y  $\gamma = 1,4$ ; se obtiene:

$$\frac{\dot{m}\sqrt{RT_0}}{P_0A} = 0,6847;$$

de donde:

$$\dot{m} = 0,6847 \cdot 4699248,1 \cdot \frac{1}{\sqrt{287 \cdot 700}} \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} = 225,47 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Éste es el caudal másico máximo que, para las condiciones de entrada dadas, puede fluir por esta instalación.

El caudal másico por unidad de superficie será:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = 7.176,93 \text{ kg /sm}^2$$

Dicho caudal másico se puede determinar, asimismo:

$$C = V^* = \sqrt{\gamma RT^*} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 583,54} = 484,21 \text{ m/s}$$

$$\rho_2^* = \frac{P_2}{RT} = \frac{2.448.690,72}{287 \cdot 583,5495} = 14,62 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = \rho_2^* AV^* = 14,62 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} \cdot 484,21 = 222,401 \text{ kg / s}$$



Véase que el caudal másico obtenido es prácticamente el mismo por los dos métodos.

2. Si el flujo se considera adiabático en todo punto,  $P_0$  y  $T_0$  se mantienen. Así, el caudal másico será:

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{RT_0}} 0,6847 = \frac{5.000.000 \frac{\pi 0,2^2}{4}}{\sqrt{287 \cdot 700}} 0,6847 = 236,77 \text{ kg / s ;}$$

Obsérvese que si el flujo es ideal, el caudal másico máximo circulante es mayor.

3. En este apartado, el fluido circulante es vapor de agua, gas real; el flujo se considera sin fricción y con transferencia de calor, flujo de Rayleigh.

Según el enunciado, el caudal máximo que se quiere que circule por la instalación es:

$$G = 0,75 \cdot G_{(\text{apartado 1})}$$

$$G = 0,75 \cdot 7.176,93 = 5.382,69 \text{ kg / (s m}^2\text{)}$$

La ecuación de la curva característica de Rayleigh será:

$$\frac{1}{\rho_2} = v_2 = \frac{P_1 + G^2 v_1 - P_2}{G^2} ;$$

El enunciado dice que, como primera aproximación, se puede considerar la presión y la temperatura de estancamiento en el depósito inicial como estáticas. Por consiguiente, entrando con los valores de  $P = 50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  y  $T = 700 \text{ K}$  en el diagrama de Molière para el vapor de agua, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho} = v = 0,062 \text{ m}^3 / \text{kg}$$

$$h = 3.275 \text{ kJ / kg}$$

$$s = 6,73 \text{ kJ / kg K}$$

Sustituyendo en la ecuación característica para flujo de Rayleigh, se tiene:

$$\frac{1}{\rho_2} = v_2 = \frac{P_1 + G^2 v_1 - P_2}{G^2} = \frac{5.000.000 + 5.382,59^2 \cdot 0,062 - P_2}{5.382,59^2}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los valores conocidos y dando valores arbitrarios a  $P_2$ , se obtendrán sendos valores del volumen específico. Entrando con los valores de la presión y el volumen específico en el punto 2 (extremo final del tubo), en el diagrama de Molière se obtendrá el valor de la temperatura, entalpía y entropía en este punto.



Parámetros de entrada diagrama de Molière		Parámetros de salida obtenidos mediante el diagrama de Molière		
$P_2$ (Pa)	$v_2$ (m <sup>3</sup> /kg)	$T_2$ (°C)	$h_2$ (kJ/kgK)	$S_2$ (kJ/kgK)
$52 \cdot 10^5$	0,05509	390	3180	6,58
$50 \cdot 10^5$	0,062	427	3275	6,74
$46 \cdot 10^5$	0,0758	520	3490	7,06
$40 \cdot 10^5$	0,09651	580	3630	7,29
$32 \cdot 10^5$	0,12412	584	3650	7,43
$30 \cdot 10^5$	0,13102	583	3650	7,45
$26 \cdot 10^5$	0,14483	520	3600	7,44
$22 \cdot 10^5$	0,158	480	3425	7,31

Los puntos definidos en esta tabla formarían la denominada línea de Rayleigh, que es el lugar geométrico de todos los estados posibles para flujo sin fricción, con transferencia de calor y para el flujo másico deseado.

El flujo bloqueado se obtendrá en el punto de entropía máxima.

La velocidad del fluido en la zona de bloqueo se puede obtener como:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \frac{\rho V A}{A} = \rho V \quad V = \frac{G}{\rho} = \frac{G}{\frac{1}{v}} = \frac{5.382,69}{0,13102} = 705,28 \text{ m/s}$$

La velocidad del fluido a la entrada del conducto será:

$$G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho V \quad V = \frac{G}{\rho} = \frac{5.382,69}{0,062} = 333,727 \text{ m/s}$$

El número de Mach a la entrada será:

$$C = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 \cdot 461,52 \cdot 700} = 672,52 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{333,72}{672,52} = 0,4962$$



A la salida del conducto, el número de Mach será:

$$C = \sqrt{1,4 \cdot 461,52 \cdot (583 + 273)} = 743,69 \text{ m/s}$$

$$M = \frac{705,28}{743,69} = 0,948$$

El número de Mach debería dar la unidad. Esta desviación es debida a que los puntos arbitrarios definidos en la tabla anterior no tienen porqué coincidir con la entropía máxima real; y por otro lado, se tiene poca precisión al utilizar el diagrama de Molière.

El calor comunicado al fluido se puede determinar:

$$Q + h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

$$Q + 3.275.000 + \frac{333,72^2}{2} = 3.650.000 + \frac{705,28^2}{2}$$

$$Q = 568.023,08 \text{ J/kg}$$

Puesto que las condiciones estáticas a la entrada del conducto en realidad se han supuesto, el problema debe repetirse para los nuevos valores de la presión y temperatura estáticas a la entrada del conducto.

El nuevo número de Mach determinado a la entrada del conducto es:  $M_1 = 0,496$ .

Entrando con este número de Mach en la tabla de flujo isentrópico, se obtiene:

$$\frac{T}{T_0} = 0,9531; \quad \frac{P}{P_0} = 0,845256; \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 0,886846$$

con lo que la nueva presión y temperatura estáticas en el punto 1 serán:

$$P = 50 \cdot 10^5 \cdot 0,845256 = 4.226.280 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 700 \cdot 0,9531 = 667,17 \text{ K}$$

Entrando en el diagrama de Molière con estos dos valores se obtienen el valor del volumen específico, la entalpía y la entropía.

Sustituyendo estos valores en  $\frac{1}{\rho_2} = v_2 = \frac{P_1 + G^2 v_1 - P_2}{G^2}$ , se puede obtener una tabla

similar a la obtenida para los valores precedentes, de donde se obtendrá un nuevo punto de entropía máxima, un nuevo número de Mach a la entrada y un nuevo calor comunicado. El proceso seguirá hasta que se obtenga convergencia.



## Problema 80

### Enunciado

Se requiere diseñar un prototipo de avión supersónico. A priori, se pretende que vuele a 10.000 y 20.000 m de altura, y se requiere estudiar la posibilidad de que vuele a  $M=2$  y  $M=5$ . Como primera aproximación, se entenderá que el coeficiente de arrastre del avión está básicamente influenciado por las fuerzas que actúan sobre la estructura cónica de la parte frontal del avión. Determine para las condiciones de vuelo establecidas, cuál es la potencia requerida en los motores del avión, suponiendo que el ángulo del cono pueda ser de  $30^\circ$  o bien de  $20^\circ$ . Considere el diámetro de la base del cono de 1,5 m  $\gamma=1,4$ .

¿Cuál es el valor de la presión de estancamiento en la superficie del cono y de la corriente no perturbada?

¿Qué conclusiones se extraen de los resultados obtenidos?

Propiedades de la atmósfera:	a 10.000 m.	a 20.000 m.
T (K)	223,25	216,65
P (Pa)	$2,65 \cdot 10^4$	$5,5293 \cdot 10^3$
$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	0,41351	0,088910
$\mu$ (Kg/(ms))	$1,4577 \cdot 10^{-5}$	$1,4216 \cdot 10^{-5}$

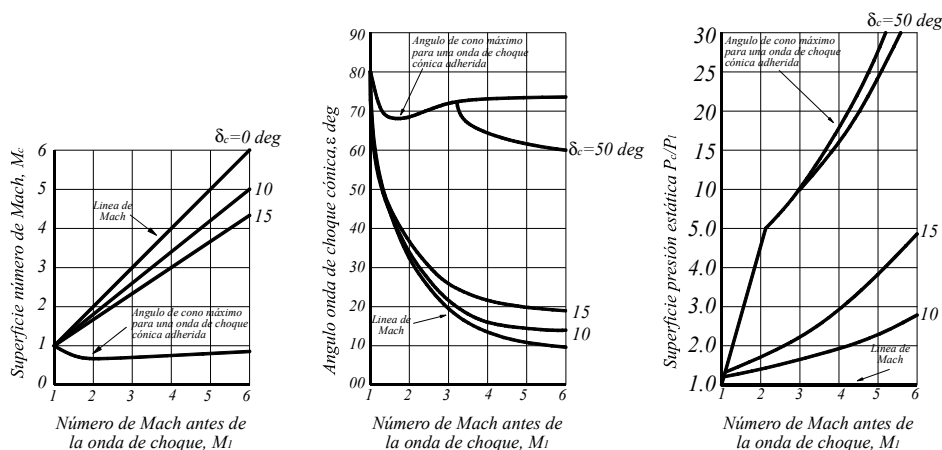


Fig. 80.1  
Diferentes  
diagramas de  
trabajo



## Resolución

De las gráficas del enunciado, se obtiene:

$$M_1 = 2; \delta_c = 15^\circ; \rightarrow \quad \varepsilon = 34^\circ; \quad M_c = 1,7; \quad P_c/P_1 = 1,5$$

$$M_1 = 2; \delta_c = 10^\circ; \rightarrow \quad \varepsilon = 31,5^\circ; \quad M_c = 1,82; \quad P_c/P_1 = 1,25$$

$$M_1 = 5; \delta_c = 15^\circ; \rightarrow \quad \varepsilon = 20^\circ; \quad M_c = 3,8; \quad P_c/P_1 = 3,7$$

$$M_1 = 5; \delta_c = 10^\circ; \rightarrow \quad \varepsilon = 16^\circ; \quad M_c = 4,3; \quad P_c/P_1 = 2,35$$

La fuerza sobre la estructura cónica vendrá dada por el producto de la presión estática sobre la superficie del cono por el área del mismo.

1. Para una altura de 10.000 m:

$$M = 2; \delta_c = 15^\circ; \quad P_c = 1,5 * 2,65 * 10^4 = 39.750 \text{ Pa}$$

$$M = 2; \delta_c = 10^\circ; \quad P_c = 1,25 * 2,65 * 10^4 = 33.125 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \delta_c = 15^\circ; \quad P_c = 3,7 * 2,65 * 10^4 = 98.050 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \delta_c = 10^\circ; \quad P_c = 2,35 * 2,65 * 10^4 = 62.275 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento en la superficie del cono, que se obtiene tabla de flujo isentrópico es:

$$M_c = 1,7; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0,20259; \quad P_{oc} = 39.750 / 0,20259 = 196.209 \text{ Pa}$$

$$M_c = 1,82; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0,16879; \quad P_{oc} = 33.125 / 0,16879 = 196.249 \text{ Pa}$$

$$M_c = 3,8; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0,0086290; \quad P_{oc} = 98.050 / 0,0086290 = 11.362.846,2 \text{ Pa}$$

$$M_c = 4,3; \rightarrow \quad P_c/P_{oc} = 0,0044494; \quad P_{oc} = 62.275 / 0,0044494 = 13.996.269 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento antes de la onda de choque que se obtiene yendo a la tabla de flujo isentrópico responde a la relación:

$$M = 2; \rightarrow \quad P_1/P_{01} = 0,12780; \quad P_{01} = 2,65 * 10^4 / 0,12780 = 207.355,2 \text{ Pa}$$

$$M = 5; \rightarrow \quad P_1/P_{01} = 0,00189; \quad P_{01} = 2,65 * 10^4 / 0,00189 = 14.021.164 \text{ Pa}$$

La superficie sobre la que actúa la presión es  $\pi * 1,5^2 / 4 = 1,7671 \text{ m}^2$



La fuerza en la estructura será:

$39.750 * 1,7671 = 70.244 \text{ N}$	$M = 2;$	$\delta_c = 15^\circ;$
$33.125 * 1,7671 = 58.536 \text{ N}$	$M = 2;$	$\delta_c = 10^\circ;$
$98.050 * 1,7671 = 173.268 \text{ N}$	$M = 5;$	$\delta_c = 15^\circ;$
$62.275 * 1,7671 = 110.049 \text{ N}$	$M = 5;$	$\delta_c = 10^\circ;$

de donde la potencia:

$$P = F * V; \quad C = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{1,4 * 287 * 223,25} = 299,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$M = V / C;$$

$M = 2;$	$\delta_c = 15^\circ;$	$70.244 * 2 * 299,5 = 42.076.156 \text{ W}$
$M = 2;$	$\delta_c = 10^\circ;$	$58.536 * 2 * 299,5 = 35.063.064 \text{ W}$
$M = 5;$	$\delta_c = 15^\circ;$	$173.268 * 2 * 299,5 = 259.468.830 \text{ W}$
$M = 5;$	$\delta_c = 10^\circ;$	$110.049 * 2 * 299,5 = 164.798.377 \text{ W}$

2. Para una altura de 20.000 m:

$M = 2;$	$\delta_c = 15^\circ;$	$P_c = 1,5 * 5,5293 * 10^3 = 8.293,9 \text{ Pa}$
$M = 2;$	$\delta_c = 10^\circ;$	$P_c = 1,25 * 5,5293 * 10^3 = 6.911,6 \text{ Pa}$
$M = 5;$	$\delta_c = 15^\circ;$	$P_c = 3,7 * 5,5293 * 10^3 = 20.458,4 \text{ Pa}$
$M = 5;$	$\delta_c = 10^\circ;$	$P_c = 2,35 * 5,5293 * 10^3 = 12.993,8 \text{ Pa}$

La presión de estancamiento en la superficie del cono será:

$$P_{oc} = 8.293,9 / 0,20259 = 40.939,3 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 6.911,62 / 0,16879 = 40.948,0 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 20.458,4 / 0,008629 = 2.370.888,8 \text{ Pa}$$

$$P_{oc} = 12.993,8 / 0,0044494 = 2.920.348,8 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento antes de la onda de choque vale:

$$P_{01} = 5,5293 * 10^3 / 0,12780 = 43.265,2 \text{ Pa}$$

$$P_{01} = 5,5293 * 10^3 / 0,00189 = 2.925.555,5 \text{ Pa}$$



La fuerza actuante será:

$$8.293,9 * 1,7671 = 14.656 \text{ N}$$

$$6.911,62 * 1,7671 = 12.213 \text{ N}$$

$$20.458,4 * 1,7671 = 36.152 \text{ N}$$

$$12.993,8 * 1,7671 = 22.961,3 \text{ N}$$

La velocidad del sonido a 20.000 m se determina:

$$C = \sqrt{1,4 * 287 * 216,65} = 295,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La potencia requerida será:

$$14.656 * 2 * 295,04 = 8.648.212 \text{ W}$$

$$12.213 * 2 * 295,04 = 7.206.647 \text{ W}$$

$$36.152 * 5 * 295,04 = 53.331.430 \text{ W}$$

$$22.961,3 * 5 * 295,04 = 33.872.509 \text{ W}$$

Obsérvese que la disminución del ángulo del cono da lugar a una disminución notoria de la potencia requerida.

Por otro lado, al aumentar la altura de vuelo, disminuye la potencia necesaria en los motores.

En realidad, para determinar la potencia total, será necesario tener en cuenta las fuerzas debidas a la fricción y a la distribución de presiones sobre los demás elementos componentes del avión.

## Problema 81

### Enunciado

Sea el motor de cohete que se muestra en la figura. Las dimensiones principales del mismo son: diámetro de la cámara de combustión 40 cm; diámetro de la garganta de la tobera 25 cm; diámetro de la salida de la tobera supersónica 100 cm. Se sabe que la tobera está adaptada a una altura de 3.000 m.  $\gamma = 1,4$ .

Determine:

1. La presión estática en la cámara de combustión necesaria para que exista la adaptación requerida.
2. El caudal másico circulante bajo las condiciones de adaptación.





3. El empuje del motor en estas condiciones.
4. La ecuación que determina la aceleración temporal del cohete en la zona subsónica de velocidad.
5. La ecuación de la aceleración del cohete en régimen supersónico.

- Comente en cada caso las hipótesis realizadas.
- Considere la temperatura estática en la cámara de combustión de 900 K.
- Variación de la temperatura del aire atmosférico con la altura:  $T=288,16 - 0,0065 Z$ .
- P atmosférica a nivel del mar: 100.000 Pa.
- Ángulo del cono de la punta del cohete 30°.
- Como primera aproximación, tome la constante del gas (R) como la del aire.
- Supóngase conocido el coeficiente de arrastre  $C_D$ .

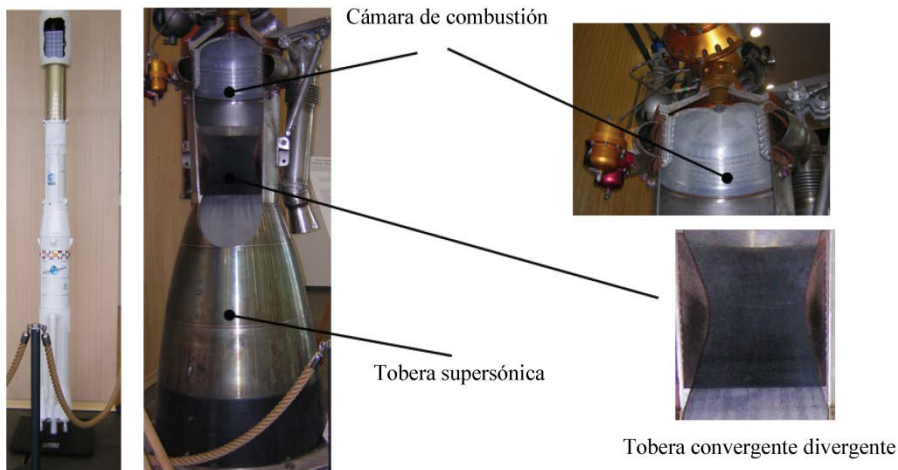


Fig. 81.1  
Conjunto motor de  
cohete

## Resolución

La presión del aire atmosférico a una altura de 3.000 m se determina:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$\frac{p}{\rho} = R \cdot T$$

$$T = T_0 - Bz$$

$$T_0 = 288,16 \text{ K}$$

$$B = 0,00650 \frac{\text{K}}{\text{m}}$$



$$R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$P_{\text{atm}} = 10^5 \text{ Pa}$$

La presión a 3000 m de altura será:

$$\int_{P_{\text{atm}}}^{P_{3000}} \frac{dp}{p} = - \int_{z_0=0}^{z=3000} \frac{g}{R(T_0 - Bz)} dz$$

$$\ln\left(\frac{P_{3000}}{P_{\text{atm}}}\right) = \frac{g}{R \cdot B} \ln\left(\frac{T_0 - BZ_{3000}}{T_0 - BZ_0}\right)$$

$$P_{3000} = P_{\text{atm}} \cdot \left(\frac{T_0 - BZ_{3000}}{T_0 - BZ_0}\right)^{\frac{g}{R \cdot B}}$$

$$P_{3000} = 10^5 \cdot \left(\frac{288,16 - 0,0065 \cdot 3000}{288,16}\right)^{\frac{9,8}{0,0065 \cdot 287}}$$

$$P_{3000} = 10^5 \cdot 0,932329^{5,2532}$$

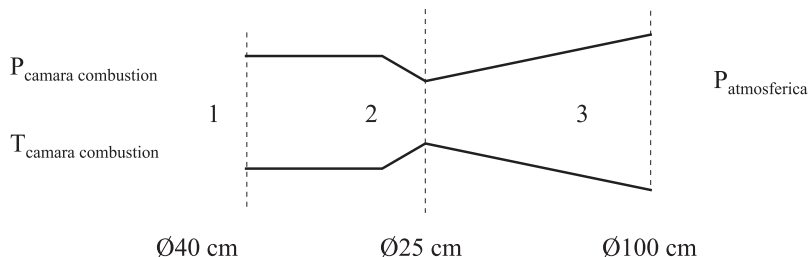
$$P_{3000} = 10^5 \cdot 0,69205 = 69205,54 \text{ Pa}$$

Una vez se conoce la presión atmosférica a 3.000 m de altura, se puede determinar la presión mínima necesaria en la cámara de combustión. Para ello, será necesario recordar el concepto de adaptación de presión en una tobera supersónica.

Una tobera se dice esta adaptada, cuando la presión estática a la salida de la tobera, coincide con la presión atmosférica a la altura a la que esta realizada dicha adaptación, no existiendo bajo estas condiciones onda de choque alguna a la salida de la tobera.

Para la resolución de este problema no obstante, se considerará que la adaptación a la que hace referencia el enunciado, es tal que, la presión estática a la salida de la tobera coincide con la presión atmosférica a una altura de 3000 m, pero si que existe una onda de choque plana a la salida de la tobera. Esta consideración se realiza con el fin de incluir en el problema el tratamiento de ondas de choque planas.

Fig. 81.2





Puesto que en el punto 2, garganta de la tobera, el número de Mach será  $M_2 = 1$ ; de la tabla de flujo isentrópico, entrando con la relación de áreas:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{0,4^2}{0,25^2} = 2,56$$

Se obtiene:

$$M_1 = 0,233; \quad \left. \frac{T}{T_0} \right|_1 = 0,9892; \quad \left. \frac{P}{P_0} \right|_1 = 0,9627;$$

Entre los puntos 2 y 3 la relación de áreas es:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1^2}{0,25^2} = 16$$

Entrando con este valor en la tabla de flujo isentrópico:

$$\frac{T}{T_0} = 0,201056; \quad \frac{P}{P_0} = 0,00364946; \quad M_3 = 4,458;$$

Puesto que en las condiciones de diseño a la salida de la tobera se supone que aparece una onda de choque plana, entrando en la tabla de ondas de choque planas para un número de Mach de  $M_3 = 4,458$  se obtienen las condiciones entre la entrada y la salida de la onda de choque.

$M_3$  antes de la onda de choque = 4,458

$M_3$  después de la onda de choque = 0,42426

$$\frac{T_{3 \text{ despues}}}{T_{3 \text{ antes}}} = 4,802272; \quad \frac{P_{3 \text{ despues}}}{P_{3 \text{ antes}}} = 23,022;$$

La presión  $P_{\text{despues}}$  se considera que es la presión atmosférica a una altura de 3.000 m.

$$P_{3 \text{ antes}} = \frac{P_{3 \text{ despues}}}{23,022} = \frac{69.205,54}{23,022} = 3.006,061 \text{ Pa}$$

La presión de estancamiento delante y detrás de la onda de choque se calcula:

Entrando con el valor de  $M_{3 \text{ despues}} = 0,42426$  en la tabla de flujo isentrópico se tiene:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_{3 \text{ despues}} = 0,88277; \quad P_{0_{3 \text{ despues}}} = \frac{69205,54}{0,88277} = 78.395,89 \text{ Pa}$$



A la entrada de la onda de choque, donde  $M_{3 \text{ entrada}} = 4,458$  de la tabla de flujo isentrópico, se tiene:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_{3 \text{ antes}} = 0,00364946 ; \quad P_{0_{3 \text{ antes}}} = \frac{3006,061}{0,00364946} = 823.700,21 \text{ Pa}$$

Cabe recordar que la presión de estancamiento determinada a la entrada de la onda de choque se mantiene constante a lo largo de toda la tobera.

La presión estática en la garganta se determina mediante la relación  $\left. \frac{P}{P_0} \right|_2$ , la cual se obtiene de la tabla de flujo isentrópico, entrando con un número de Mach igual a la unidad.  $M_2=1$ , y se obtiene:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_2 = 0,52828$$

$$P_2 = P_0 \cdot 0,52828 = 823700,21 \cdot 0,52828 = 435144,34 \text{ Pa}$$

Entrando con el valor del número de Mach de  $M_1 = 0,233$  en la tabla de flujo isentrópico, se obtiene la relación:

$$\left. \frac{P}{P_0} \right|_1 = 0,9627$$

de donde:

$$P_1 = 823700,21 \cdot 0,9627 = 792976,19 \text{ Pa}$$

Ésta es la presión estática necesaria en la cámara de combustión para que se cumplan las condiciones establecidas en el enunciado.

El flujo másico que circula por la tobera, para un  $\gamma = 1,4$ , es de:

$$\frac{\dot{m} \cdot \sqrt{RT_0}}{P_0 \cdot A^*} = 0,6847;$$

$$\dot{m} = \frac{P_0 \cdot A^* \cdot 0,6847}{\sqrt{RT_0}}$$

El enunciado establece que la temperatura estática del gas en la cámara de combustión es de 900 K con lo que la temperatura de estancamiento se determinará: Entrando con el número de Mach  $M = 0,223$  en la tabla de flujo isentrópico se llega.



$$\frac{T}{T_0} = 0,9892 ; \quad T_0 = \frac{900}{0,9892} = 909,82\text{K} ;$$

Recordando que la presión y la temperatura de estancamiento se mantienen a lo largo de toda la tobera, se tiene:

$$\dot{m} = \frac{823.700,21 \cdot \frac{\pi \cdot 0,25^2}{4} \cdot 0,6847}{\sqrt{287 \cdot 909,82}} = 54,177 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$$

La fuerza de empuje de la tobera se determina por la expresión:  $F = \dot{m}V + A_T(P_{\text{salida}} - P_{\text{atm}})$ ; donde  $A_T$  es la sección de salida de la tobera,  $P_{\text{salida}}$  es la presión estática a la salida de la tobera, y  $P_{\text{atm}}$  es la presión atmosférica en las condiciones en las que se produce la adaptación de la tobera. Para el caso de una tobera adaptada la fuerza de empuje es simplemente  $F = \dot{m}V$ .

Si se realiza el cálculo de la fuerza de empuje delante de la onda de choque se tiene:

$$M_{3 \text{ antes}} = 4,458 = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{\gamma RT}}$$

La temperatura estática del fluido antes de la onda de choque, donde  $M_3 = 4,453$ , se obtiene mediante la relación de temperaturas que se obtendrá de la tabla de flujo isentrópico.

$$\left. \frac{T}{T_0} \right|_{3 \text{ antes}} = 0,201056 ;$$

$$T = T_0 \cdot 0,201056 = 909,82 \cdot 0,201056 = 182,92\text{K} ;$$

$$v = M_3 \cdot \sqrt{\gamma RT} = 4,458 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 182,92} = 1208,59 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

El empuje de la tobera será:

$$F_y = 54,177 \cdot 1.208,59 + \frac{\pi 1^2}{4} (3006,06 - 69205,54) = 13.484,83\text{N}$$

Si se calcula la fuerza de empuje a la salida de la onda de choque se obtendrá:

$$T_{3 \text{ despues}} = T_{3 \text{ antes}} * 4,802272 = 182,92 * 4,802272 = 878,43\text{K} ;$$

$$V_{3 \text{ despues}} = 0,42426 * \sqrt{\gamma R T_{3 \text{ despues}}} = 0,42426 * \sqrt{1,4 * 287 * 878,43} = 252,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$F_y = 54,177 \cdot 252,05 = 13.655,44 \text{ N}$  ; Dado que para este caso  $P_{\text{salida}} = P_{\text{atm}} = 69205,54 \text{ Pa}$ .

Obsérvese que, tal y como cabía esperar, ambos resultados son prácticamente idénticos.

Es necesario remarcar que, el empuje que bajo estas condiciones ejerce la tobera, es considerablemente menor que el que ejercería si la tobera estuviera adaptada.

Suponiendo que el cohete sigue una trayectoria ascendente con una inclinación de  $75^\circ$  respecto a la horizontal, la aceleración del mismo vendrá dada por la ecuación de cantidad de movimiento para sistemas no inerciales de coordenadas.

$$-\dot{m} \cdot V_{\text{gases escape}} + m_{\text{cohete}} \cdot \ddot{a} = - \int_{\text{sc}} P \cdot d\vec{S} + \int_{\text{sc}} \vec{\tau} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{vc}} \rho \vec{g} \cdot d\vec{V}$$

Para flujo subsónico, las fuerzas de presión y esfuerzos cortantes actuantes sobre el cohete se pueden dar como:

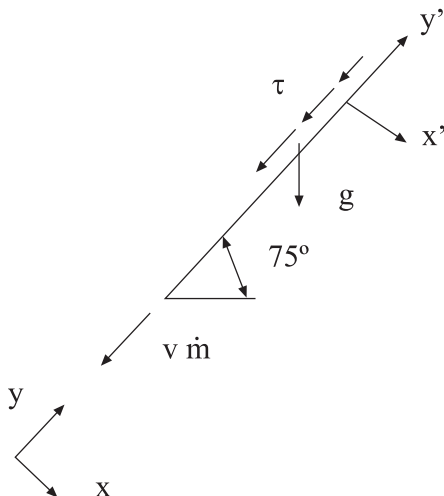
$$D = C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2}$$

Considerando que la variación temporal de cantidad de movimiento en el volumen de control se puede despreciar, la ecuación anterior se puede dar como:

$$m_{\text{cohete}} \cdot \ddot{a} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} - m_{\text{cohete}} \cdot g \cos 15^\circ + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}}$$

$$m_{\text{cohete}} \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} - m_{\text{cohete}} \cdot g \cos 15^\circ + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}}$$

Fig. 81.3  
Esquema de las  
fuerzas que actúan  
sobre el cohete





En la ecuación diferencial anterior, obsérvese que la variable que se busca es la velocidad de cohete; no obstante, ha de tenerse en cuenta que la masa del cohete depende del tiempo y, asimismo, la densidad del aire atmosférico que se encuentra en el término del coeficiente de arrastre es función de la altura a la que se encuentre el cohete.

A priori, se considera que la densidad del aire es la que existe a 3.000 m de altura y se mantiene constante.

La masa del cohete variable será:

$$m_{\text{cohete}} = m_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t$$

con lo que:

$$\begin{aligned} (m_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = -C_D \cdot \rho_{\text{aire}} \cdot S \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} \\ - (m_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot g \cos 15 + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} \end{aligned} \quad (A)$$

ecuación diferencial que permite determinar la velocidad del cohete partiendo de un punto que a priori debe estar situado a 3.000 m, con lo cual es necesario conocer la velocidad del cohete a dicha altura. No obstante, esta ecuación podría utilizarse para hallar la velocidad del cohete partiendo del reposo.

Una vez que la velocidad del cohete llegue a ser sónica, es decir,  $M_{\text{cohete}} = 1$ , aparecerá en la punta cónica del cohete una onda de choque oblicua.

A partir de este momento, las fuerzas de arrastre, antagonistas al movimiento del cohete, serán mayormente debidas a la sobrepresión que actúa sobre la punta cónica del cohete. Dicha sobrepresión será mayor cuanto mayor sea el número de Mach del cohete.

A modo de ejemplo, la presión que actúa sobre la superficie cónica del cohete será:

Para Mach del cohete igual a  $M_{\text{cohete}} = 2$  y semiángulo del cono de 15 grados, de la figura (80.1) (problema anterior), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{P_1} &= 1,5 \\ P_c &= P_1 \cdot 1,5 \end{aligned}$$

Si el número de Mach fuese de  $M_{\text{cohete}} = 4$ , la relación de presiones sería  $\frac{P_c}{P_1} = 2,75$

Véase que  $P_1$  representa la presión antes de la onda de choque en cada caso (presión atmosférica a la altura a la que se encuentre el cohete en cada instante).



La ecuación de cantidad de movimiento, teniendo en cuenta la sobrepresión que actúa en la punta del cohete, queda:

$$\begin{aligned} (\dot{m}_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot \frac{dV_{\text{cohete}}}{dt} = & -C_D \cdot p_{\text{aire}} \cdot S_{P_{\text{cohete}}} \cdot \frac{V_{\text{cohete}}^2}{2} \\ & -(\dot{m}_{\text{inicial}} - \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot t) \cdot g \cos 15 - P_{S_{\text{cono}}} S_{\text{cono cohete}} + \dot{m}_{\text{saliente}} \cdot V_{\text{gases escape}} \end{aligned} \quad (B)$$

Tal y como se ha representado esta ecuación, el coeficiente de arrastre  $C_D$  que se halla en la parte derecha de la misma, no puede tener el mismo valor que para el flujo subsónico, puesto que ahora las fuerzas de presión, que actúan sobre la punta cónica se evalúan por separado; de hecho, el coeficiente de arrastre  $C_D$  ahora, sería el que evaluase mayormente los esfuerzos cortantes actuantes sobre la superficie lateral del cohete. Al respecto, es necesario indicar que, a medida que el número de Mach del cohete aumenta, este término llegará a ser mucho menor que el debido a la presión actuante sobre la superficie cónica de la punta del cohete.

Por otro lado, la presión sobre el cono depende asimismo de la altura a la que se encuentra el cohete, puesto que a cada altura existe una presión atmosférica diferente, siendo la velocidad del cohete asimismo diferente y, por tanto, lo es también el número de Mach.

Así, la primera de las ecuaciones de cantidad de movimiento hallada, la ecuación (A), deberá ser utilizada hasta que la velocidad del cohete llegue a ser sónica. La segunda de las ecuaciones de cantidad de movimiento, la ecuación (B), se utilizará una vez se llegue a la velocidad sónica, recordando que la presión sobre la punta cónica varía en función del número de Mach del cohete en cada instante.

Consiguientemente, el proceso para determinar la velocidad y la aceleración del cohete en cada instante ha de seguir los pasos siguientes:

Considerando las características que se conocen a 3.000 m de altura, se determina  $\dot{m}_{\text{saliente}}$  y  $V_{\text{gases escape}}$ . En la práctica, estos dos valores se pueden considerar constantes para todo el problema o, lo que es lo mismo, se puede considerar que el empuje de la tobera es constante. (Esta consideración no es estrictamente cierta.) Mediante la resolución de la ecuación diferencial (A), se pueden determinar la velocidad temporal del cohete, su aceleración y su posición. Dicha ecuación diferencial (A) se podrá aplicar partiendo del reposo o partiendo de la velocidad del cohete para una altura de 3.000 m; en este segundo caso, la velocidad del cohete a dicha altura deberá ser conocida.

Cuando la velocidad del cohete llegue a ser la sónica, aparecerá una onda de choque oblicua en la punta cónica del cohete. Esto causará una sobre presión sobre la punta cónica. Dicha sobre presión aumentará con el número de Mach del cohete. A partir del punto donde  $M_{\text{cohete}} > 1$ , el cálculo de la velocidad del mismo seguirá utilizando la





ecuación (B). Hay que remarcar, no obstante, que el coeficiente de arrastre  $C_D$ , ligado a la ecuación (B) estará asociado únicamente a los esfuerzos de fricción actuantes sobre el cohete, puesto que el efecto de la distribución de presiones actuantes sobre el extremo cónico del cohete, y debido a la onda de choque cónica, está considerado por separado. Obsérvese que los coeficientes de arrastre  $C_D$  asociados a las ecuaciones (A) y (B) han de hallarse experimentalmente.

El proceso de cálculo mediante la ecuación (B) será: cuando mediante la ecuación (A) se haya calculado la velocidad del cohete, su aceleración y su posición, y se cumpla que  $M_{\text{cohete}} > 1$ , mediante la gráfica 80.1 se calculará la relación de presiones  $P_c / P_1$ , puesto que  $P_1$  es la presión de la atmósfera a la altura a la que se encuentre el cohete. Se determinará esta presión, que a su vez permitirá determinar la presión actuante sobre el cono del cohete  $P_c$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación (B), se hallará la velocidad temporal del cohete partiendo de este punto. Así, para un diferencial de tiempo posterior, se conocerán la nueva velocidad del cohete, su nueva aceleración y su posición, se podrá asimismo determinar el nuevo número de Mach del cohete, y la nueva presión  $P_c$  sobre el mismo. (Si se observa relevante, se puede asimismo hallar el nuevo valor de  $C_D$ .) Sustituyendo estos datos en la ecuación (B), permitirá hallar la velocidad del cohete para el tiempo  $t + 2\Delta t$ . El proceso expuesto se repite a partir de este punto.







## Nomenclatura

$a$  = Aceleración.  $[\text{m/s}^2]$

$A$  = Área.  $[\text{m}^2]$

$B$  = propiedad arbitraria asociada al fluido.

$C$  = velocidad del sonido.  $[\text{m/s}]$

$C_d$  = Coeficiente de descarga.

$C_D$  = Coeficiente de arrastre. Coeficiente de resistencia para la capa límite.

$C_f$  = Coeficiente de fricción.

$C_L$  = Coeficiente de sustentación.

$C_p$  = Calor específico a presión constante.  $[\text{J/Kg K}]$

$C_v$  = Calor específico a volumen constante.  $[\text{J/Kg K}]$

$D$  = Fuerza de arrastre.  $[\text{N}]$

$D$  = Diámetro.  $[\text{m}]$

$D_e$  = Número de Deborah.

$D_h$  = Diámetro hidráulico.  $[\text{m}]$

$E_u$  = Número de Euler.



$e$  = Espesor de la pared del conducto. [m]

$F$  = Fuerza. [N].

$F$  = Número de Froude.

$f$  = Coeficiente de fricción.

$g$  = Aceleración gravitatoria. [ $\text{m/s}^2$ ]

$H$  = Energía por unidad de peso. [ $\text{J/Kg g}$ ]

$H=h=Z$  = Nivel de referencia, (cota). [m]

$h$  = Entalpía. [ $\text{J/Kg}$ ]

$K_n$  = Número de Knudsen.

$L$  = Longitud. [m]

$L$  = Fuerza de sustentación. [N]

$M = T = \text{Par}$ . [N m]

$M$  = Número de Mach.

$m$  = Masa. [Kg]

$\dot{m}$  = Caudal másico. [Kg/s]

$N = \dot{W}$  Potencia. [W] [Kw]

$NPSH$  = Altura neta positiva de aspiración. [m]

$P$  = Presión. [Pa]

$P^*$  = Presión reducida. [Pa]

$P_e$  = Número de Pecklet.

$P_r$  = Número de Prandtl.

$Q = \dot{V}$  = Caudal volumétrico. [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]

$\dot{Q}$  = Flujo de calor. [J/s]

$q$  = Calor por unidad de masa. [J/Kg]

$R, r$  = Radio. [m]

$R$  = Constante característica de cada gas. [J / Kg K]

$Re$  = Número de Reynolds.

$S$  = Sección de paso. [m<sup>2</sup>]

$S_t$  = Número de Strouhal.

$s$  = Entropía. [J/Kg K]

$T$  = Temperatura [°C; K]

$t$  = Tiempo. [s]

$U = V$  = Velocidad del fluido. [m/s]

$u$  = Energía interna. [J/Kg]

$V$  = Velocidad. [m/s]

$V_x = u$  Componente del vector velocidad en dirección x. [m/s]

$V_y = v$  Componente del vector velocidad en dirección y. [m/s]

$V_z = w$  Componente del vector velocidad en dirección z. [m/s]

$\dot{W}$  = Potencia. [W] [Kw]

$W$  = Número de Weber.

$\forall$  = Volumen. [m<sup>3</sup>]

$Y$  = Energía por unidad de masa. [J/Kg]

$Y_T$  = Energía teórica por unidad de masa. [J/Kg]

$Z$  = Nivel de referencia, (cota). [m]

$\alpha_T$  = Coeficiente de expansión térmica. [K<sup>-1</sup>]

$\beta$  = Módulo de compresibilidad volumétrica. [N/m<sup>2</sup>]

$\Gamma$  = circulación. [m<sup>2</sup>/s]

$\gamma$  = Índice de politropía.

$\dot{\gamma}$  = velocidad de deformación angular. [s<sup>-1</sup>].



$\delta$  = Espesor de la capa límite. [m]

$\delta^*$  = Espesor de desplazamiento para la capa límite. [m]

$\varepsilon$  = Rugosidad. [m]

$\varepsilon$  = Excentricidad. [m]

$\eta$  = Rendimiento.

$\theta$  = Espesor de cantidad de movimiento para la capa límite. [m]

$\lambda$  = Segundo coeficiente de viscosidad de Stokes. [Kg/(m s)]

$\mu$  = Viscosidad dinámica. [Kg / (s m)]

$\nu$  = Viscosidad cinemática. [m<sup>2</sup>/s]

$\rho$  = Densidad. [Kg / m<sup>3</sup>]

$\sigma$  = Tensión superficial. [N/m]

$\sigma$  = Esfuerzo normal . [N/m<sup>2</sup>]

$\tau$  = Esfuerzo cortante. [N/m<sup>2</sup>]

$\upsilon$  = Volumen específico. [m<sup>3</sup>/Kg]

$\Phi$  = Velocidad de deformación angular. [s<sup>-1</sup>]

$\square$  = Función potencial. [m<sup>2</sup>/s]

$\psi$  = función de corriente. [m<sup>2</sup>/s]

$\Omega = \xi$  = Vorticidad.

$\omega = \Omega$  = Velocidad angular [rad / s]

$\Pi$  = potencial escalar de fuerzas másicas. [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>]

$\Delta x$  = Variación de posición [m].

$\Delta h$  = Pérdidas de carga por rozamiento. [m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>]

$\Delta P$  = Variación de presión. [N/m<sup>2</sup>]

$\nabla$  = operador diferencial nabla. Gradiente para un escalar, divergencia para un vector. [1/m]

$\nabla^2$  = operador diferencial laplaciano. [1/m<sup>2</sup>]









## Bibliografía

- ANDERSON, JOHN D. *"Fundamentals of Aerodynamics"*. McGraw Hill. 2001.
- ASHLEY, HOLT; LANDAHL, MARTEN. *"Aerodynamics of wings and bodies"*. Dover Publications. 1985.
- BARRERO, RIPOLL, ANTONIO; PÉREZ-SABORID SÁNCHEZ-PASTOR, MIGUEL. *"Fundamentos y Aplicaciones de Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 2005.
- BATCHELOR, GK. *"Introducción a la dinámica de fluidos"*. Ministerio de Medio Ambiente. 1997.
- BERTIN, JOHN J. *"Aerodynamics for Enginyers"*. Prentice Hall. 2002.
- CRESPO, ANTONIO. *"Mecánica de Fluidos"*. Thomson. 2006.
- DOUGLAS, J.F; GASIOREK, J.M; SWAFFIELD, J.A. *"Fluid Mechanics"*. Longman. 2001.
- FOX, R.W; MCDONALD, A.T. *"Introducción a la Mecánica de Fluidos"*. McGraw Hill. 1995.
- GERHART, P; GROSS, R; HOCHSTEIN, J. *"Fundamentos de Mecánica de Fluidos"*. Addison Wesley 1995.
- GORDON LEISHMAN, J. *"Principles of Helicopter Aerodynamics"*. Cambridge University Press. 2005.
- JOHNSON, WAYNE. *"Helicopter theory"*. Dover Publications. 1994.
- LIÑÁN MARTÍNEZ, A; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M; HIGUERA ANTÓN, F. *"Mecánica de Fluidos"*. (Primera parte). 2000.



- LIÑÁN MARTÍNEZ, A; RODRÍGUEZ FERNÁNDEZ, M; “*Mecánica de Fluidos*”. (Segunda parte). 2000.
- LOPEZ HERRERA, JM; HERRADA ,MA; PÉREZ-SABORID, M; BARRERO, A. “*Problemas resueltos de Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 2005.
- MANCEBO DEL CASTILLO, URIEL. “*Teoría del golpe de ariete*”. Limusa. 1987.
- MASSEY, BS. “*Fluid Mechanics*”. Chapman & Hall. 1989.
- MESEGUER RUIZ J; SANZ ANDRÉS A. “*Aerodinámica Básica*”. Universidad Politécnica de Madrid. 2005.
- MILNE THOMSON, LM. “*Theoretical Aerodynamics*”. Dover Publications. 1973.
- MORAN, JACK. “*An Introduction to Theoretical and Computational Aerodynamics*”. Dover Publications. 2003.
- PNUELI, D; GUTFINGER, C. “*Fluid Mechanics*”. Cambridge University press. 1997.
- PRANDTL, L; TIETJEMS, OG. “*Applied Hydro and Aeromechanics*”. Dover Publications. 1957.
- PRANDTL, L; TIETJEMS, OG. “*Fundamentals of Hydro and Aeromechanics*”. Dover Publications. 1957.
- Research and Education Association. “*Fluid Mechanics Problem Solvers REA*”. 1996.
- SCHLICHTING, H; GERSTEN, K. “*Boundary Layer Theory*”. 2003.
- SHAMES, IH. “*Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 1995.
- SPURK, JOSEPH H. “*Fluid Mechanics*”. Springer 1997.
- SPURK, JOSEPH H. “*Fluid Mechanics Problems and Solutions*”. Springer 1997.
- STEPNIEWSKI, WZ; KEYS, CN. “*Rotary-Wing Aerodynamics*”. Dover Publications. 1984.
- VIRTO, L. “*Mecànica de Fluids. Fonaments I*”. Edicions UPC. 1993.
- WATTON, J. “*Fundamentals of Fluid Power control*”. Cambridge University Press. 2009.
- WHITE FRANK, M. “*Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 1988.
- WHITE FRANK, M. “*Mecánica de Fluidos*”. McGraw Hill. 2004.
- ZUCROW, M.J; HOFFMAN, J.D. “*Gas Dynamics*”. Volume 1. John Wiley & Sons 1976.